УДК 624.012

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ДО РОЗРАХУНКУ ОДНОПОРОЖНИННОГО ГІПЕРБОЛОЇДА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ОДНОПОЛОСНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

USING OF THE FINITE DIFFERENCE METHOD FOR THE CALCULATION OF THE ONE SHEET HYPERBOLOID

Пасічник Р.В., к.т.н., доц., **Ужегов С.О., аспірант**, **Горбатюк Т.В., магістр** (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Пасичник Р.В., к.т.н., доц., **Ужегов С.О., аспирант**, **Горбатюк Т.В., магистр** (Луцкий национальный технический университет, г. Луцк)

Pasichnyk R.V., candidate of technical sciences, Uzhehov S.O., postgraduate, **Gorbatyuk T.V., master** (Lutsk National Technical University, Lutsk)

Використана методика розрахунку оболонок від'ємної Гаусової кривини методом скінченних різниць. Розглянуто розрахунок однопорожнинного гіперболоїда. Вивчено моментний напружений стан при навантаженні від власної ваги. Розглянуто питання внутрішньої збіжності розв'язку.

Использована методика расчета оболочек отрицательной Гауссовой кривизны методом конечных разностей. Рассмотрен расчет однополосного гиперболоида. Исследовано моментное напряжённое состояние при нагрузке от собственного веса. Рассмотрен вопрос внутренней сходимости решения.

The calculating method of the negative Gaussian curvature shells is used by finite difference method. Calculation of the sheet hyperboloid is considered. The moment stress state under loading from its own weight is studied. The issue of internal convergence solution is discovered.

Ключові слова:
Однопорожнинний гіперболоїд, скінченно-різницевий метод, моменти, оболонка.
Однополосный гиперболоид, конечно-разностный метод, моменты, оболочка.
One sheet hyperboloid, finite-difference method, moments, shell.

Стан питання та задачі дослідження. Оболонки типу однопорожнинного гіперболоїда знайшли практичне застосування у будівництві пізніше від оболонок інших видів, тому їх статичні та жорсткісні характеристики виявились менш вивченими і розробленими. За моментною теорією розрахунок оболонок виконується, як правило, на основі таких чисельних методів як метод скінченних різниць (МСР) та метод скінченних елементів (МСЕ).

У статті розглядається розрахунок однопорожнинного гіперболоїда при різних навантаженнях за моментною теорією методом сіток.

Основні результати дослідження

Система рівнянь теорії оболонок, записана в переміщеннях, має вигляд:

$$\nabla^4 W+\frac{12}{h^2}\left[\frac{1}{R_1}\frac{\partial U}{\partial\theta}(K_1+\mu K_2)+\frac{1}{R_1 r}\frac{\partial r}{\partial\theta}U(K_2+\mu K_1)+\right.$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta}U(K_2+\mu K_1)+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}(K_2+\mu K_1)+\left(K_1^2+2\mu K_1\times\right.$$
$$\left.\left.\times K_2+K_2^2\right)\right]W=\frac{g_n}{D};$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{R_1}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(rK_1W\right)+\mu\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial r}{\partial\theta}U\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(K_2rW\right)\right]+\frac{(1-\mu)}{2}\frac{R_1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\frac{(1-\mu)}{2}r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)- \tag{1}$$
$$-\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}-\frac{1}{R_1 r}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2U-K_2W\frac{\partial r}{\partial\theta}-\mu\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial\theta}+\right.$$
$$\left.+K_1W\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)=-\frac{R_1 r}{B}g_1$$

$$\frac{R_1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+R_1\left(K_2+\mu K_1\right)\frac{\partial W}{\partial\varphi}+\frac{1-\mu}{2}\times$$
$$\times\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{r^2}{R_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{V}{r}\right)\right]+$$

$$\frac{R_1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+R_1\left(K_2+\mu K_1\right)\frac{\partial W}{\partial\varphi}+\frac{1-\mu}{2}\times$$
$$\times\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{r^2}{R_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{V}{r}\right)\right]+$$
$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{r}{R_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{V}{r}\right)=-\frac{R_1 r}{B}g_2;$$

У статті прийнято, що зміна кривини і кручення, обумовлені компонентами переміщень дотичними до серединної поверхні, як правило, приймаються несуттєвими. Обгрунтування використання цього методу було введено в науку Х.М.Муштарі і Л.Донеллом [2], та широко використовується в задачах стійкості оболонок обертання.

В (1) прийняті позначення:

$$\nabla^4 W=\frac{1}{R_1 r}\left[\frac{r}{R_1}\frac{\partial^2\left(\nabla^2 W\right)}{\partial\theta^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{R_1}\right)\frac{\partial\left(\nabla^2 W\right)}{\partial\theta}+\right.$$
$$\left.+\frac{R_1}{r}\frac{\partial^2\left(\nabla^2 W\right)}{\partial\varphi^2}\right]; \tag{2}$$
$$\nabla^2 W=\frac{1}{R_1 r}\left[\frac{r}{R_1}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{R_1}\right)\frac{\partial W}{\partial\theta}+\frac{R_1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right];$$

U, V, W – компоненти зміщення (рис. 1);
h – товщина оболонки;
D, B – циліндрична жорсткість на розтяг елемента оболонки;
r, R – коефіцієнти першої квадратичної форми Гауса;
K_1, K_2 – кривини поверхні;
μ =0,2 – коефіцієнт Пуассона;
g_1, g_n, g_2 – компоненти інтенсивності навантаження.
Геометрія поверхні визначається наступними параметрами:

$$r=\frac{a}{c}\sqrt{z^2+c^2}$$ a, c – параметри гіперболи;

$$tg\theta=\frac{dr}{dz}=\frac{a}{rc}\sqrt{r^2-a^2},\quad r=a\left(1-\alpha^2 tg^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{a\alpha^2}{\cos^2\theta\sqrt{\left(1-\alpha^2 tg^2\theta\right)^3}},$$

$$R_1=\frac{\alpha}{c^2}\sqrt{\left[\left(1+\alpha^2\right)r^2-a^2\right]^3} \tag{3}$$

$$K_1=-\frac{1}{R_1}; \quad K_2=\frac{1}{R_2}=\frac{r}{\cos\theta}.$$

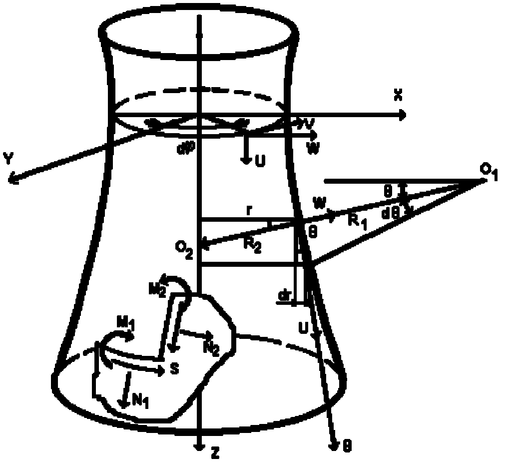

Рис. 1. Схема зусиль

Співвідношення Кодацці:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{R_1}\right)=-\frac{1}{R_1}\frac{\partial r}{\partial\theta}, \text{ або } \frac{\partial r}{\partial\theta}=R_1\sin\theta. \tag{4}$$

Складність розв’язку поставленої задачі обумовлюється великою її розмірністю, високим порядком диференціювання рівнянь в часткових похідних. Їх коефіцієнти є складними функціями координат на поверхні оболонки. Тому при розв’язанні поставленої задачі переходять до дискретних методів алгебраїзації рівнянь, серед яких найбільш ефективним є метод скінченних елементів і метод сіток [1, 3].

Для дискретизації задачі на серединній поверхні, зазвичай, будують координатні лінії, що співпадають з лініями кривини поверхні. Рівняння континуальної системи (1) апроксимуються скінченно-різницевими аналогами в центральних різницях першого порядку точності, використовуючи при цьому цілочисельні координати, що відповідають номерам вузлів різницевої сітки у напрямку θ і φ.

Розглядається розрахунок градирні (рис.1) з параметрами: $a = 35$ м, $c = 82{,}4$ м, $h = 0{,}18$ м, $\alpha = c/a = 2.3211$ при різному кроці сітки n. Навантаження прийняті від ваги **G** і внутрішнього тиску $g_n - const$.

Граничні умови: верхнє січення оболонки при $\theta_{\min} = -8.626^\circ$ вільне від в'язів защемлення S=0, N_1=0, R_1=0, M_1=0. $\theta = 18.66^\circ$ (нижній край оболонки) повне защемлення $a = V = W = \dfrac{\partial W}{\partial \theta} = 0$.

Для визначення значення функцій переміщень на контурі і за контуром використовують різницеві аналоги [3]

Враховуючи симетрію задачі, розглядається напружений стан лише в напрямку координати θ з сіткою при n=10. При цьому крок $\Delta\theta = 0.04762$ рад. приймається постійним.

Результати розв'язку подані на рис. 3 – рис. 6 у вигляді епюр переміщень та зусиль.

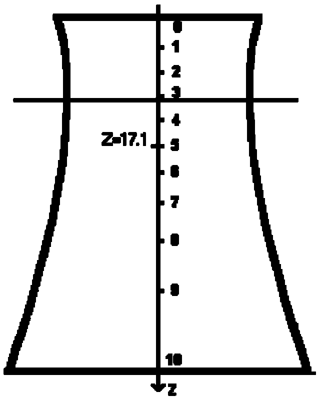

Рис. 2. Розрахункова схема градирні

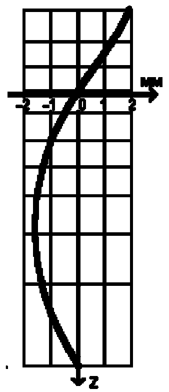

Рис. 3. Епюра W (власна вага)

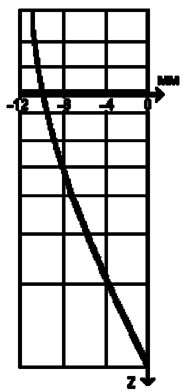

Рис. 4. Епюра U (власна вага)

Розв'язок показує що прогини від власної ваги W та U одного порядку. Порівнюючи зусилля N_1, знайдені за безмоментною теорією і за методом сіток, бачимо що найбільше розходження виникає біля нижнього защемленого краю (рис. 5). Таку розбіжність можна пояснити значним крайовим ефектом.

M_1 по всій висоті градирні – величина дуже мала. Виняток становлять точки, розміщені в безпосередній близькості до нижнього защемленого краю, де значення моментів різко зростають, досягаючи екстремуму в защемленні внаслідок значного крайового ефекту.

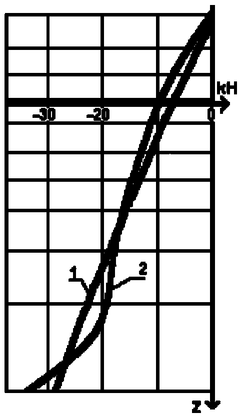

Рис. 5. Епюра N_1.
1- безмоментна теорія;
2- метод сіток

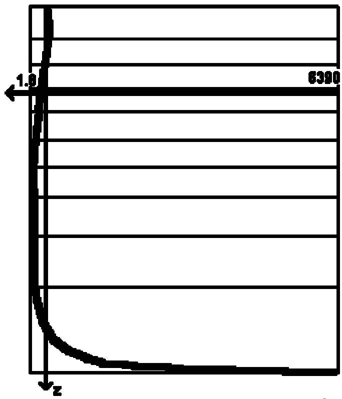

Рис. 6. Епюра M_1(kH ·м· 10^8)

Для встановлення точності розв’язку, задача вирішена при різних кроках сітки для n = 6, 10, 12, 18, 24, 48 розбиттів. Результати наведені в табл. 1.

Таблиця 1.

Збіжність розв’язку при різних кроках сітки

Кількість розбиттів	Січення Z=-17,10 м		Січення Z=-103,99 м	
	W (мм)	U (мм)	N_1 (kH)	M_1 (10^{-2} kH·м)
6	-0,85	8,90	120	3,05
12	-0,92	9,64	139	1,27
18	-0,93	9,84	148	1,93
24	-0,94	9,93	157	2,50
48	-0,95	9,99	161	2,82

Висновок

МСР є економічнішим у порівнянні з МСЕ, він дозволяє здійснити безпосередніший підхід до чисельного розв’язку диференційних рівнянь крайової задачі, дає можливість отримати кращу стійкість і збіжність розв’язку при розрахунку конструкцій відносно простої геометрії.

1. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдачук В.В.: Расчет оболочек сложной формы. – К.: Будівельник, 1990. – 192 с. **2**. Муштари Х.М., Галимов К.З.: Нелинейная теория оболочек. – Казань : Таткнигоиздат., 1957. – 432 с. **3**. Пасічник Р.В. Розрахунок градирні на стійкість / Р. Пасічник // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник за напрямом „Інженерна механіка”. – Луцьк, 2007. – Випуск 19. – С. 115 – 120.