УДК 539.3/.6+624.04+519.17

РОЗПОДІЛ ПОТОКІВ ДОТИЧНИХ ЗУСИЛЬ ВЗДОВЖ ЗАМКНЕНИХ КОНТУРІВ ПЕРЕРІЗУ ТОНКОСТІННОГО СТЕРЖНЯ: РОЗРОБКА ЧИСЛОВОГО АЛГОРИТМУ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТОКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ УСИЛИЙ ВДОЛЬ ЗАМКНУТЫХ КОНТУРОВ СЕЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ: РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ГРАФОВ

DISTRIBUTION OF THE SHEAR FLOWS OVER THE CLOSED CONTOURS FOR THIN-WALLED SECTION: NUMERICAL ALGORITHM DESIGN BASED ON THE GRAPH THEORY

Юрченко В. В. (Київський національний університет будівництва і архітектури, , Київ)

Юрченко В. В. (Киевский национальный университет строительства и архитектуры)

Yurchenko Vitalina (Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture,Kyiv)

У статті розв'язується задача обчислення коефіцієнтів розподілу потоків дотичних зусиль вздовж замкнених контурів перерізу тонкостінного стержня, що складається з декількох замкнених (зв'язаних та/або незв'язаних) контурів, а також із незамкнених ділянок. Поставлена задача вирішується з використанням математичного апарату теорії графів та теорії множин. Запропоновано детальний алгоритм, придатний для програмної реалізації в системах автоматизованого проектування тонкостінних стержневих систем.

В статье решается задача вычисления коэффициентов распределения потоков касательных усилий вдоль замкнутых контуров сечения тонкостенного стержня, состоящего из нескольких замкнутых (связанных и/или несвязанных) контуров, а также из незамкнутых участков. Сформулированная задача решается с использованием математического аппарата теории графов и теории множеств. Предложен детальный алгоритм, предназначенный для программной реализации в системах автоматизированного проектирования тонкостенных стержневых систем.

In this paper the problem about distribution of the shear flows over the closed contours for arbitrary thin-walled section has been considered. Thin-walled section can consist of several closed (connected and/or disconnected) contours as well as of non-closed parts. Formulated task has been solved in terms of distribution factors using mathematical apparatus of the graph theory and the set theory. A detail numerical algorithm devoted to software implementation in computer-aided systems for thin-walled bar structures has been elaborated and presented

Ключові слова: тонкостінний стержень, холодногнутий профіль, дотичні напруження, потік дотичних зусиль, теорія графів, система автоматизованого проектування;
тонкостенный стержень, холодногнутый профиль, касательные напряжения, поток касательных усилий, теория графов, система автоматизированного проектирования;
thin-walled bars, cold-formed profiles, shear stresses, shear flows, graph theory, computer-aided design.

Постановка задачі.Розглянемо задачу про розподіл потоків дотичних зусиль вздовж замкнутих контурів тонкостінного перерізу, в тому числі комбінованого профілю, що складається з декількох замкнених (зв'язаних та/або незв'язаних) контурів, а також із незамкнених ділянок. Ця задача розглянута і вирішена у праці відомого ученого В. І. Слівкера [3, 7, 8] для загального випадку навантаження тонкостінного стержня.

Подальший розвиток досліджень з цього напрямку вимагає розробки детального алгоритму придатного для програмної реалізації в системах автоматизованого проектування тонкостінних стержневих систем. Такий алгоритм доцільно будувати з використанням математичного апарату теорії графів [2, 4, 9] та теорії множин.

У більшості робіт [5, 6, 10] теорія графів застосовувалась для обчислення геометричних характеристик перерізів тонкостінних стержнів комбінованого (відкрито-закритого) типів. Застосування теорії графів до аналізу тонкостінних стержнів із багатоконтурними перерізами описане у роботі Г. Алфано та ін. [1], але при цьому авторами не розглядалась проблема розподілу потоків дотичних зусиль вздовж замкнутих контурів перерізу.

Прийнята термінологія та система координат. Уведемо на площині прямокутну систему координат Декарта yOz, початок котрої помістимо в центр мас перерізу, положення якого вважатимемо відомим. Напрям даної системи координат співпадає з напрямом головних осей інерції перерізу uOv: напрям осі $y - y$ співпадає з напрямом осі $v - v$, напрям осі $z - z$ – з напрямом осі $u - u$. Розташування будь-якої точки в такій системі координат

однозначно визначається її координатами y і z.

Переріз тонкостінного стержня довільної конфігурації описується набором точок перерізу $\mathbf{P} = \{\vec{p}_p = \{y_p, z_p\} \mid p = \overline{1, n_p}\}$ і набором сегментів перерізу $\mathbf{S} = \{\vec{s}_s = \{p_s^{st}, p_s^{end}\} \mid s = \overline{1, n_s}\}$, що з'єднують деякі дві точки. Вектор $\vec{p}_p$ містить інформацію про координати y_p і z_p деякої p-ї точки перерізу в глобальній Декартовій системі координат yOz, визначеній раніше (рис. 1).

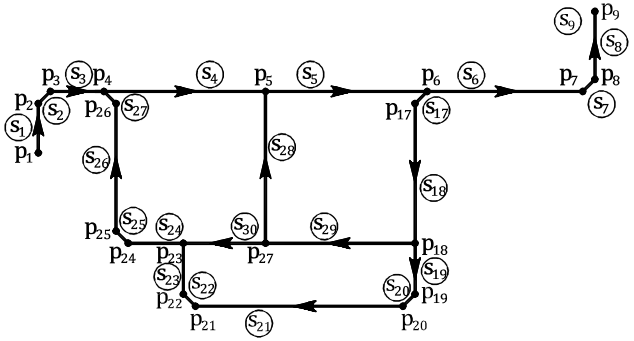

Рис. 1. Довільний переріз тонкостінного стержня, визначений на множині точок $\mathbf{P}$ та на множині сегментів $\mathbf{S}$ перерізу

Кожний сегмент перерізу $\vec{s}_s$ пов'язаний лише з двома точками перерізу (початковою $\vec{p}_{p_s^{st}} \subseteq \mathbf{P}$ і кінцевою $\vec{p}_{p_s^{end}} \subseteq \mathbf{P}$), одже кожний s-й сегмент перерізу $\vec{s}_s$ містить інформацію про порядкові номери початкової p_s^{st} та кінцевої p_s^{end} точок сегмента в масиві $\mathbf{P}$. Кожному сегментові перерізу відповідає визначена товщина сегменту $\boldsymbol{\delta} = \{\delta_s \mid s = \overline{1, n_s}\}$.

Множині точок перерізу $\mathbf{P}$ відповідає множина секторіальних координат перерізу $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_p \mid p = \overline{1, n_p}\}$, значення секторіальної координати в кожній точці перерізу покладаємо відомим.

Уведемо до розгляду також систему дугових координат. Помістимо початок відліку такої системи у деяку (в загальному випадку довільно обрану) точку перерізу. Кожній розглядуваній точці перерізу можна поставити у відповідність дугову координату ς, значення котрої приймається рівним геометричній довжині кривої, побудованої від початку відліку до розглядуваної точки вдовж контуру перерізу. Приймемо також

угоду про те, що зростанню дугової координати ς відповідає додатній напрям обходу контура перерізу.

Зв'язок між дуговими координатами та координатами Декартової системи координат однозначно визначається рівністю:

$$\Delta\varsigma = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \ . \qquad (1)$$

Побудова зв'язаних графів, асоційованих з перерізом тонкостінного стержня

Переріз тонкостінного стержня довільної конфігурації зручно асоціювати з планарним зв'язаним неорієнтованим графом $\mathbf{G}_1$, що задається на множинах $\mathbf{G}_1 = \{\mathbf{V}_1, \mathbf{R}_1\}$, де $\mathbf{V}_1$ – скінчена множина вершин графа, а $\mathbf{R}_1$ – множина ребер графа або множина неупорядкованих пар на $\mathbf{V}_1$. При цьому, для кожного ребра $\mathbf{r}_1 = \{u_1, v_1\} \in \mathbf{R}_1$ покладаємо, що $u_1 \neq v_1$.

Вершини графа $\mathbf{G}_1$ асоціюються з усіма точками перерізу $\mathbf{P}$. Ребра графа $\mathbf{G}_1$ асоціюються з усіма сегментами перерізу $\mathbf{S}$. Таким чином, кількість вершин такого графа співпадає з кількістю точок перерізу n_p, а кількість ребер графа – з кількістю сегментів перерізу n_s.

Множина дугових координат $\boldsymbol{\varsigma} = \{\vec{\varsigma}_\kappa = \{\varsigma_\kappa^{start}, \varsigma_\kappa^{end}\} \mid \kappa = \overline{1, n_\varsigma - 1}\}$ призначена, фактично, для реалізації числового інтегрування вздовж контура перерізу тонкостінного стержня (наприклад, при визначенні геометричних характеристик перерізу і, відповідно, значень потоків дотичних напружень). Зауважимо, що дугові координати $\boldsymbol{\varsigma}$ є атрибутами кінців сегментів перерізу, та відповідно кінців ребер графа $\mathbf{G}_1$, тут κ – номер ребра графа (номер сегменту), $n_\varsigma - 1$ – кількість ребер графа (сегментів перерізу).

Призначення дугових координат $\boldsymbol{\varsigma}$ розпочинається з деякої *стартової вершини обходу графа*, у загальному випадку, з довільної γ-ї вершини графа, що асоціюється з деякою точкою перерізу з множини $\mathbf{P}$. Множина суміжних з γ-ю вершин графа визначається як: $\mathbf{g}_1(\gamma) = \{\mu : \mu \underset{\mathbf{G}_1}{\mapsto} \gamma\}$. За допомогою різноманітних алгоритмів обходу графа у глибину [9], що забезпечують систематичний обхід усіх його вершин (наприклад, при використанні рекурсивної процедури), можливо призначити дугові координати кінцям

ребер графа $\mathbf{G}_1$, що тотожньо призначенню дугових координат кінцям сегментів перерізу тонкостінного стержня.

Вихідні дані про переріз тонкостінного стержня необхідно представити відображеними на множину дугових координат ς шляхом формування відповідних множин сегментів перерізу $\mathbf{S}^{\varsigma} = \{\vec{s}_{\kappa} = \{\varsigma_{\kappa}^{start}, \varsigma_{\kappa}^{end}\} \mid \kappa = \overline{1, n_{\varsigma} - 1}\}$, декартових і секторіальних координат кінців сегментів перерізу $\boldsymbol{\omega}^{\varsigma}$, а також товщин сегментів перерізу $\boldsymbol{\delta}^{\varsigma}$ як: $\boldsymbol{\omega}^{\varsigma} = \left\{\vec{\omega}_{\kappa}^{\varsigma} = \left\{\omega_{\kappa}^{start}, \omega_{\kappa}^{end}\right\} \mid \omega_{\kappa}^{start}, \omega_{\kappa}^{end} \subseteq \boldsymbol{\omega}\right\}$, $\boldsymbol{\delta}^{\varsigma} = \left\{\delta_{\kappa}^{\varsigma} \subseteq \boldsymbol{\delta}\right\}$, $\forall \kappa = \overline{1, n_{\varsigma} - 1}$.

Далі, для кожного ребра графа $\mathbf{G}_1$ (сегмента перерізу) необхідно визначити, $\forall \kappa = \overline{1, n_{\varsigma} - 1}$:

– прирости секторіальних координат:

$\boldsymbol{\Delta\omega}^{\varsigma} = \left\{\Delta\omega_{\kappa}^{\varsigma} = \omega_{\kappa}^{\varsigma,end} - \omega_{\kappa}^{\varsigma,start} : \omega_{\kappa}^{\varsigma,end}, \omega_{\kappa}^{\varsigma,start} \in \boldsymbol{\omega}^{\varsigma}\right\}$;

– значення довжин, що однозначно визначаються координатами початкової та кінцевої точок сегмента:

$$\mathbf{l}^{\varsigma} = \{l_{\kappa}^{\varsigma} = \Delta\varsigma = \sqrt{\left(\Delta y_{\kappa}^{\varsigma}\right)^2 + \left(\Delta z_{\kappa}^{\varsigma}\right)^2}\}. \qquad (2)$$

Переріз тонкостінного стержня довільної конфігурації також можна асоціювати з планарним зв'язаним неорієнтованим графом $\mathbf{G}_2$, що задається на множинах $\mathbf{G}_2 = \{\mathbf{V}_2, \mathbf{R}_2\}$, де $\mathbf{V}_2$ – скінчена множина вершин графа, а $\mathbf{R}_2$ – множина ребер графа. Вершини графа $\mathbf{G}_2$ асоціюються лише з *характерними точками перерізу*, котрими є:

1) точки перерізу, що належать більш, ніж двом сегментам:

$\mathbf{v}^{\mathbf{p}} = \left\{\vec{p}_v \subseteq \mathbf{P} : \left(\exists\, \vec{s}_{\alpha}, \vec{s}_{\beta}, \vec{s}_{\gamma} \subseteq \mathbf{S} : v \in \vec{s}_{\alpha}, \vec{s}_{\beta}, \vec{s}_{\gamma}\right) \wedge \left(\alpha \neq \beta \neq \gamma\right)\right\}$ $\forall v = \overline{1, n_v}$;

2) точки перерізу, що належать лише одному сегменту перерізу:

$\mathbf{v}_{end}^{\mathbf{p}} = \left\{\vec{p}_g : \vec{p}_g \subseteq \mathbf{P} \wedge \exists!\, \vec{s}_{\alpha} \subseteq \mathbf{S} : g \in \vec{s}_{\alpha}\right\}$ $\forall g = \overline{1, n_g}$;

тут n_v і n_g – кількість таких точок.

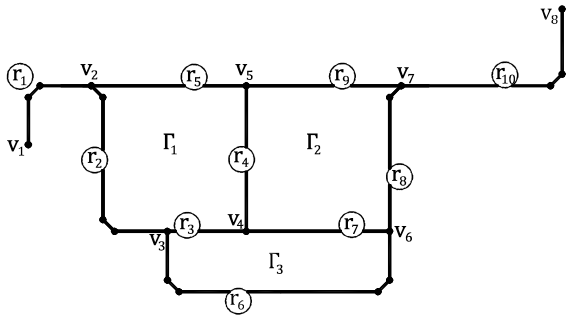

Рис. 2. Граф $\mathbf{G}_2$, що асоціюється з перерізом тонкостінного стержня (вершини графа – $v_1, v_2, ..., v_8$, ребра графа – $r_1, r_2, ..., r_{10}$)

Ребра графа $\mathbf{G}_2$ асоціюються з ділянками перерізу, розташованими між характерними точками перерізу (з ділянками перерізу, що нерозгалужуються) (рис. 2).

Припускаємо також, що переріз тонкостінного стержня може містити у своїй топології деяку кількість замкнених контурів $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{p}} = \{\mathbf{\Gamma}_k^p \mid k = \overline{1, n_k}\}$, де n_k – кількість замкнених (таких, що не перетинаються) контурів у перерізі, $\mathbf{\Gamma}_k^p = \{\vec{p}_d : \vec{p}_d \subseteq \mathbf{P} \wedge \vec{p}_d \in \mathbf{\Gamma}_k \mid d = \overline{1, n_{p\Gamma k}}\}$. Кожний замкнений контур перерізу $\mathbf{\Gamma}_k^p$ асоціюється з циклом графа або кортежем вершин v_0^k, v_1^k, v_2^k, ..., v_n^k, таким що $v_i^k \mapsto v_{i+1}^k \forall i \Leftrightarrow \exists v_{i+1}^k$, n_k – кількість циклів графа.

Кількість вершин графа $\mathbf{G}_2$ співпадає з кількістю характерних точок перерізу $n_v + n_g$. Кількість ребер n_r графа $\mathbf{G}_2$ визначається як:

$$n_r = n_k - 1 + n_v + n_g . \tag{3}$$

Зауважимо, що ребро графа $\mathbf{G}_2$, як правило, складаються з декількох сегментів перерізу, а отже повна інформація про деяке ребро $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$ такого графа описується множиною сегментів перерізу з масиву сегментів $\mathbf{S}^{\varsigma}$, які входять до складу даного ребра графа: $\mathbf{R}_j^{\varsigma} = \{\vec{s}_r^{\varsigma} : \vec{s}_r^{\varsigma} \in \mathbf{S}^{\varsigma} \wedge \vec{s}_r^{\varsigma} \in \mathbf{R}_j \mid r = \overline{1, n_{\varsigma rj}}\}$, тут $n_{\varsigma rj}$ – кількість сегментів для j-го ребра графа. Множина всіх ребер графа, що визначена на множині сегментів $\mathbf{S}^{\varsigma}$, запишеться як $\mathbf{R}^{\varsigma} = \{\mathbf{R}_j^{\varsigma} \mid j = \overline{1, n_r}\}$.

Далі, кожний замкнением контур перерізу $\mathbf{\Gamma}_k^p$ (базисний цикл графа) однозначно описується множиною ребер графа з масиву $\mathbf{R}^\varsigma$, що належать даному контуру, $\mathbf{\Gamma}_k^{r\varsigma} = \{\mathbf{R}_j^\varsigma \mid j = \overline{1, n_{r\varsigma\Gamma_k}}\}$, де $n_{r\varsigma\Gamma_k}$ – кількість ребер перерізу, що належать k-му замкненому контуру перерізу. Крім цього, зручно в подальшому мати відображення деякого замкненого контура перерізу $\mathbf{\Gamma}_k^p$ на множину сегментів перерізу з масива $\mathbf{S}^\varsigma$, що належать даному замкненому контуру:

$$\mathbf{\Gamma}_k^\varsigma = \{\vec{s}_m^\varsigma : \left(\vec{s}_m^\varsigma \in \mathbf{S}^\varsigma\right) \wedge \left(\exists \mathbf{R}_\alpha^\varsigma \subseteq \mathbf{R}^\varsigma : \vec{s}_m^\varsigma \subseteq \mathbf{R}_\alpha^\varsigma \wedge \mathbf{R}_\alpha^\varsigma \subseteq \mathbf{\Gamma}_k^{r\varsigma}\right) \mid m = \overline{1, n_{\varsigma\Gamma_k}}\},$$

тут $n_{\varsigma\Gamma_k}$ – кількість сегментів перерізу, що належать k-му замкненому контуру перерізу.

Деякий замкнений контур перерізу (цикл графа) на множині ребер графа $\mathbf{R}^\varsigma$ і на множині сегментів перерізу $\mathbf{S}^\varsigma$ описується як $\mathbf{\Phi}^{r\varsigma} = \{\mathbf{\Gamma}_k^{r\varsigma} \mid k = \overline{1, n_k}\}$ і $\mathbf{\Phi}^\varsigma = \{\mathbf{\Gamma}_k^\varsigma \mid k = \overline{1, n_k}\}$ відповідно, де n_k – кількість замкнених контурів у перерізі (таких, що не перетинаються). Відмітимо, що ідентифікація замкнених контурів перерізу $\mathbf{\Phi}^{r\varsigma}$ легко здійснити за допомогою алгоритмів пошуку циклів на графі.

У подальшому складемо матрицю інциденцій $\mathbf{I}_{G2}$ для графа $\mathbf{G}_2$ розміром $n_v \times n_r$ (n_v – кількість рядків, n_r – кількість стовпців), $\mathbf{I}_{G2} = \{g_{ij} \mid i = \overline{1, n_v}, j = \overline{1, n_r}\}$. Елементи матриці приймають такі значення: $g_{ij} = 1$ – якщо i-а вершина графа є початковою вершиною для j-го ребра; $g_{ij} = -1$ – якщо i-а вершина графа є кінцевою вершиною для j-го ребра; $g_{ij} = 0$ – в інших випадках.

Уведемо також до розгляду усічену за рахунок останнього рядка матрицю інциденцій $\hat{\mathbf{I}}_{G2}$ розміром відповідно $(n_v - 1) \times n_r$, а також матрицю $\left|\hat{\mathbf{I}}_{G2}\right|$, складену з абсолютних величин компонент матриці $\hat{\mathbf{I}}_{G2}$.

Складемо матрицю базисних циклів графа $\mathbf{F} = \{f_{kj}\}, k = \overline{1, n_k}, j = \overline{1, n_r}$ розміром $n_k \times n_r$ (n_k – кількість рядків, n_r – кількість стовпців). Елементи матриці приймають такі значення: $f_{kj} = 1$ – якщо j-е ребро графа входить до складу k-го базисного цикла графа ($\mathbf{R}_j^\varsigma \subseteq \mathbf{\Gamma}_k^\varsigma$) та його напрям співпадає з

додатнім напрямком обходу контура; $f_{kj}=-1$ – якщо j-е ребро графа входить до складу k-го базисного цикла графа ($\mathbf{R}_j^{\varsigma}\subseteq\mathbf{\Gamma}_k^{\varsigma}$) і його напрям не співпадає з додатнім напрямком обходу контура; $f_{kj}=0$ – якщо j-е ребро графа не входить до складу k-го базисного цикла графа ($\mathbf{R}_j^{\varsigma}\bigcap\mathbf{\Gamma}_k^{\varsigma}=\varnothing$).

Неважко виконати перевірку [8]:

$$\mathbf{I}_{G2}\times\mathbf{F}^{T}=0\,. \tag{4}$$

Визначення коефіцієнтів розподілу потоків дотичних зусиль вздовж замкнених контурів перерізу тонкостінного стержня

Кожному j-му ребру графа $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$, $j=\overline{1,n_r}$, відповідає деяка константа – *вага ребра* [8]:

$$p_j=\int\limits_{\ell_{rj}}\frac{d\varsigma}{\delta(\varsigma)}=\sum_{r=1}^{n_{\varsigma rj}}\int\limits_{\ell_{\varsigma}\in\mathbf{R}_j^{\varsigma}}\frac{d\varsigma}{\delta(\varsigma)}=\sum_{\forall\kappa:\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{R}_j^{\varsigma}\wedge\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{S}^{\varsigma}}^{n_{\varsigma rj}}\int\limits_{\varsigma_{\kappa}}^{\varsigma_{\kappa+1}}\frac{d\varsigma}{\delta(\varsigma)}=\sum_{\forall\kappa:\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{R}_j^{\varsigma}\wedge\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{S}^{\varsigma}}^{n_{\varsigma rj}}\frac{1}{\delta_{\kappa}^{\varsigma}}\int\limits_{\varsigma_{\kappa}}^{\varsigma_{\kappa+1}}d\varsigma\,;$$

$$p_j=\sum_{\forall\kappa:\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{R}_j^{\varsigma}\wedge\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{S}^{\varsigma}}^{n_{\varsigma rj}}\frac{l_{\kappa}^{\varsigma}}{\delta_{\kappa}^{\varsigma}}\,; \tag{5}$$

тут сумування передбачено для усіх сегментів перерізу, що належать j-му ребру графа $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$. Під знаком суми дріб, де в чисельнику – довжина сегмента, а у знаменнику – його товщина.

Складемо також *вагову матрицю* нерозгалужених ділянок перерізу (ребер графа $\mathbf{G}_2$) [8] – квадратну матрицю $\mathbf{P}_{\mathbf{r}}$ розміром $n_r\times n_r$ з діагональними елементами p_j, $j=\overline{1,n_r}$:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{r}}=\begin{bmatrix}p_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & p_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & p_{n_r}\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Окрім цього, кожному j-му ребру графа $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$, $j=\overline{1,n_r}$, відповідає приріст секторіальної координати $\mathbf{\Delta\omega}_{\mathbf{r}}^{\varsigma}=\left\{\Delta\omega_{r,j}^{\varsigma}\mid j=\overline{1,n_r}\right\}^{T}$:

$$\Delta\omega_{r,j}^{\varsigma}=\int\limits_{\ell_{rj}}\rho d\varsigma=\int\limits_{\ell_{rj}}d\omega=\sum_{r=1}^{n_{\varsigma rj}}\int\limits_{\ell_{\varsigma}\in\mathbf{R}_j^{\varsigma}}d\omega=\sum_{\forall\kappa:\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{R}_j^{\varsigma}\wedge\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{S}^{\varsigma}}^{n_{\varsigma rj}}\int\limits_{\varsigma_{\kappa}}^{\varsigma_{\kappa+1}}d\omega=\sum_{\forall\kappa:\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{R}_j^{\varsigma}\wedge\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{S}^{\varsigma}}^{n_{\varsigma rj}}\omega\Big|_{\varsigma_{\kappa}}^{\varsigma_{\kappa+1}};$$

$$\Delta\omega_{r,j}^{\varsigma}=\sum_{\forall\kappa:\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{R}_j^{\varsigma}\wedge\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{S}^{\varsigma}}^{n_{\varsigma rj}}\Delta\omega_{\kappa}^{\varsigma};\qquad(7)$$

тут сумування передбачено для усіх сегментів перерізу, що належать j-му ребру графа $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$. Під знаком суми – приріст секторіальної координати у напрямку нарощування дугової координати для кожного сегмента, що належить j-му ребру $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$.

У подальшому, кожний замкнений контур перерізу $\mathbf{\Gamma}_k^{r\varsigma}$, $k=\overline{1,n_k}$, заставимо з деякою константою – *вагою контура* [8]:

$$\overline{p}_k=\oint\limits_{\mathbf{\Gamma}_k^{r\varsigma}}\frac{d\varsigma}{\delta(\varsigma)}=\int\limits_{\mathbf{R}_j^{\varsigma}\subseteq\mathbf{\Gamma}_k^{r\varsigma}}\frac{d\varsigma}{\delta(\varsigma)}=\sum_{\forall j:\mathbf{R}_j^{\varsigma}\subseteq\mathbf{\Gamma}_k^{r\varsigma}}^{n_{r\varsigma\Gamma k}}\left|f_{kj}\right|p_j,\ f_{kj}\in\mathbf{F};\qquad(8)$$

тут сумування передбачене по всім ребрам графа, під знаком суми –добуток елементів матриці $f_{kj}\in\mathbf{F}$ для відповідного k-го контура (фактично елементів k-го рядка матриці $\mathbf{F}$) на значення ваги відповідного ребра (індекс ребра відповідає індексу стовпця матриці $\mathbf{F}$).

Наведемо у загальному вигляді розв'язувальну систему рівнянь для визначення коефіцієнтів розподілу потоків дотичних зусиль вздовж замкнених контурів перерізу $\overline{a}_k$, $k=\overline{1,n_k}$ [8]:

$$\begin{bmatrix}\overline{p}_{11}&-p_{12}&\cdots&-p_{1k}&\cdots&-p_{1n_k}&\Omega_1\\-p_{21}&\overline{p}_{22}&\cdots&-p_{2k}&\cdots&-p_{2n_k}&\Omega_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\-p_{k1}&-p_{k2}&\cdots&\overline{p}_{kk}&\cdots&-p_{kn_k}&\Omega_k\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-p_{n_k1}&-p_{n_k2}&\cdots&-p_{n_kk}&\cdots&\overline{p}_{n_kn_k}&\Omega_{n_k}\\\Omega_1&\Omega_2&\cdots&\Omega_k&\cdots&\Omega_{n_k}&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\overline{a}_1\\\overline{a}_2\\\vdots\\\overline{a}_k\\\vdots\\\overline{a}_{n_k}\\\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\\vdots\\0\\\Omega_0\end{bmatrix};\qquad(9)$$

тут діагональні елементи матриці представляють собою вагу k-го замкненого контура, $\overline{p}_{kk}=\overline{p}_k$, $k=\overline{1,n_k}$; елементи матриці Ω_k – подвоєну

площу, що охоплюється k-им замкненим контуром $\mathbf{\Gamma}_k^{\varsigma}$ (без врахування товщин сегментів); Ω_0 – подвоєну площу всіх замкнених контурів перерізу $\mathbf{\Phi}^{\varsigma}$, $\Omega_0 = \sum_{k=1}^{n_k} \Omega_k$. Інші елементи матриці $p_{\alpha\beta}$ приймають нульове значення $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha} = 0$, якщо відповідні замкнені контури $\mathbf{\Gamma}_{\alpha}^{\varsigma}$, $\mathbf{\Gamma}_{\alpha}^{\varsigma} \subseteq \mathbf{\Phi}^{\varsigma}$ і $\mathbf{\Gamma}_{\beta}^{\varsigma}$, $\mathbf{\Gamma}_{\beta}^{\varsigma} \subseteq \mathbf{\Phi}^{\varsigma}$ ($\alpha \neq \beta$, $1 \le \alpha \le n_k$, $1 \le \beta \le n_k$) не мають спільних ребер, тобто: $\mathbf{\Gamma}_{\alpha}^{\varsigma} \bigcap \mathbf{\Gamma}_{\beta}^{\varsigma} = \varnothing$, і значення суми ваги усіх ребер $\mathbf{R}_r^{\varsigma}$, що належать обидвом контурам $\mathbf{\Gamma}_{\alpha}^{\varsigma}$ і $\mathbf{\Gamma}_{\beta}^{\varsigma}$, тобто $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha} = \sum_r p_r, \forall r : \mathbf{R}_r^{\varsigma} \subseteq \mathbf{\Gamma}_{\alpha}^{\varsigma} \wedge \mathbf{R}_r^{\varsigma} \subseteq \mathbf{\Gamma}_{\beta}^{\varsigma}$.

Розв'язок системи алгебраїчних рівнянь повертає вектор-стовпець коефіцієнтів $\mathbf{A}_k = \{\overline{a}_k \mid k = \overline{1, n_k}\}$ розподілу потоків дотичних зусиль вздовж замкнених контурів перерізу. З його використанням формуємо вектор-стовпець коефіцієнтів розподілу потоків дотичних зусиль вздовж ребер графа $\mathbf{G}_2$: $\mathbf{A}_r = \{a_j \mid j = \overline{1, n_r}\}$, де кожний елемент визначається як:

$$a_j = \sum_{k=1}^{n_k} f_{kj} \overline{a}_k \ , \ \forall j = \overline{1, n_r} \ , \ f_{kj} \in \mathbf{F} \, . \tag{10}$$

Оскільки кожне ребро графа $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$, $j = \overline{1, n_r}$, описується множиною сегментів перерізу з масиву $\mathbf{S}^{\varsigma}$ як $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$, тоді стає можливим для кожного сегмента перерізу тонкостінного стержня $\mathbf{S}^{\varsigma}$ визначити значення кусково-постійної *функції розподілу потоків вздовж перерізу* [8] $a^{\varsigma}(\varsigma)$ у вигляді множини $\mathbf{a}^{\varsigma} = \{a_{\kappa}^{\varsigma} \mid \kappa = \overline{1, n_{\varsigma} - 1}\}$ як:

$$\begin{aligned} &a_{\kappa}^{\varsigma} = a_j \ \ \forall \kappa : \vec{s}_{\kappa}^{\varsigma} \bigcap \mathbf{\Phi}^{\varsigma} \neq \varnothing ; \\ &a_{\kappa}^{\varsigma} = 0 \ \forall \kappa : \vec{s}_{\kappa}^{\varsigma} \bigcap \mathbf{\Phi}^{\varsigma} = \varnothing . \end{aligned} \tag{11}$$

Таким чином, для сегментів перерізу значення функції розподілу потоків a_{κ}^{ς} приймається рівним значенню коефіцієнта розподілу потоків для відповідного ребра графа, якому належить розглядуваний сегмент $a_{\kappa}^{\varsigma} = a_j$.

Отримані значення коефіцієнтів розподілу потоків дотичних зусиль у подальшому використовуються для обчислення значень дотичних напружень на зовнішніх гранях сегментів перерізу тонкостінного стержня довільної конфігурації [11].

Висновок: У статті розв'язується задача обчислення коефіцієнтів розподілу потоків дотичних зусиль вздовж замкнених контурів перерізу тонкостінного стержня, що може складатися з декількох замкнених (зв'язаних та/або незв'язаних) контурів, а також із незамкнених ділянок. Поставлена задача вирішується з використанням математичного апарату теорії графів та теорії множин. Запропоновано детальний алгоритм, придатний для програмної реалізації в системах автоматизованого проектування тонкостінних стержневих систем.

Отримані значення коефіцієнтів розподілу потоків дотичних зусиль необхідні для обчислення значень дотичних напружень на зовнішніх гранях сегментів перерізу тонкостінного стержня довільної конфігурації.

1. Alfano, G. Automatic analysis of multicell thin-walled sections / G. Alfano, F. Marotti de Sciarra, L. Rosati // Computer and Structures. – #59. – 1996. – P. 641–55. **2**. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 297 с. **3**. Kountsevitch, A. Bi-member model of thin-walled member of open cross-section / A. Kountsevitch, V. Slivker // Proceedings of the Second European Conference on Computational Mechanics. Solid, Structures and Coupled Problems in Engineering. –Krakow, Poland, June 26-29, 2001. – Vol. 2. – P.1048-1049. **4.** Кристофидес Н. Теория графов: алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978. – 430 с. **5.** Prokić A. Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open-closed section / A. Prokić // Computers and Structures. – #74. – 2000. – P. 705–715. **6.** Paz, M. Computer determination of the shear center of open and closed sections / M. Paz, C. P. Strehl, P. Schrader // Computer and Structures. – #6.– 1976. – P. 117–25. **7.** Perelmuter, A. V. Numerical Structural analysis. Methods, Models and Pitfalls / A. V. Perelmuter, V. I. Slivker. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, – 2003. **8.** Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы / В. И. Сливкер. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с. **9.** Tarjan, R. Depth-first search and linear graph algorithms / R. Tarjan // SIAM Journal Computing. – #1. – 1972. – P. 146–60. **10**. Yoo, C. H. Cross-sectional properties of thin-walled multi-cellular section / C. H. Yoo, V. S. Acra // Computer and Structures. – #22. – 1986. – P. 53–61. **11.** Юрченко В. В. Численное решение задачи о распределении касательных напряжений в сечений тонкостенного стержня произвольной конфигурации / В. В. Юрченко // Строительная механика и строительные конструкции: Сборник статей. – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2013. – С. 487 – 505.