УДК 539.3/.6+624.04+519.17

УЗАГАЛЬНЕНІ СЕКТОРІАЛЬНІ КООРДИНАТИ ДЛЯ ДОВІЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ ТОНКОСТІННОГО СТЕРЖНЯ: РОЗРОБКА ЧИСЛОВОГО АЛГОРИТМУ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

ОБОБЩЕННЫЕ СЕКТОРИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ: РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ГРАФОВ

GENERALIZED SECTORIAL COORDINATES FOR AN ARBITRARY THIN-WALLED SECTION: NUMERICAL ALGORITHM DESIGN BASED ON THE GRAPH THEORY

Юрченко В. В. (Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ)

Юрченко В. В. (Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев)

Yurchenko Vitalina (Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture, Kyiv)

У статті розв’язується задача обчислення узагальнених сеторіальних координат для довільного перерізу тонкостінного стержня, що може складатися з декількох замкнених (зв’язаних та/або незв’язаних) контурів, а також із незамкнених ділянок. Поставлена задача вирішується з використанням математичного апарату теорії графів та теорії множин. Запропоновано детальний алгоритм, придатний для програмної реалізації в системах автоматизованого проектування тонкостінних стержневих систем.

В статье решается задача вычисления обобщенных секториальных координат для произвольного сечения тонкостенного стержня, состоящего из нескольких замкнутых (связанных и/или несвязанных) контуров, а также из незамкнутых участков. Сформулированная задача решается с использованием математического аппарата теории графов и теории множеств. Предложен детальный алгоритм, предназначенный для программной реализации в системах автоматизированного проектирования тонкостенных стержневых систем.

In this paper the problem of calculation the generalized sectorial coordinates for an arbitrary thin-walled section has been considered. Thin-walled section can consist of several closed (connected and/or disconnected) contours as well as of non-closed parts. Formulated task has been solved in terms of distribution factors using mathematical apparatus of the graph theory and the set theory. A detail numerical algorithm devoted to software implementation in computer-aided systems for thin-walled bar structures has been elaborated and presented.

Ключові слова: тонкостінний стержень, узагальнена секторіальна координата, потік дотичних зусиль, теорія графів, система автоматизованого проектування;
тонкостенный стержень, обобщенная секториальная координата, поток касательных усилий, теория графов, система автоматизированного проектирования;
thin-walled bars, generalized sectorial coordinate, shear flows, graph theory, computer-aided design.

Постановка задачі

Розглянемо задачу про обчислення значень узагальнених секторіальних координат для довільного перерізу тонкостінного стержня, в тому числі комбінованого профілю, що може складатися з декількох замкнених (зв'язаних та/або незв'язаних) контурів, а також із незамкнених ділянок. Ця задача розглянута і вирішена у праці відомого ученого В. І. Слівкера [6, 7] для загального випадку навантаження тонкостінного стержня.

Подальший розвиток досліджень з цього напрямку вимагає розробки детального алгоритму придатного для програмної реалізації в системах автоматизованого проектування тонкостінних стержневих систем. Такий алгоритм доцільно будувати з використанням математичного апарату теорії графів [2, 3, 8] та теорії множин.

У більшості робіт [4, 5, 9] теорія графів застосовувалась для обчислення геометричних характеристик перерізів тонкостінних стержнів комбінованого (відкрито-закритого) типу. Застосування теорії графів до аналізу тонкостінних стержнів із багатоконтурними перерізами описане у роботі Г. Алфано та ін. [1], але при цьому авторами не розглядалась проблема розподілу потоків дотичних зусиль вздовж замкнутих контурів перерізу.

Прийнята термінологія та система координат

Уведемо на площині прямокутну систему координат Декарта yOz, початок котрої помістимо в центр мас перерізу, положення якого вважатимемо відомим. Напрям даної системи координат співпадає з напрямом головних осей інерції перерізу uOv: напрям осі $y - y$ співпадає з напрямом осі $v - v$, напрям осі $z - z$ – з напрямом осі $u - u$. Розташування будь-якої точки в такій

системі координат однозначно визначається її координатами *y* і *z*.
Вважаємо відомими інтегральні геометричні характеристики перерізу: *A* – площа перерізу, I_y і I_z – моменти інерції перерізу відносно головних осей інерції, які співпадають з осями обраної Декартової системи координат; I_ω – секторіальний момент інерції; I_t – момент інерції при вільному крученні.
Переріз тонкостінного стержня довільної конфігурації описується набором точок перерізу $\mathbf{P} = \{\vec{p}_p = \{y_p, z_p\} \mid p = \overline{1, n_p}\}$ і набором сегментів перерізу $\mathbf{S} = \{\vec{s}_s = \{p_s^{st}, p_s^{end}\} \mid s = \overline{1, n_s}\}$, що з'єднують деякі дві точки. Вектор $\vec{p}_p$ містить інформацію про координати y_p і z_p деякої p-ї точки перерізу в глобальній Декартовій системі координат *yOz*, визначеній раніше (рис. 1).

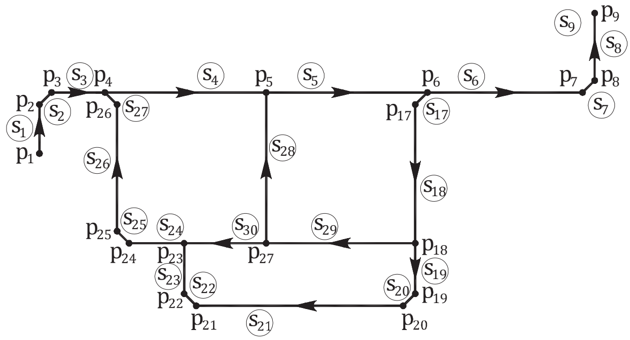

Рис. 1. Довільний переріз тонкостінного стержня, визначений на множині точок $\mathbf{P}$ та на множині сегментів $\mathbf{S}$ перерізу

Кожний сегмент перерізу $\vec{s}_s$ пов'язаний лише з двома точками перерізу (початковою $\vec{p}_{p_s^{st}} \subseteq \mathbf{P}$ і кінцевою $\vec{p}_{p_s^{end}} \subseteq \mathbf{P}$), отже кожний s-й сегмент перерізу $\vec{s}_s$ містить інформацію про порядкові номери початкової p_s^{st} та кінцевої p_s^{end} точок сегмента в масиві $\mathbf{P}$. Кожному сегментові перерізу відповідає визначена товщина сегменту $\boldsymbol{\delta} = \{\delta_s \mid s = \overline{1, n_s}\}$.
Множині точок перерізу $\mathbf{P}$ відповідає множина секторіальних координат перерізу $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_p \mid p = \overline{1, n_p}\}$, значення секторіальної координати в кожній точці перерізу покладаємо відомим.
Уведемо до розгляду також систему дугових координат. Помістимо початок відліку такої системи у деяку (в загальному випадку довільно обрану) точку перерізу. Кожній розглядуваній точці перерізу можна поставити у відповідність дугову координату ς, значення котрої приймається рівним геометричній довжині кривої, побудованої від початку відліку до розглядуваної точки вздовж контуру перерізу. Приймемо також угоду про те,

що зростанню дугової координати ς відповідає додатній напрям обходу контура перерізу.

Побудова зв'язаних графів, асоційованих з перерізом тонкостінного стержня

Переріз тонкостінного стержня довільної конфігурації зручно асоціювати з планарним зв'язаним неорієнтованим графом $\mathbf{G}_1$, що задається на множинах $\mathbf{G}_1 = \{\mathbf{V}_1, \mathbf{R}_1\}$, де $\mathbf{V}_1$ – скінчена множина вершин графа, а $\mathbf{R}_1$ – множина ребер графа або множина неупорядкованих пар на $\mathbf{V}_1$. При цьому, для кожного ребра $\mathbf{r}_1 = \{u_1, v_1\} \in \mathbf{R}_1$ покладаємо, що $u_1 \neq v_1$.

Вершини графа $\mathbf{G}_1$ асоціюються з усіма точками перерізу $\mathbf{P}$. Ребра графа $\mathbf{G}_1$ асоціюються з усіма сегментами перерізу $\mathbf{S}$. Таким чином, кількість вершин такого графа співпадає з кількістю точок перерізу n_p, а кількість ребер графа – з кількістю сегментів перерізу n_s.

Множина дугових координат $\boldsymbol{\varsigma} = \{\vec{\varsigma}_\kappa = \{\varsigma_\kappa^{start}, \varsigma_\kappa^{end}\} \mid \kappa = \overline{1, n_\varsigma - 1}\}$ призначена, фактично, для реалізації числового інтегрування вздовж контура перерізу тонкостінного стержня (наприклад, при визначенні геометричних характеристик перерізу і, відповідно, значень потоків дотичних напружень). Зауважимо, що дугові координати $\boldsymbol{\varsigma}$ є атрибутами кінців сегментів перерізу, та відповідно кінців ребер графа $\mathbf{G}_1$, тут κ – номер ребра графа (номер сегменту), $n_\varsigma - 1$ – кількість ребер графа (сегментів перерізу).

Призначення дугових координат $\boldsymbol{\varsigma}$, а також про відображення вихідних даних про переріз тонкостінного стержня на множину дугових координат детально описане у працях [10, 11]. Для кожного ребра графа $\mathbf{G}_1$ (сегмента перерізу) визначаються, $\forall \kappa = \overline{1, n_\varsigma - 1}$:

– секторіальні координати кінців сегменту:

$$\boldsymbol{\omega}^{\varsigma} = \left\{ \vec{\omega}_\kappa^{\varsigma} = \left\{ \omega_\kappa^{start}, \omega_\kappa^{end} \right\} \mid \omega_\kappa^{start}, \omega_\kappa^{end} \subseteq \boldsymbol{\omega} \right\};$$

– прирости секторіальних координат:

$$\boldsymbol{\Delta\omega}^{\varsigma} = \left\{ \Delta\omega_\kappa^{\varsigma} = \omega_\kappa^{\varsigma,end} - \omega_\kappa^{\varsigma,start} : \omega_\kappa^{\varsigma,end}, \omega_\kappa^{\varsigma,start} \in \boldsymbol{\omega}^{\varsigma} \right\};$$

– значення довжини сегменту, що однозначно визначаються координатами початкової та кінцевої точок сегмента:

$$\mathbf{l}^{\varsigma} = \{ l_\kappa^{\varsigma} = \Delta\varsigma = \sqrt{\left(\Delta y_\kappa^{\varsigma}\right)^2 + \left(\Delta z_\kappa^{\varsigma}\right)^2} \};$$

– значення товщини сегменту: $\boldsymbol{\delta}^{\varsigma} = \left\{ \delta_\kappa^{\varsigma} \subseteq \boldsymbol{\delta} \right\}$.

Переріз тонкостінного стержня довільної конфігурації також можна асоціювати з планарним зв'язаним неорієнтованим графом $\mathbf{G}_2$, що задається на множинах $\mathbf{G}_2 = \{\mathbf{V}_2, \mathbf{R}_2\}$, де $\mathbf{V}_2$ – скінчена множина вершин графа, а $\mathbf{R}_2$ – множина ребер графа. Вершини графа $\mathbf{G}_2$ асоціюються лише з *характерними точками перерізу*, котрими є:

1) точки перерізу, що належать більш, ніж двом сегментам:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{p}} = \left\{ \vec{p}_v \subseteq \mathbf{P} : \left(\exists\, \vec{s}_\alpha, \vec{s}_\beta, \vec{s}_\gamma \subseteq \mathbf{S} : v \in \vec{s}_\alpha, \vec{s}_\beta, \vec{s}_\gamma \right) \wedge \left(\alpha \neq \beta \neq \gamma \right) \right\} \ \forall v = \overline{1, n_v} \ ;$$

2) точки перерізу, що належать лише одному сегменту перерізу:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{p}}_{end} = \left\{ \vec{p}_g : \vec{p}_g \subseteq \mathbf{P} \wedge \exists!\ \vec{s}_\alpha \subseteq \mathbf{S} : g \in \vec{s}_\alpha \right\} \ \forall g = \overline{1, n_g} \ ;$$

тут n_v і n_g – кількість таких точок.

Кількість вершин графа $\mathbf{G}_2$ співпадає з кількістю характерних точок перерізу $n_v + n_g$. Ребра графа $\mathbf{G}_2$ асоціюються з ділянками перерізу, розташованими між характерними точками перерізу (з ділянками перерізу, що нерозгалужуються) (рис. 2).

Припускаємо також, що переріз тонкостінного стержня може містити у своїй топології деяку кількість замкнених контурів $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{p}} = \{\mathbf{\Gamma}^p_k \mid k = \overline{1, n_k}\}$, де n_k – кількість замкнених (таких, що не перетинаються) контурів у перерізі, $\mathbf{\Gamma}^p_k = \{\vec{p}_d : \vec{p}_d \subseteq \mathbf{P} \wedge \vec{p}_d \in \mathbf{\Gamma}_k \mid d = \overline{1, n_{p\Gamma k}}\}$. Кожний замкнений контур перерізу $\mathbf{\Gamma}^p_k$ асоціюється з циклом графа або кортежем вершин v^k_0, v^k_1, v^k_2, ..., v^k_n, таким що $v^k_i \mapsto v^k_{i+1} \forall i \Leftrightarrow \exists v^k_{i+1}$, n_k – кількість циклів графа.

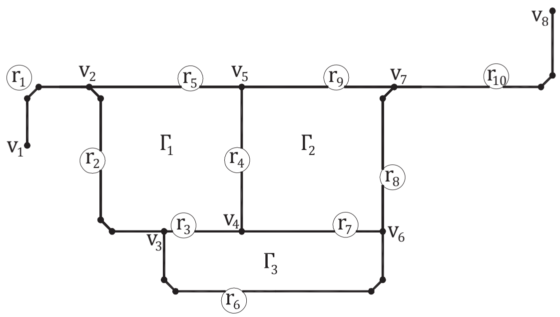

Рис. 2. Граф $\mathbf{G}_2$, що асоціюється з перерізом тонкостінного стержня (вершини графа – $v_1, v_2, \ldots, v_8$, ребра графа – $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$)

Зауважимо, що ребро графа $\mathbf{G}_2$, як правило, складаються з декількох сегментів перерізу, а отже повна інформація про деяке ребро $\mathbf{R}^\varsigma_j$ такого графа описується множиною сегментів перерізу з масиву сегментів $\mathbf{S}^\varsigma$, які входять до складу даного ребра графа: $\mathbf{R}^\varsigma_j = \{\vec{s}^{\,\varsigma}_r : \vec{s}^{\,\varsigma}_r \in \mathbf{S}^\varsigma \wedge \vec{s}^{\,\varsigma}_r \in \mathbf{R}_j \mid r = \overline{1, n_{\varsigma rj}}\}$, тут $n_{\varsigma rj}$ – кількість сегментів для j-го ребра графа. Множина всіх ребер графа, що визначена на множині сегментів $\mathbf{S}^{\varsigma}$, запишеться як $\mathbf{R}^{\varsigma} = \{\mathbf{R}_j^{\varsigma} \mid j = \overline{1, n_r}\}$.

Далі, кожний замкненией контур перерізу $\mathbf{\Gamma}_k^p$ (базисний цикл графа) однозначно описується множиною ребер графа з масиву $\mathbf{R}^{\varsigma}$, що належать даному контуру, $\mathbf{\Gamma}_k^{r\varsigma} = \{\mathbf{R}_j^{\varsigma} \mid j = \overline{1, n_{r\varsigma\Gamma_k}}\}$, де $n_{r\varsigma\Gamma_k}$ – кількість ребер перерізу, що належать k-му замкненому контуру перерізу. Крім цього, зручно в подальшому мати відображення деякого замкненого контура перерізу $\mathbf{\Gamma}_k^p$ на множину сегментів перерізу з масива $\mathbf{S}^{\varsigma}$, що належать даному замкненому контуру:

$$\mathbf{\Gamma}_k^{\varsigma} = \{\vec{s}_m^{\,\varsigma} : \left(\vec{s}_m^{\,\varsigma} \in \mathbf{S}^{\varsigma}\right) \wedge \left(\exists \mathbf{R}_\alpha^{\varsigma} \subseteq \mathbf{R}^{\varsigma} : \vec{s}_m^{\,\varsigma} \subseteq \mathbf{R}_\alpha^{\varsigma} \wedge \mathbf{R}_\alpha^{\varsigma} \subseteq \mathbf{\Gamma}_k^{r\varsigma}\right) \mid m = \overline{1, n_{\varsigma\Gamma_k}}\},$$

тут $n_{\varsigma\Gamma_k}$ – кількість сегментів перерізу, що належать k-му замкненому контуру перерізу.

Деякий замкнений контур перерізу (цикл графа) на множині ребер графа $\mathbf{R}^{\varsigma}$ і на множині сегментів перерізу $\mathbf{S}^{\varsigma}$ описується як $\mathbf{\Phi}^{r\varsigma} = \{\mathbf{\Gamma}_k^{r\varsigma} \mid k = \overline{1, n_k}\}$ і $\mathbf{\Phi}^{\varsigma} = \{\mathbf{\Gamma}_k^{\varsigma} \mid k = \overline{1, n_k}\}$ відповідно, де n_k – кількість замкнених контурів у перерізі (таких, що не перетинаються). Відмітимо, що ідентифікація замкнених контурів перерізу $\mathbf{\Phi}^{r\varsigma}$ легко здійснити за допомогою алгоритмів пошуку циклів на графі.

Оскільки кожне ребро графа $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$ описується множиною сегментів перерізу з масиву сегментів $\mathbf{S}^{\varsigma}$, тоді стає можливим для кожного сегмента $\vec{s}_\kappa^{\,\varsigma}$ перерізу тонкостінного стержня $\mathbf{S}^{\varsigma}$ визначити значення кусково-постійної *характеристичної функції сегмента* $\upsilon^{\varsigma}(\varsigma)$ у вигляді множини $\boldsymbol{\upsilon}^{\varsigma} = \{\upsilon_\kappa^{\varsigma} \mid \kappa = \overline{1, n_\varsigma - 1}\}$ як:

$$\begin{aligned} &\upsilon_\kappa^{\varsigma} = 1 \ \ \forall \kappa : \vec{s}_\kappa^{\,\varsigma} \in \mathbf{S}^{\varsigma} \wedge \vec{s}_\kappa^{\,\varsigma} \subseteq \mathbf{\Phi}^{\varsigma}; \\ &\upsilon_\kappa^{\varsigma} = 0 \ \forall \kappa : \vec{s}_\kappa^{\,\varsigma} \in \mathbf{S}^{\varsigma} \wedge \vec{s}_\kappa^{\,\varsigma} \bigcap \mathbf{\Phi}^{\varsigma} = \varnothing. \end{aligned} \tag{1}$$

Визначення коефіцієнтів розподілу потоків дотичних зусиль вздовж замкнених контурів перерізу

Вектор-стовпець коефіцієнтів $\mathbf{A}_k = \{\overline{a}_k \mid k = \overline{1, n_k}\}$ розподілу потоків дотичних зусиль вздовж замкнених контурів перерізу обчислюється як результат розв'язку системи алгебраїчних рівнянь, сформульованої у праці [7]. Детальний алгоритм формування та розв'язку системи цих рівнянь наведений у працях [10, 11]. З його використанням формуємо вектор-стовпець коефіцієнтів розподілу потоків дотичних зусиль вздовж ребер графа $\mathbf{G}_2$: $\mathbf{A}_r = \{a_j \mid j = \overline{1, n_r}\}$, де кожний елемент визначається як:

$$a_j = \sum_{k=1}^{n_k} f_{kj}\bar{a}_k\ ,\ \forall j = \overline{1, n_r}\ ,\ f_{kj} \in \mathbf{F}\ .$$

Оскільки кожне ребро графа $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$, $j = \overline{1, n_r}$, описується множиною сегментів перерізу з масиву $\mathbf{S}^{\varsigma}$ як $\mathbf{R}_j^{\varsigma}$, тоді стає можливим для кожного сегмента перерізу тонкостінного стержня $\mathbf{S}^{\varsigma}$ визначити значення кусково-постійної *функції розподілу потоків вздовж перерізу* [7] $a^{\varsigma}(\varsigma)$ у вигляді множини $\mathbf{a}^{\varsigma} = \{a_{\kappa}^{\varsigma} \mid \kappa = \overline{1, n_{\varsigma} - 1}\}$ як:

$$\begin{aligned} a_{\kappa}^{\varsigma} &= a_j\ \ \forall \kappa : \vec{s}_{\kappa}^{\,\varsigma} \cap \mathbf{\Phi}^{\varsigma} \neq \varnothing\ ; \\ a_{\kappa}^{\varsigma} &= 0\ \ \forall \kappa : \vec{s}_{\kappa}^{\,\varsigma} \cap \mathbf{\Phi}^{\varsigma} = \varnothing\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Таким чином, для сегментів перерізу значення функції розподілу потоків a_{κ}^{ς} приймається рівним значенню коефіцієнта розподілу потоків для відповідного ребра графа $\mathbf{G}_2$, якому належить розглядуваний сегмент $a_{\kappa}^{\varsigma} = a_j$.

Побудова епюри лінійної функції депланації: розробка числового алгоритму

Крутильна жорсткість усього перерізу тонкостінного стержня I_k обчислюється як:

$$I_k = \frac{1}{3}\sum_{\kappa=1}^{n_{\varsigma}-1} l_{\kappa}^{\varsigma}\left(\delta_{\kappa}^{\varsigma}\right)^3\ ;$$

тут сумування передбачено для всіх сегментів перерізу, під знаком суми – добуток довжини сегмента на куб його товщини.

Для кожного замкненого контуру перерізу $\mathbf{\Gamma}_k^{\varsigma}$, $k = \overline{1, n_k}$ визначимо внесок у крутильний момент інерції перерізу як:

$$I_{\Gamma k} = \frac{\Omega_k^2}{\sum\limits_{\kappa=1}^{n_{\varsigma\Gamma k}} \dfrac{a_{\kappa}^{\varsigma} l_{\kappa}^{\varsigma}}{\delta_{\kappa}^{\varsigma}}}, \forall \kappa : \vec{s}_{\kappa}^{\,\varsigma} \in \mathbf{\Gamma}_k^{\varsigma}\ . \tag{3}$$

тут Ω_k – подвоєна площа, яка охоплюється k-им замкненим контуром перерізу, що обчислюється без урахування товщин сегментів; $n_{\varsigma\Gamma k}$ – кількість сегментів перерізу для k-го замкненого контуру. У знаменнику формули (3) – сумування за кількістю сегментів перерізу, що належать k-му замкненому контуру перерізу. Сумується відношення довжини відповідного сегмента l_{κ}^{ς} до його товщини $\delta_{\kappa}^{\varsigma}$, помножене на значення функції розподілу потоків дотичних зусиль a_{κ}^{ς} (2). Зауважимо, що параметр $I_{\Gamma k}$ є атрибутом k-го замкненого контура.

Зауважимо, що значення параметра $I_{\Gamma k}$ $\forall k : k = \overline{1, n_k}$ є одинаковим для кожного замкненого контуру перерізу $\mathbf{\Gamma}_k^{\varsigma}$: $I_{\Gamma} = I_{\Gamma k}$ $\forall k : k = \overline{1, n_k}$.

Крутильний момент інерції перерізу I_x та параметри $\wp$ і D обчислюються як:

$$I_x = I_k + I_{\Gamma} = \frac{1}{3}\sum_{\kappa=1}^{n_\varsigma - 1} l_\kappa^\varsigma \left(\delta_\kappa^\varsigma\right)^3 + I_{\Gamma} ;$$

$$\wp = 1 - \frac{I_k}{I_x} ;$$

$$D = \frac{\wp I_x}{\Omega_0} = \frac{\wp I_x}{\sum\limits_{k=1}^{n_k} \Omega_k} = \frac{I_{\Gamma}}{\sum\limits_{k=1}^{n_k} \Omega_k} .$$

Для кожного сегмента перерізу необхідно визначити (побудувати) лінійну функцію депланації. Ця функція не має розривів у місцях спряження сегментів перерізу. Лінійна функція депланації для кожного сегменту будується за двома точками (значеннями цієї функції), обчисленими для відповідних кінців розглядуваного сегменту.

На множині дугових координат ς визначимо множину довжиною $n_\varsigma - 1$ (за кількістю сегментів перерізу) значень *функції депланації* $\alpha^\varsigma(\varsigma)$, що є атрибутами кінців сегментів перерізу $\boldsymbol{\alpha}^\varsigma = \{\vec{\alpha}_\kappa^\varsigma = \{\alpha_\kappa^{\varsigma,start}, \alpha_\kappa^{\varsigma,end}\} \mid \kappa = \overline{1, n_\varsigma - 1}\}$.

Для деякої ι-ї точки перерізу з дуговою координатою ς_ι значення функції депланації $\alpha^\varsigma(\varsigma)$ обчислюється як:

$$\alpha_\iota^\varsigma = \frac{\wp I_x}{\Omega_0} \int_{\varsigma_1 = 0}^{\varsigma_\iota} \frac{\upsilon(\varsigma) a(\varsigma)}{\delta(\varsigma)} d\varsigma - \int_{\varsigma_1 = 0}^{\varsigma_\iota} \rho d\varsigma ;$$

$$\alpha_\iota^\varsigma = \frac{\wp I_x}{\Omega_0} \sum_{\forall \ell_\varsigma \in [\varsigma_1 \ldots \varsigma_\iota]} \int_{\ell_\varsigma} \frac{\upsilon(\varsigma) a(\varsigma)}{\delta(\varsigma)} d\varsigma - \sum_{\forall \ell_\varsigma \in [\varsigma_1 \ldots \varsigma_\iota]} \int_{\ell_\varsigma} d\omega .$$

Тоді для кінців деякого κ-го сегмента перерізу з дуговими координатами ς_κ^{start} і ς_κ^{end} відповідно значення функції депланації $\alpha^\varsigma(\varsigma)$ визначається як:

$$\alpha_\kappa^{\varsigma,start} = \frac{\wp I_x}{\Omega_0} \sum_{i=1}^{\kappa-1} \int_{\varsigma_\kappa^{start}}^{\varsigma_\kappa^{end}} \frac{\upsilon(\varsigma) a(\varsigma)}{\delta(\varsigma)} d\varsigma - \sum_{i=1}^{\kappa-1} \int_{\varsigma_\kappa^{start}}^{\varsigma_\kappa^{end}} d\omega = \frac{\wp I_x}{\Omega_0} \sum_{i=1}^{\kappa-1} \frac{\upsilon_i^\varsigma a_i^\varsigma}{\delta_i^\varsigma} \int_{\varsigma_\kappa^{start}}^{\varsigma_\kappa^{end}} d\varsigma - \sum_{i=1}^{\kappa-1} \omega \Big|_{\varsigma_\kappa^{start}}^{\varsigma_\kappa^{end}} ;$$

$$\alpha_\kappa^{\varsigma,start} = \frac{\wp I_x}{\Omega_0} \sum_{i=1}^{\kappa-1} \frac{\upsilon_i^\varsigma a_i^\varsigma l_i^\varsigma}{\delta_i^\varsigma} - \sum_{i=1}^{\kappa-1} \Delta\omega_i^\varsigma ;$$

$$\alpha_\kappa^{\varsigma,end} = \frac{\wp I_x}{\Omega_0} \sum_{i=1}^{\kappa} \int_{\varsigma_\kappa^{start}}^{\varsigma_\kappa^{end}} \frac{\upsilon(\varsigma) a(\varsigma)}{\delta(\varsigma)} d\varsigma - \sum_{i=1}^{\kappa} \int_{\varsigma_\kappa^{start}}^{\varsigma_\kappa^{end}} d\omega = \frac{\wp I_x}{\Omega_0} \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\upsilon_i^\varsigma a_i^\varsigma}{\delta_i^\varsigma} \int_{\varsigma_\kappa^{start}}^{\varsigma_\kappa^{end}} d\varsigma - \sum_{i=1}^{\kappa} \omega \Big|_{\varsigma_\kappa^{start}}^{\varsigma_\kappa^{end}} ;$$

$$\alpha_\kappa^{\varsigma,end} = \frac{\wp I_x}{\Omega_0} \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\upsilon_i^\varsigma a_i^\varsigma l_i^\varsigma}{\delta_i^\varsigma} - \sum_{i=1}^{\kappa} \Delta\omega_i^\varsigma .$$

Значення функції депланації $\alpha_{\kappa}^{\varsigma,start}$ і $\alpha_{\kappa}^{\varsigma,end}$ є атрибутами кінців сегментів перерізу. Обчислення значень функції депланації здійснюється при виконанні фіксованого (єдиного) обходу контуру перерізу в напрямку нарощування дугових координат кінців сегментів. Нижче пропонується алгоритм обчислення значень функції депланації.

Крок 1. Для початку деякого κ-го сегменту перерізу, якому належить початкове значення дугової координати $\varsigma = 0$ (фактично звідки починається обхід контуру перерізу):

$$\alpha_{\kappa}^{\varsigma,start} = 0 .$$

Крок 2. Для кінця того самого κ-го сегменту перерізу, в тому випадку, коли даний сегмент належить хоча б одному замкненому контуру:

$$\alpha_{\kappa}^{\varsigma,end} = \alpha_{\kappa}^{\varsigma,start} + D\frac{\upsilon_{\kappa}^{\varsigma} a_{\kappa}^{\varsigma} l_{\kappa}^{\varsigma}}{\delta_{\kappa}^{\varsigma}} - \Delta\omega_{\kappa}^{\varsigma} ;$$

тут l_{κ}^{ς} – довжина розглядуваного сегменту перерізу, $\delta_{\kappa}^{\varsigma}$ – його товщина, $\Delta\omega_{\kappa}^{\varsigma}$ – приріст секторіальної координати для даного сегменту, обчислений у напрямку нарощування дугової координати; a_{κ}^{ς} – константа, коефіцієнт розподілу потоків (2); $\upsilon_{\kappa}^{\varsigma}$ –значення кусково-постійної характеристичної функції сегмента $\upsilon^{\varsigma}(\varsigma)$ (1).

Таким чином, для тих сегментів перерізу, які не належать жодному замкненому контуру $\vec{s}_{\kappa}^{\varsigma} \in \mathbf{S}^{\varsigma} \wedge \vec{s}_{\kappa}^{\varsigma} \bigcap \mathbf{\Phi}^{\varsigma} = \varnothing$, $\upsilon_{\kappa}^{\varsigma} = 0$, перший доданок $D\frac{\upsilon_{\kappa}^{\varsigma} a_{\kappa}^{\varsigma} l_{\kappa}^{\varsigma}}{\delta_{\kappa}^{\varsigma}} = 0$. З врахуванням цього значення функції депланації для кінця κ-го сегменту, що не належить жодному замкнутому контуру:

$$\alpha_{\kappa}^{\varsigma,end} = \alpha_{\kappa}^{\varsigma,start} - \Delta\omega_{\kappa}^{\varsigma} .$$

Крок 3. При переході до наступного μ-го сегменту, його початку співставляється значення функції депланації, обчислене для кінця суміжного з ним κ-го сегмента:

$$\alpha_{\mu}^{\varsigma,start} = \alpha_{\kappa}^{\varsigma,end} .$$

Крок 4. Повернення до кроку 2 із заменою $\kappa \leftarrow \mu$. А саме, для кінця того ж μ-го сегмента, у тому випадку, якщо даний сегмент належить хоча б одному замкненому контуру:

$$\alpha_{\mu}^{\varsigma,end} = \alpha_{\mu}^{\varsigma,start} + D\frac{a_{\mu}^{\varsigma} l_{\mu}^{\varsigma}}{\delta_{\mu}^{\varsigma}} - \Delta\omega_{\mu}^{\varsigma} ;$$

для кінця того ж μ-го сегмента, у тому випадку, коли даний сегмент не належить жодному із замкнених контурів перерізу:

$$\alpha_{\mu}^{\varsigma,end} = \alpha_{\mu}^{\varsigma,start} - \Delta\omega_{\mu}^{\varsigma} .$$

Значення лінійної функції депланації для початку і кінця кожного сегменту

перерізу дають можливість побудувати її епюру для усього перерізу. У подальшому вона знадобиться для інтегрування з метою визначення узагальнених параметрів перерізу.
Для кожного κ-го сегменту перерізу з множини $\mathbf{S}^{\varsigma}$ визначимо приріст значення функції депланації $\alpha^{\varsigma}(\varsigma)$ у вигляді множини, $\forall\kappa=\overline{1,n_{\varsigma}-1}$:

$$\mathbf{\Delta\alpha}^{\varsigma}=\left\{\Delta\alpha_{\kappa}^{\varsigma}=\alpha_{\kappa}^{\varsigma,end}-\alpha_{\kappa}^{\varsigma,start}\mid\alpha_{\kappa}^{\varsigma}\left\{\alpha_{\kappa}^{\varsigma,start},\alpha_{\kappa}^{\varsigma,end}\right\}\subseteq\mathbf{\alpha}^{\varsigma}\right\}.$$

Обчислення узагальнених секторіальних координат довільного перерізу тонкостінного стержня: розробка числового алгоритму

Визначимо множину довжиною $n_{\varsigma}-1$ (за кількістю сегментів перерізу або за кількістю ребер графа $\mathbf{G}_1$) значень узагальненого параметра $\bar{\mathbf{\omega}}_0=\left\{\bar{\omega}_{0,\kappa}\right\}$, $\forall\kappa=\overline{1,n_{\varsigma}-1}$, що є атрибутом сегментів перерізу, як:

$$\bar{\omega}_{0,\kappa}=\frac{\delta_{\kappa}^{\varsigma}}{A}\int_{\ell_{\varsigma}}\alpha^{\varsigma}(\varsigma)\,d\varsigma=\frac{\delta_{\kappa}^{\varsigma}}{A}\int_{\varsigma_{\kappa}^{start}}^{\varsigma_{\kappa}^{end}}\alpha^{\varsigma}(\varsigma)\,d\varsigma=\frac{\delta_{\kappa}^{\varsigma}l_{\kappa}^{\varsigma}}{A}\left(\alpha_{\kappa}^{\varsigma,start}+\frac{1}{2}\Delta\alpha_{\kappa}^{\varsigma}\right);$$

тут l_{κ}^{ς}, $\delta_{\kappa}^{\varsigma}$ – довжина і товщина κ-го сегмента перерізу, $l_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{l}^{\varsigma}$, $\delta_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{\delta}^{\varsigma}$; $\alpha_{\kappa}^{\varsigma,start}$ – значення функції депланації на початку сегмента, $\vec{\alpha}_{\kappa}^{\varsigma}=\left\{\alpha_{\kappa}^{\varsigma,start},\alpha_{\kappa}^{\varsigma,end}\right\}\subseteq\mathbf{\alpha}^{\varsigma}$; $\Delta\alpha_{\kappa}^{\varsigma}$ – приріст функції депланації для κ-го сегмента, $\Delta\alpha_{\kappa}^{\varsigma}\in\mathbf{\Delta\alpha}^{\varsigma}$; A – площа перерізу.
Визначимо множину узагальненого параметра $\mathbf{\omega}_0^{\varsigma}=\left\{\vec{\omega}_{0,\kappa}^{\varsigma}=\left\{\omega_{0,\kappa}^{\varsigma,start},\omega_{0,\kappa}^{\varsigma,end}\right\}\mid\kappa=\overline{1,n_{\varsigma}-1}\right\}$ на множині дугових координат ς.
Для деякої ι-ї точки перерізу з дуговими координатами ς_{ι} значення узагальненого параметра $\omega_{0,\iota}^{\varsigma}$ визначається як:

$$\omega_{0,\iota}^{\varsigma}=\frac{1}{A}\int_{\varsigma_1=0}^{\varsigma_{\iota}}\alpha^{\varsigma}(\varsigma)\delta^{\varsigma}(\varsigma)\,d\varsigma=\frac{1}{A}\sum_{\forall\ell_{\varsigma}\in[\varsigma_1\ldots\varsigma_{\iota}]}\int_{\ell_{\varsigma}}\alpha^{\varsigma}(\varsigma)\delta^{\varsigma}(\varsigma)\,d\varsigma=\frac{1}{A}\sum_{\kappa=1}^{\iota}\delta_{\kappa}^{\varsigma}\int_{\varsigma_{\kappa}^{start}}^{\varsigma_{\kappa}^{end}}\alpha^{\varsigma}(\varsigma)\,d\varsigma.$$

Тоді для кінців деякого κ-го сегменту перерізу з дуговими координатами $\varsigma_{\kappa}^{start}$ і ς_{κ}^{end} відповідно значення узагальненого параметра визначається як:

$$\omega_{0,\kappa}^{\varsigma,start}=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{\kappa-1}\delta_i^{\varsigma}l_i^{\varsigma}\left(\alpha_i^{\varsigma,start}+\frac{1}{2}\Delta\alpha_i^{\varsigma}\right);$$

$$\omega_{0,\kappa}^{\varsigma,end}=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{\kappa}\delta_i^{\varsigma}l_i^{\varsigma}\left(\alpha_i^{\varsigma,start}+\frac{1}{2}\Delta\alpha_i^{\varsigma}\right).$$

Значення узагальненого параметра обчислюються і співставляються з кінцями сегментів перерізу. Обчислення значень відбувається при здійсненні фіксованого (єдиного) обходу перерізу у такий спосіб, щоби дугова координата кінців сегментів перерізу завжди зростала.

Обчислення значень узагальненого параметру пропонується виконувати відповідно до алгоритму, наведеного нижче.

Крок 1. Для початку деякого κ-го сегмента з початковим значенням дугової координати $\varsigma = 0$ (фактично для точки перерізу, звідки розпочинається обхід перерізу):

$$\omega_{0,\kappa}^{\varsigma,start} = 0 .$$

Крок 2. Для кінця того самого κ-го сегменту:

$$\omega_{0,\kappa}^{\varsigma,end} = \omega_{0,\kappa}^{\varsigma,start} + \bar{\omega}_{0,\kappa} ;$$

тут $\omega_{0,\kappa}^{\varsigma,start}$ – значення узагальненого параметра для початку розглядуваного сегмента, $\omega_{0,\kappa}^{\varsigma,start} \in \vec{\omega}_{0,\kappa}^{\varsigma} \subseteq \boldsymbol{\omega}_0^{\varsigma}$; $\bar{\omega}_{0,\kappa}$ – значення узагальненого параметра для сегменту вцілому, $\bar{\omega}_{0,\kappa} \in \bar{\boldsymbol{\omega}}_0$.

Крок 3. При переході до наступного μ-го сегменту, його початку співставляється значення узагальненого параметру, обчислене для кінця суміжного з ним κ-го сегмента:

$$\omega_{0,\mu}^{\varsigma,start} = \omega_{0,\kappa}^{\varsigma,end} .$$

Крок 4. Повернення до року 2 із заменою $\kappa \leftarrow \mu$. А саме, для кінця того самого μ-го сегмента:

$$\omega_{0,\mu}^{\varsigma,end} = \omega_{0,\mu}^{\varsigma,start} + \bar{\omega}_{0,\mu} .$$

Визначимо множину узагальнених секторіальних координат $\boldsymbol{\varpi}^{\varsigma} = \{\vec{\varpi}_{\kappa}^{\varsigma} = \{\varpi_{\kappa}^{\varsigma,start}, \varpi_{\kappa}^{\varsigma,end}\} \mid \kappa = \overline{1, n_{\varsigma} - 1}\}$ (за кількістю сегментів перерізу). Узагальнена секторіальна координата, що співставляється деякому кінцю сегмента перерізу, визначається як:

$$\varpi_{\kappa}^{\varsigma} = \omega_{\kappa}^{\varsigma}, \text{ якщо } \vec{s}_{\kappa}^{\,\varsigma} \not\subseteq \boldsymbol{\Phi}^{\varsigma};$$

$$\varpi_{\kappa}^{\varsigma} = \omega_{0,\kappa}^{\varsigma} - \alpha_{\kappa}^{\varsigma}, \text{ якщо } \vec{s}_{\kappa}^{\,\varsigma} \subseteq \boldsymbol{\Phi}^{\varsigma};$$

Для кожного κ-го сегмента перерізу із множини $\mathbf{S}^{\varsigma}$ визначимо також прирости значень узагальненої секторіальної координати $\boldsymbol{\varpi}^{\varsigma}$ у вигляді множини:

$$\boldsymbol{\Delta\varpi}^{\varsigma} = \left\{ \Delta\varpi_{\kappa}^{\varsigma} = \varpi_{\kappa}^{\varsigma,end} - \varpi_{\kappa}^{\varsigma,start} \mid \varpi_{\kappa}^{\varsigma,start}, \varpi_{\kappa}^{\varsigma,end} \in \vec{\boldsymbol{\varpi}}^{\varsigma} \right\},\ \forall \kappa = \overline{1, n_{\varsigma} - 1} .$$

Отримані значення узагальнених секторіальних координат необхідні для обчислення значень дотичних напружень на гранях сегментів поперечного перерізу тонкостінного стержня довільної конфігурації.

Висновок: У статті розв'язується задача обчислення значень узагальнених секторіальних координат для довільного перерізу тонкостінного стержня, що може складатися з декількох замкнених (зв'язаних та/або незв'язаних) контурів, а також із незамкнених ділянок. Поставлена задача вирішується з використанням математичного апарату теорії графів та теорії множин.

Запропоновано детальний алгоритм, придатний для програмної реалізації в системах автоматизованого проектування тонкостінних стержневих систем.

1. Alfano, G. Automatic analysis of multicell thin-walled sections / G. Alfano, F. Marotti de Sciarra, L. Rosati // Computer and Structures. – #59. – 1996. – P. 641–55. **2.** Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 297 с. **3.** Кристофидес Н. Теория графов: алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978. – 430 с. **4.** Prokić A. Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open-closed section / A. Prokić // Computers and Structures. – #74. – 2000. – P. 705–715. **5.** Paz, M. Computer determination of the shear center of open and closed sections / M. Paz, C. P. Strehl, P. Schrader // Computer and Structures. – #6.– 1976. – P. 117–25. **6.** Perelmuter, A. V. Numerical Structural analysis. Methods, Models and Pitfalls / A. V. Perelmuter, V. I. Slivker. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, – 2003.
7. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы / В. И. Сливкер. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с. **8.** Tarjan, R. Depth-first search and linear graph algorithms / R. Tarjan // SIAM Journal Computing. – #1. – 1972. – P. 146–60. **9.** Yoo, C. H. Cross-sectional properties of thin-walled multi-cellular section / C. H. Yoo, V. S. Acra // Computer and Structures. – #22. – 1986. – P. 53–61. **10.** Юрченко В. В. Численное решение задачи о распределении касательных напряжений в сечений тонкостенного стержня произвольной конфигурации / В. В. Юрченко // Строительная механика и строительные конструкции: Сборник статей. – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2013. – С. 487 – 505. **11.** Юрченко В. В. Розподіл потоків дотичних зусиль вздовж замкнених контурів перерізу тонкостінного стержня: розробка числового алгоритму з використанням теорії графів / В. В. Юрченко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. Випуск 30. – Рівне, 2015. – С. 306–316.