

**УДК 666.97.003.16**

**ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОДІЇ БЕТОННОЇ СУМІШІ З ДНИЩЕМ  
ФОРМИ ПРИ ПРОСТОРОВИХ КОЛИВАННЯХ ВІБРОУСТАНОВКИ**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БЕТОННОЙ СМЕСИ С  
ДНИЩЕМ ФОРМЫ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ  
ВИБРОУСТАНОВКИ**

**RESEARCH INTERACTION CONCRETE MIXTURE TO THE BOTTOM  
FORMS OF SPATIAL OSCILLATIONS VIBRATING FACILITIES**

**Нестеренко М.П., д.т.н., професор** (Полтавський національний технічний  
університет імені Юрія Кондратюка. м. Полтава)

**Н.П. Нестеренко д. т. н., професор** (Полтавский национальный технический  
университет имени Юрия Кондратюка. г. Полтава)

**M.P. Nesterenko, ScD, Professor** (Poltava National Technical Yuri Kondratyuk  
University. Poltava)

**Досліджена математична модель «віброустановка – бетонне  
середовище», що дозволяє визначити дисипативні й інерційні сили, які  
діють з боку бетонної суміші на днище форми при просторових  
коливаннях віброустановки.**

**Исследована математическая модель «виброустановка - бетонная среда»  
позволяющая определить диссипативные и инерционные силы,  
действующие со стороны бетонной смеси на днище формы при  
пространственных колебаниях виброустановки.**

**Research a mathematical model of the «vibrating facilities – concrete  
environment» allows to determine the dissipative and inertial forces acting on  
the part of the concrete mix at the bottom of the form when spatial vibrations  
of vibroplatforms.**

**Ключові слова:**

Бетонна суміш, віброустановка, дебаланс, математична модель, просторові  
коливання.

Бетонная смесь, виброустановка, дебаланс, математическая модель,  
пространственные колебания.

Concrete mixture, unbalans, vibrating facilities, mathematical model, spatial  
oscillations.

**Вступ.** Досить широкого поширення при формуванні залізобетонних виробів набуло розроблене у ПолтНТУ вібраційне обладнання з просторовими коливаннями робочого органа [1], удосконалення котрого може проводитися на підставі аналітичних досліджень з врахуванням фізико-механічних характеристик ущільнюваного середовища і визначенням на їхній основі раціональних параметрів вібраційної площадки та режимів вібраційної дії.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання даної проблеми.** У розрахунках вібраційного обладнання для формування залізобетонних виробів використовуються різні підходи до складення математичних моделей, про що свідчать публікації різних років. Відомі математичні моделі можна умовно розподілити на дві групи: плоскі динамічні моделі руху робочого органу, що розглядають рух у вертикальній або горизонтальній площині [2–7], та просторові – які розглядають рух робочого органа у просторі [8–9].

**Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття.** У «плоских» математичних моделях розглядається вплив бетонної суміші на поглинання енергії з врахуванням її реологічних властивостей. У математичних моделях вібраційних машин з просторовими коливаннями робочого органа бетонна суміш враховується у вигляді твердого тіла як приєднана маса до коливальної системи. Але у реальних віброустановок із просторовими коливаннями робочого органа частина енергії витрачається на тертя бетонної суміші по піддону форми, інша частина поглинається бетонною сумішшю при її ущільненні. Раціональні параметри віброустановки можна установити шляхом визначення енергетичних витрат на основі вивчення закону руху даної динамічної системи, включаючи рух як рухомої рами віброустановки, днища форми, так і рух ущільнюваного середовища у вертикальному напрямі.

**Метою даної роботи** є проведення аналітичних досліджень характеру взаємодії бетонної суміші з днищем форми при просторових коливаннях віброустановки на основі аналітичного дослідження динамічної системи «віброустановка – бетонне середовище», які дозволять врахувати фізико-механічні характеристики ущільнюваного середовища і визначити раціональні параметри вібраційної установки та режими вібраційної дії, при яких забезпечується ефективне ущільнення бетонних сумішей.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Для визначення характеру взаємодії віброустановки з ущільнюваною бетонною сумішшю при горизонтальному напрямленні коливаннях досліджуємо динамічну систему «віброустановка – бетонне середовище» (рис.1). Приймаємо розрахункову схему в котрій рухома рама 1 віброустановки встановлена на пружні опори 2, закріплені на фундаменті 3 симетрично до вертикальної осі Z. Вібробуджувач кругових коливань 4 уставлено в центральному вікні рухомої рами таким чином, що вісь обертання його дебалансу 5 нахилена до

вертикалі на кут  $\beta$ , а площина 11 дії вимушуючої сили  $\Phi$  перпендикулярна до осі обертання дебалансу і проходить через точку  $O$ , відповідну положенню ц. м. коливальної системи. Електродвигун 6, установлений на піддвигуневій рамі 7, приводить в обертання дебаланс 5 через клинопасову передачу 8. Форма 9, заповнена ущільнюваною бетонною сумішшю, встановлюється на рухому раму 1 між жорсткими клиновими упорами 10.

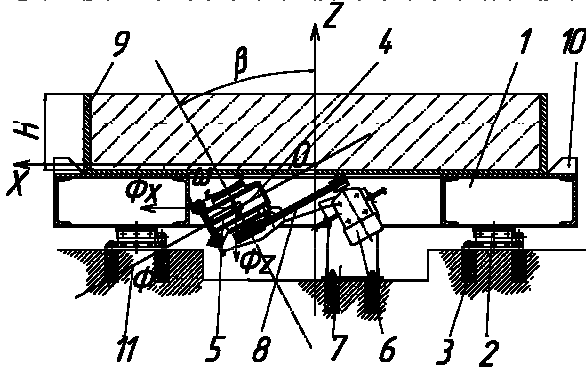


Рис. 1. Розрахункова схема динамічної системи «віброустановка – бетонне середовище»: 1 – рухома рама віброустановки; 2 – пружна опора; 3 – фундамент; 4 – вібророзбуджувач; 5 – дебаланс; 6 – електродвигун; 7 – піддвигунева рама; 8 – клинопасова передача; 9 – форма із бетонною сумішшю; 10 – клиновий упор; 11 – площина обертання дебалансу

При обертанні дебалансу виникає вимушуюча відцентрова сила кругової дії  $\Phi$ , вектор якої обертається у площині 11 із кутовою швидкістю  $\omega$ . Складові сили  $\Phi$  по осях прямокутної системи координат  $OXYZ$  початком в ц. м.  $O$ , рівні

$$\Phi_x = \Phi \cos \beta \cos \omega t; \Phi_y = \Phi \sin \omega t; \Phi_z = \Phi \sin \beta \cos \omega t, \quad (1)$$

та збуджують трикомпонентні просторові коливання рухомої рами 1 і встановленої на ній форми 9, які її днищем та бортами передаються бетонній суміші, забезпечуючи її ущільнення.

Коливальну систему спростимо й умовно розглянемо процес взаємодії днища форми і бетонної суміші від нормальних горизонтально направлених коливань  $\Phi_y = \Phi \sin \omega t$  (рис. 2). При горизонтально направлених коливаннях віброустановки днище форми викликає в бетонній суміші дотичні напруження  $\tau$ , які залежить від величини зсувних деформацій в ущільнюваному шарі. Аналіз виконаних досліджень показує, що бетонна суміш має яскраво виражені анізотропні властивості і при зсувних

деформаціях поводитья як в'язке тіло. При цьому її динамічний модуль зсувних деформацій рівний  $G = 0,025 E$  [11, 12].

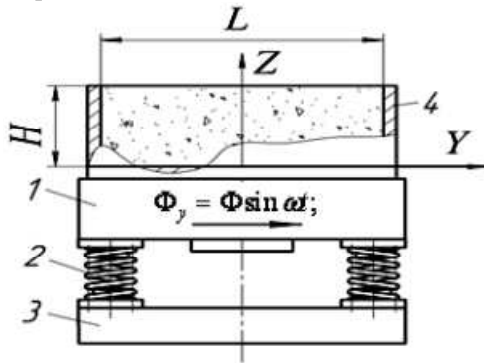


Рис. 2. Розрахункова схема динамічної системи «віброплощадка - бетонне середовище» при горизонтальному напрямленні коливань: 1 – рухома рама; 2 – пружні опори; 3 – нижня рама; 4 – форма з бетонною сумішшю

Зміну дотичних напружень від зсувних деформацій можна в першому наближенні описати наступною залежністю:

$$\tau = \eta_s \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z \partial t}. \quad (2)$$

Для визначення характеру взаємодії днища форми з ущільнюваною бетонною сумішшю при дії горизонтально направлених коливань досліджуємо динамічну систему «віброустановка – бетонне середовище», в якій ущільнювана суміш представлена у вигляді системи з розподіленими параметрами. При вивченні взаємодії бетонної суміші з днищем форми умовно не враховуватимемо взаємодію бетонної суміші з вертикальними стінками форми.

Диференціальне рівняння руху ущільнюваної суміші у напрямі координати  $Z$  за час  $t$  матиме вигляд:

$$\eta_s \frac{\partial^3 v(z, t)}{\partial z^2 \partial t} - \rho \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

де  $v$  – зсув бетонної суміші в горизонтальній площині;

$Z$  – поточна координата у вертикальному напрямі;

$\eta_s$  – коефіцієнт динамічної в'язкості при зсувних деформаціях [2]

$$\eta_s = \frac{a\rho H}{2(1 + \chi)}, \quad (4)$$

$a$  – фазова швидкість розповсюдження збудження в бетонній суміші;

$H$  – товщина ущільнюваного шару;

$\chi$  – коефіцієнт Пуассона.

Розв’язок хвильового рівняння руху відшукуватимемо за наступних граничних умов:

$$-m \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} - c_2 u(0,t) + \eta_s F_2 \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial z \partial t} = -\Phi \sin(\omega t); \quad (5)$$

$$\tau(H,t) = \eta_s \frac{\partial^2 v(H,t)}{\partial z \partial t} = 0, \quad (6)$$

де  $m$  – маса віброустановки;

$c_2$  – коефіцієнт жорсткості пружних опор у горизонтальному напрямі;

$\Phi$  – амплітуда збуджуючої сили;

$\omega$  – кутова частота вимушених коливань;

$F_2$  – площа взаємодії днища форми з бетонною сумішшю.

Розв’язок хвильового рівняння коливань (3) представимо у вигляді уявної частини комплексної функції

$$v(z,t) = I_m [V(z)e^{i\omega t}], \quad (7)$$

де  $V(z)$  – комплексна амплітуда коливань.

Знак  $I_m$  надалі відкидатимемо.

Підставляючи вираз (7) у рівняння (3), отримаємо рівняння для визначення комплексної амплітуди коливань  $V(z)$ :

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} + \frac{\rho\omega}{i\eta_c} V(z) = 0. \quad (8)$$

Розв’язок рівняння (8) знайдемо в наступному вигляді:

$$V(z) = D_1 e^{-i\tilde{k}_1 z} + D_2 e^{i\tilde{k}_1 z}, \quad (9)$$

де  $D_1$  і  $D_2$  – постійні інтегрування (комплексні амплітуди), визначувані граничними умовами (5) і (6);

$\tilde{k}_1$  – хвильове число

$$\tilde{k}_1 = \sqrt{\frac{\rho\omega}{i\eta_s}}. \quad (10)$$

Представимо хвилеве число  $\tilde{k}_1$  у вигляді наступного виразу:

$$\tilde{k}_1 = k_1 - ia_1 = \frac{\omega}{a_1} - ia_1, \quad (11)$$

де  $k_1$  – хвилеве число  $k_1 = \frac{\omega}{a_1}$ ;

$\omega$  – фазова швидкість розповсюдження зсувних деформацій в ущільнюваному шарі;

$a_1$  – коефіцієнт загасання збудження.

Привіняємо вираз (10) і (11), зведемо ліву й праву частини в квадрат та, виділяючи відповідно речову і уявну частини виразу, знайдемо

$$k_1 = \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\eta_s}}; \quad a_1 = k_1; \quad (12)$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{2\eta_s\omega}{\rho}}. \quad (13)$$

На підставі залежностей (12) і (13) вираз (9) набуде вигляду:

$$v(z, t) = [ D_1 e^{-(a_1 + ik_1)z} + D_2 e^{(a_1 + ik_1)z} ]. \quad (14)$$

Використовуючи вираз (7) і (14), знайдемо розв'язок рівняння (8):

$$v(z, t) = [ D_1 e^{-(a_1 + ik_1)z} + D_2 e^{(a_1 + ik_1)z} ] e^{i\omega t}. \quad (15)$$

Підставляючи отриманий розв'язок (15) у граничну умову (6), знайдемо співвідношення між комплексними амплітудами  $D_1$  і  $D_2$ :

$$D_1 = D_2 \frac{e^{(a_1 + ik_1)H}}{e^{-(a_1 + ik_1)H}}. \quad (16)$$

Підставляючи отриману залежність (16) у вираз (15), отримаємо розв'язок рівняння (8) в наступному вигляді:

$$v(z, t) = D_2 \frac{e^{(a_1 + ik_1)(H-z)} + e^{-(a_1 + ik_1)(H-z)}}{e^{-(a_1 + ik_1)H}} e^{i\omega t}. \quad (17)$$

Звідси, для хвилі що розповсюджується в позитивному напрямі, знайдемо розв'язок рівняння (8) в наступному вигляді:

$$v(z, t) = D_2 \frac{e^{(a_1 + ik_1)(H-z)}}{e^{-(a_1 + ik_1)H}} e^{i\omega t}. \quad (18)$$

Підставляючи вираз (18) у граничну умову (5), знайдемо:

$$D_2 = \frac{\Phi e^{-(a_1+ik_1)H}}{\{[(c_2 - m\omega^2) - k_1\eta_s\omega F_2 H] + ia_1\eta_s\omega F_2 H\} e^{(a_1+ik_1)H}}. \quad (19)$$

Помножимо чисельник і знаменник виразу (19) на комплексне число, зпряжене комплексному числу знаменника. Отримаємо:

$$D_2 = \frac{\Phi e^{-(a_1+ik_1)H} \{[(c_2 - m\omega^2) - k_1\eta_s\omega F_2 H] - ia_1\eta_s\omega F_2 H\}}{\{[(c_2 - m\omega^2) - k_1\eta_s\omega F_2 H]^2 + (a_1\eta_s\omega F_2 H)^2\} e^{(a_1+ik_1)H}}. \quad (20)$$

Аналіз знаменника отриманої залежності (20) для комплексної амплітуди

$$D_2 \text{ показує, що вираз } k_1\eta_s\omega FH = \frac{\eta F_2 H \omega^2}{a_1} \text{ є інерційною силою}$$

бетонної суміші, а вираз  $a_1\eta_s\omega F_2 H$  силу непружного опору. При цьому приведена маса бетонної суміші при зсувних деформаціях може бути визначена з наступної залежності:

$$m_\tau = \frac{\eta_s F_2 H}{a_1}, \quad (21)$$

а коефіцієнт непружного опору із залежності:

$$b_\tau = a_1\eta_s F_2 H. \quad (22)$$

На підставі (21) і (22) вираз (20) перетворимо до вигляду:

$$D_2 = \frac{\Phi e^{-(a_1+ik_1)H} \{[c_2 - (m + m_\tau)\omega^2] - ib_\tau\omega\}}{\{[c_2 - (m + m_\tau)\omega^2]^2 + (b_\tau\omega)^2\} e^{(a_1+ik_1)H}}. \quad (23)$$

Підставляючи вираз (23) в залежність (18), знайдемо зв'язок рівняння (3), що задовольняє граничним умовам (5) і (6):

$$v(z, t) = \frac{\Phi e^{-(a_1+ik_1)z} \{[c_2 - (m + m_\tau)\omega^2] - ib_\tau\omega\}}{[c_2 - (m + m_\tau)\omega^2]^2 + (b_\tau\omega)^2} e^{i\omega t}. \quad (24)$$

Виділяючи з отриманого виразу (24) уявну частину комплексного числа, отримаємо після перетворень зв'язок хвильового рівняння (3), що задовольняє граничним умовам (5) і (6) в наступному вигляді:

$$v(z, t) = \Phi e^{-a_1 z} \frac{\cos k_1 z \sin(\omega t - \phi) - \sin k_1 z \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{[c_2 - (m + m_\tau)\omega^2]^2 + (b_\tau\omega)^2}}, \quad (25)$$

$$\text{де } \phi - \text{кут зсуву фаз, } \phi = \arctg \frac{b_\tau\omega}{c_2 - (m + m_\tau)\omega^2}. \quad (26)$$

Отриманий вираз (25) описує закон коливань динамічної системи «рухома рама – ущільнюване середовище». При  $z = 0$  маємо коливання рухомої рами віброустановки, при  $z > 0$  – рух бетонної суміші, а при  $z = H$  – рух верхнього шару суміші:

$$v(0, t) = A_0 \tau \sin(\omega t - \phi); \quad (27)$$

$$v(z, t) = A_0 \tau e^{-a_1 z} \sin(\omega t - \phi - k_1 z); \quad (28)$$

$$v(H, t) = A_0 \tau e^{-a_1 H} \sin(\omega t - \phi - k_1 H), \quad (29)$$

де  $A_0$  – амплітуда коливань рухомої рами віброустановки в горизонтальному напрямі

$$A_0 = \frac{\Phi}{\sqrt{[c_2 - (m + m_\tau)\omega^2]^2 + (b_\tau \omega)^2}}. \quad (30)$$

Дотичне напруження, яке виникає в ущільнюваній бетонній суміші визначиться при підстановці виразу (30) в рівність (2):

$$\tau(z, t) = -A_0 \eta_s \omega \sqrt{a_1^2 + k_1^2} e^{-a_1 z} \cos(\omega t - \phi_1 - k_1 z), \quad (31)$$

$$\text{Де } \phi_1 = \phi - \arctg \frac{k_1}{a_1}. \quad (32)$$

Напруження у основі ущільнюваного шару і на його поверхні:

$$\tau(0, t) = -A_0 \eta_s \omega \sqrt{a_1^2 + k_1^2} \cos(\omega t - \phi_1); \quad (33)$$

$$\tau(H, t) = -A_0 \eta_s \omega \sqrt{a_1^2 + k_1^2} e^{-a_1 H} \cos(\omega t - \phi_1 - k_1 H). \quad (34)$$

Зміна величини середнього дотичного напруження в ущільнюваному шарі бетонної суміші залежно від часу  $t$ :

$$\begin{aligned} \tau_{\text{сеп}}(t) &= \frac{1}{H} \int_0^H \tau(z, t) dz = \\ &= \frac{A_0 \eta_s \omega}{H} \sqrt{(1 - e^{-a_1 H} \cos k_1 H)^2 + \sin^2 k_1 H} \cos(\omega t - \phi + \theta_2), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{де } \theta_2 = \arctg \frac{\sin k_1 H}{1 - e^{-a_1 H} \cos k_1 H}. \quad (36)$$

Амплітуда середнього дотичного напруження, яке виникає в ущільнюваному шарі бетонної суміші в горизонтальному напрямі при зсувних деформаціях, викликана горизонтальними коливаннями рухомої рами віброустановки, визначиться з виразу (35), тобто



$$\tau_{0\text{сеп}} = -\frac{A_0 \eta_s \omega}{H} \sqrt{(1 - e^{-a_1 H} \cos k_1 H)^2 + \sin^2 k_1 H} \quad (37)$$

**Висновки:**

1. На основі теоретичних досліджень динамічної системи «віброустановка – ущільнюване середовище», в якій останнє представлене у вигляді системи з розподіленими параметрами, розроблена фізико-математична модель, що дозволяє визначити дисипативні й інерційні сили, що діють з боку суміші на днище форми при просторових коливаннях вібраційної установки.

2. Отримані теоретичні залежності дозволяють встановити закон руху бетонної суміші і віброустановки, визначити основні параметри віброустановки і раціональні режими вібраційної дії на бетонну суміш.

1. Нестеренко М.П. Вібраційні площадки з просторовими коливаннями для виготовлення залізобетонних виробів широкої номенклатури / М.П. Нестеренко // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво). – Полтава: ПолтНТУ, 2005. – Вип. 16. – С. 177–181. 2. Ахвердов И.Н. Основы физики бетона / И.Н. Ахвердов. – М.: Стройиздат, 1981. – 464 с. 3. Гусев Б.В. Вибрационная технология бетона / Б.В. Гусев, В.Г. Зазимко. – К.: Будівельник, 1991. – 160 с. 4. Десов А.Е. Вибрированный бетон. – М.: Госстройиздат, 1956. – 230 с. 5. Гольдштейн Б.Г. Глубинные вибраторы для уплотнения бетона / Б.Г. Гольдштейн, Л.П. Петрунькин. – М.: Машиностроение, 1966. – 169 с. 6. Овчинников П. Ф. Виброреология. / П.Ф. Овчинников. – К.: Наукова думка, 1983. – 272 с. 7. Сивко В.И. Основы механики вибрируемой бетонной смеси / В. И. Сивко. – К.: Высш. шк., 1987. – 168 с. 8. Олехнович К.А. Исследования характера многокомпонентных колебаний малозумных виброплощадок / К.А. Олехнович, Ю.И. Виноградов. – Полтава: ПИСИ, 1980. – 13 с. 9. Орисенко О.В. Дослідження просторового руху робочого органа вібраційної машини для формування трубчастих залізобетонних виробів / О.В. Орисенко, М.П. Нестеренко // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво). – Полтава: ПолтНТУ, 2000. – Вип. 6, частина 1. – С.172 – 175. 10. Маслов А.Г. Вибрационные машины и процессы в дорожном строительстве /А.Г. Маслов, В.М. Пономарь // К.:Будівельник, 1985. – 128 с. 11. Файвусович А.С. Реологические свойства бетонных смесей при ударных и ударно-вибрационных воздействиях / А.С. Файвусович, Ю.А. Зубов // Изв. вузов. Стр-во и архитектура, 1981, № 11, с. 68 – 71.