

**СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ В ПК «ЛИРА» И ПРИ РАСЧЕТЕ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ**

**STATIC ANALYSIS OF A PLATE ON ELASTIC FOUNDATION WITH THE MODELING IN PC “LIRA” AND WITH THE CALCULATION BY VARIATIONAL-DIFFERENCE METHOD**

**Семенюк С.Д.**, д.т.н., проф. (Белорусско-Российский университет, г. Могилев, Республика Беларусь), **Козунова О.В.**, к.т.н. (Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь), **Кумашов Р.В.**, аспирант (Белорусско-Российский университет, г. Могилев, Республика Беларусь).

**Semenyuk S.D.**, doctor of technical sciences, professor (Belarusian-Russian University, Mogilev, Republic of Belarus), **Kozunova O.V.**, candidate of technical sciences (Belarussian state university of transport, Gomel, Republic of Belarus), **Kumashov R.V.**, postgraduate student (Belarusian-Russian University, Mogilev, Republic of Belarus).

Статический анализ плиты на упругом основании выполняется двумя способами на примере железобетонной дорожной плиты покрытия 2ПП30.18-30 серии Б3.503.1-1, предназначенной для временных дорог. Выполнен статический расчет плиты на ПК «ЛИРА». Также, плита рассчитана вариационно-разностным методом как конструкция на линейно-упругом неоднородном основании. При расчете в ПК «Ли́ра» рассматривается 6 вариантов загрузки (центральные и краевые); при расчете вариационно-разностным методом – только центральное нагружение. Приводятся результаты численных исследований в сопоставлении для двух вариантов расчетов.

Static analysis of a plate on elastic foundation is made in two ways on the example of a reinforced concrete road plate 2PP30.18-30 series B3.503.1-1 intended for temporary roads. The plate are calculated on the PC «LIRA». Also the plate are calculated by the variational-difference method like a construction on linearly elastic inhomogeneous foundation (in the form of criss-crossed reinforced concrete tapes). When setting up a contact problem, hypotheses and assumptions of the theory of elasticity and structural mechanics are used. The hypotheses of the theory of bending are valid for a plate. When the deformation energy functional is compiled, the work of the forces of the intrinsic weight of the elastic foundation is not taken into

account. In the contact zone, the equality of the displacements of the foundation to the deflections of the plate is valid. When calculating a layered elastic medium is replaced by a rectangular design area, which is approximated by a rectangular grid of finite dimensions. For unknowns are accepted vertical and horizontal movements of the nodes of the calculation area and reactive pressures (contact stresses) in the contact zone of the plate with the base. Based on the calculated values of nodal displacements the intensity of deformations and the intensity of stresses are identifying. When calculating in a PC «LIRA», 6 loading options are considered (central and edge). When calculating the variational-difference method, only central loading is considered. There are given the results of numerical studies in comparison to the two variants of calculations in this article.

**Ключевые слова:** статический расчет, железобетон, покрытие, плиты, исследования, упругое основание, вариационно-разностный метод.  
static calculation, reinforced concrete, coating, slabs, research, elastic foundation, variational-differencial method.

**Введение.** Задача о расчёте фундаментных и дорожных плит на упругом основании является одной из трудных задач строительной механики, главным образом из-за чрезвычайно неопределённых физических свойств грунтов основания. В силу природных особенностей территории Республики Беларусь основание многослойно (неоднородно) и его неоднородность может усиливаться наличием слабых полостей, биогенных включений и т.д. Неравномерные деформации основания и несимметричность приложения нагрузки приводят к возникновению в сечениях плит изгибающих и крутящих моментов, что отрицательно сказывается на эксплуатационных характеристиках данных плит.

**Численное моделирование в ПК «Ли́ра».** В программном комплексе (ПК) «Ли́ра» плита на упругом основании моделируется на примере железобетонной дорожной плиты покрытия 2ПП30.18-30 автомобильных дорог серии БЗ.503.1-1, предназначенной для временных дорог.

При постановке задачи использовались следующие гипотезы и допущения: в зоне контакта плиты с упругим основанием возникают только нормальные напряжения, силы трения пренебрежительно малы.

В расчет принимаются следующие упругие характеристики: для плиты – конечный элемент КЭ-41,  $E=31500 \text{ МПа}$ ,  $\nu=0,167$ ,  $H=0,17\text{м}$ ; для слоистого основания в каждом упругом слое – конечный элемент КЭ-36, модуль упругости  $E_0$  и коэффициент Пуассона  $\nu_0$  в соответствии с таблицей 1. На рисунке 1 приведена расчетная модель плиты в ПК «Ли́ра».

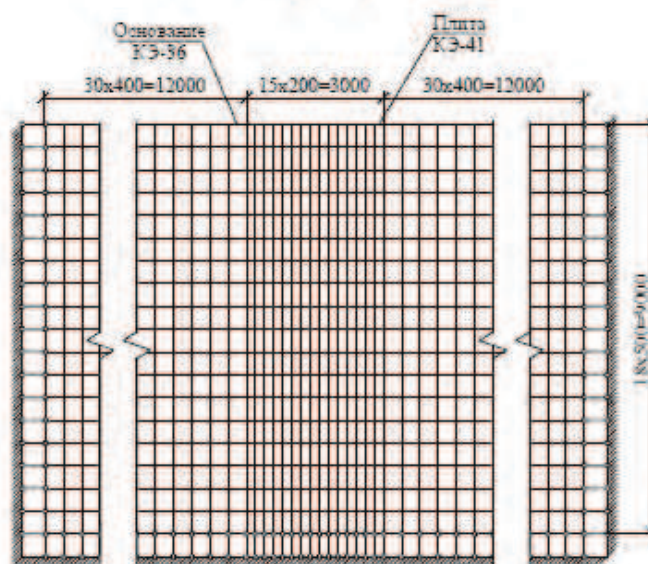
Таблица 1

## Характеристики грунтов при моделировании ПК «Ли́ра»

Номер слоя	Тип грунта	Мощность слоя, м	$q_s$ МПа	$E_0$ МПа	$\nu$
1	Песок мелкий	1	0,5	4,0	0,3
2		0,5	4,9	19,8	
3		1,0	16,5	44,4	
4		1,0	10,9	32,7	
5		1,5	6,0	22,0	
6		2,0	7,0	24,0	
7		1,0	6,1	22,2	
8		1,0	11,7	35,0	

Размеры расчетной области основания в продольном и поперечном направлениях составляют 18а и 18б соответственно, согласно рекомендациям [5]. Здесь а и б – полуширина плиты в продольном и поперечном направлениях. Глубина расчетной области основания составляет ба.

Разрез 1-1



Разрез 2-2

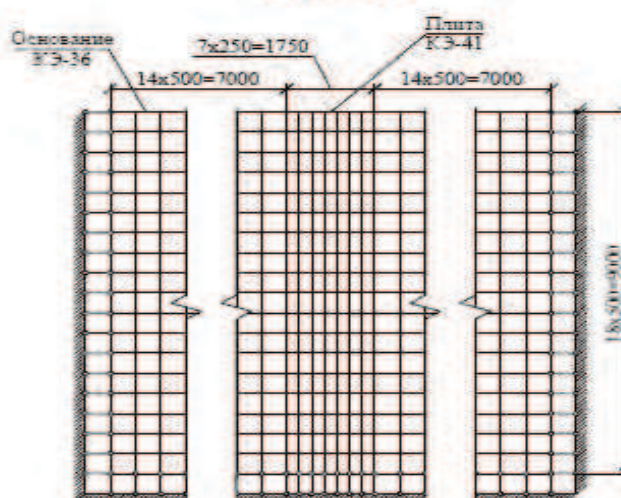
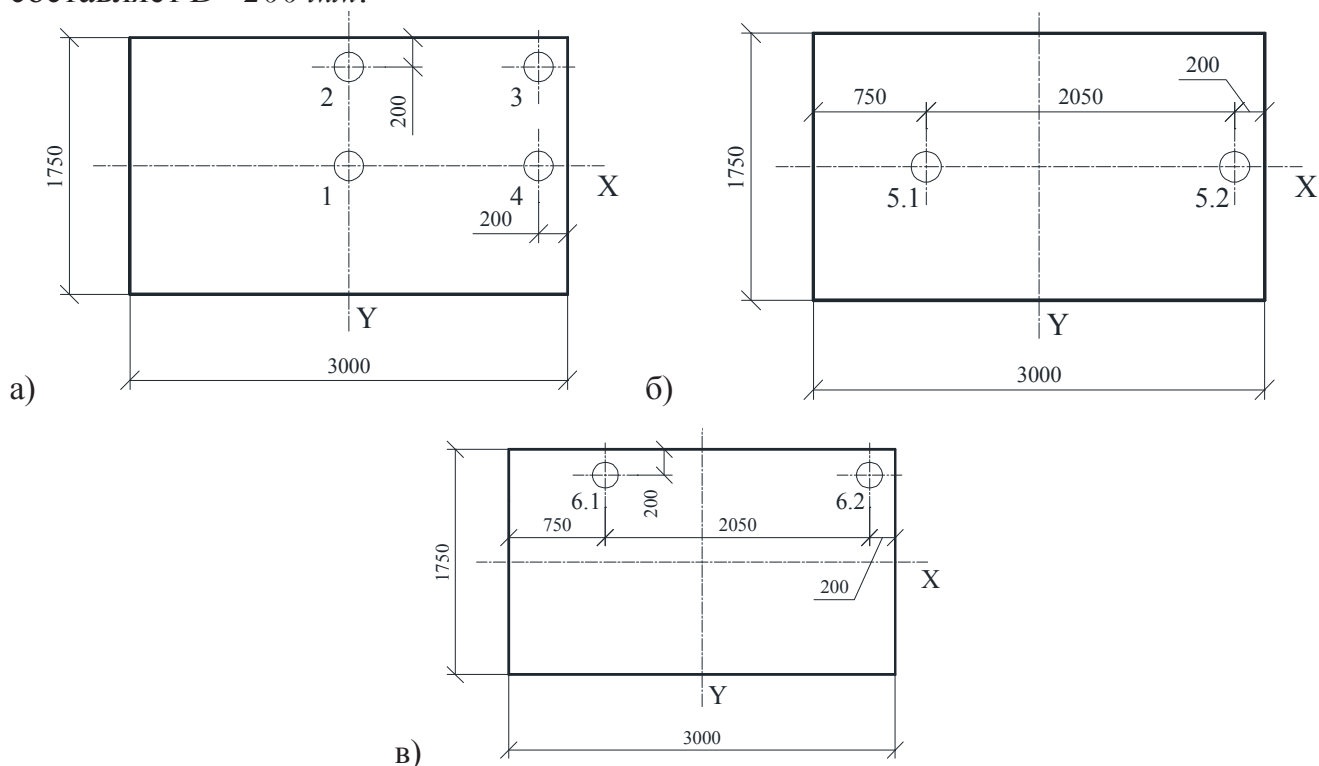


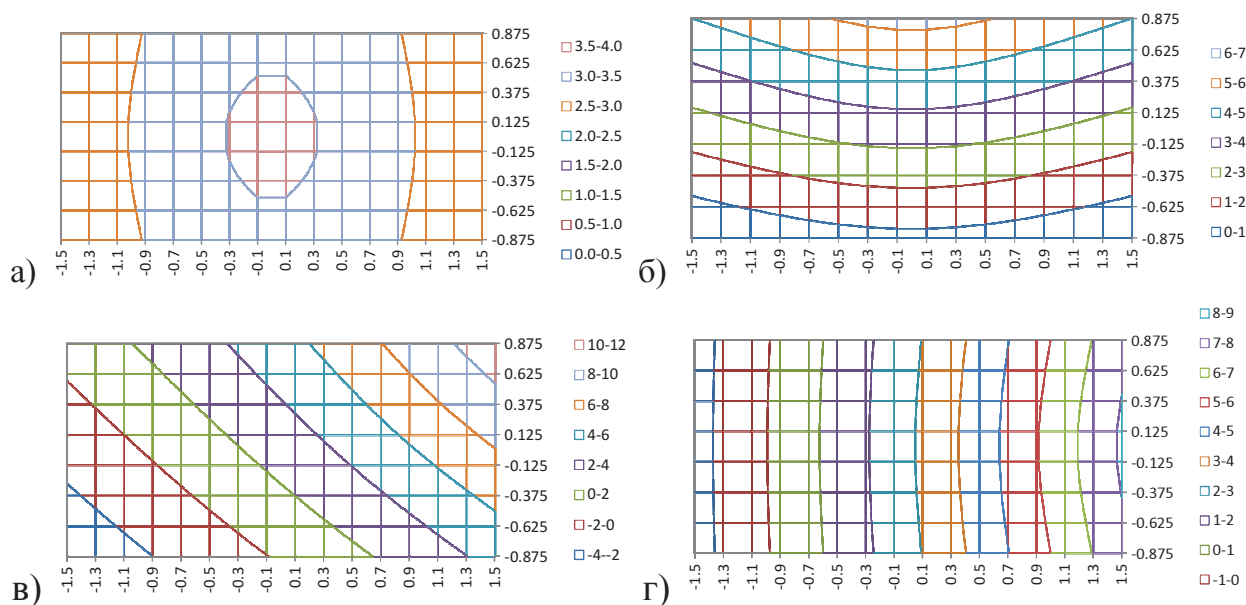
Рис. 1. Расчетная модель плиты в ПК «ЛИРА»

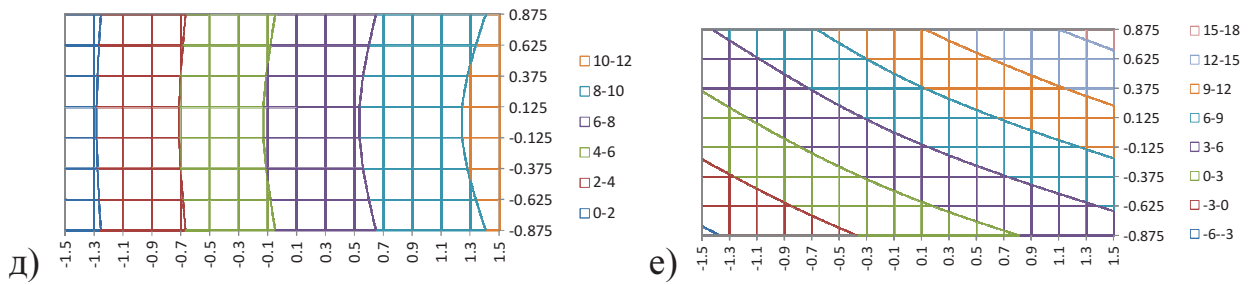
Для плиты было рассмотрено 6 вариантов загрузки. Нагрузка в каждой рассматриваемой точке составляет  $P=100$  кН. и пропорционально распределена по пяти элементам плиты. Диаметр зоны передачи нагрузки составляет  $D=200$  мм.



а – загрузки 1-4; б – загрузка 5; в – загрузка 6  
Рис. 2. –Варианты загрузки плиты при расчете в ПК «Лира»

Результаты статического расчета в ПК «Лира» приведены на рисунке 3.





а – загрузка 1; б – загрузка 2; в – загрузка 3; г – загрузка 4;  
 д – загрузка 5; е – загрузка 6

Рис. 3. Распределение осадок основания плиты при расчете в ПК «Лира»

**Численно-аналитическое моделирование вариационно-разностным методом (ВРМ).** Вариационно-разностным методом решается контактная задача линейной теории упругости (плоская деформация) для дорожной плиты, которая моделируется в виде перекрестных ж/б лент шириной 1м (рис. 4).

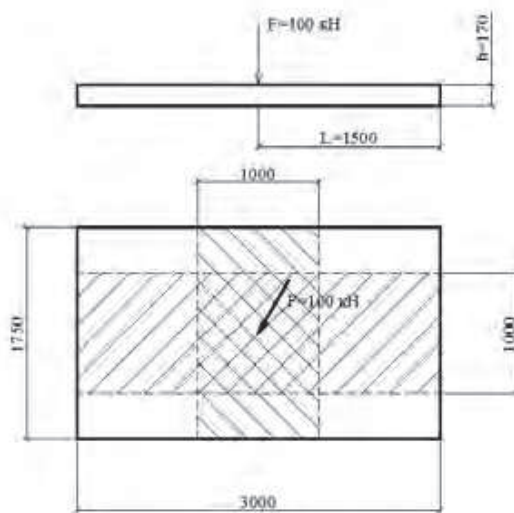


Рис. 4. Моделирование дорожной плиты перекрестными лентами

Каждая из перекрестных лент рассматривается как линейно упругая балочная плита на линейно-упругом неоднородном (многослойном) основании. Плита находится под действием сосредоточенной нагрузки (рис. 5). Параметры плиты: ширина  $2l$ , изгибная жесткость  $EJ$ .

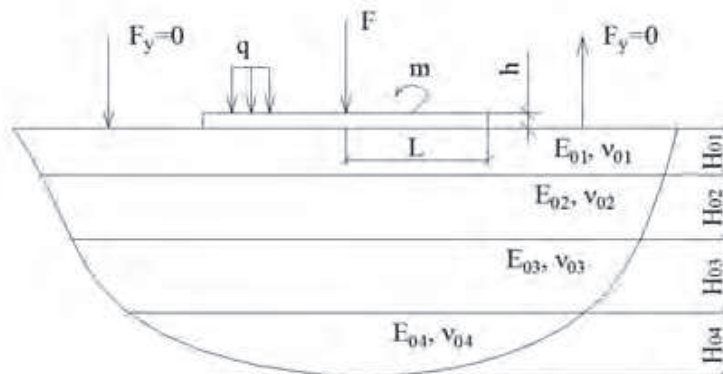


Рис. 5. Расчетная модель балочной плиты при расчете ВРМ

При постановке контактной задачи используются гипотезы и допущения теории упругости и строительной механики, для плиты справедливы гипотезы теории изгиба. При составлении функционала энергии деформаций не учитывается работа сил собственного веса упругого основания.

При расчете слоистая упругая среда заменяется прямоугольной расчетной областью, размеры которой: по оси  $X - R_0 = 10l$ ; по оси  $Y - H_0 = 4l$ , где  $H_0 = \sum H_{0i}$ , где  $i$  – номер упругого слоя. Расчетная область аппроксимируется прямоугольной сеткой конечных размеров с постоянным шагом по осям:  $X - \Delta x$ ,  $Y - \Delta y$ . Внешняя нагрузка на плиту  $q(x)$  приводится к центрально приложенной узловой силе (загружение 1).

Граничные условия задачи: на границах расчетной области перемещения  $u=0$ ,  $v=0$ ; в контактной зоне справедливо равенство перемещений основания прогибам плиты.

За неизвестные принимаются: вертикальные и горизонтальные перемещения узлов расчетной области  $u(x)$ ,  $v(x)$  и реактивные давления (контактные напряжения) в зоне контакта плиты с основанием.

Согласно вариационному принципу Лагранжа при нагружении плиты, расположенной на упругом основании, статической нагрузкой ее полная потенциальная энергия в состоянии равновесия принимает минимальное значение.

Функционал полной потенциальной энергии плиты на упругом основании состоит из трех слагаемых: энергии деформаций упругого основания (1), энергии деформаций изгиба балочной плиты (2) и потенциала внешней нагрузки (3):

$$U_f = \iint_S \left[ \begin{aligned} & \frac{E_k \nu_k}{2(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)} (\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)})^2 + \\ & + \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} ((\varepsilon_x^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2) + \\ & + \frac{E_k}{4(1 + \nu_k)} (\gamma_{xy}^{(k)})^2 \end{aligned} \right] dS, \quad (1)$$

$$\Omega_b = \frac{1}{2} EJ \int_{-l}^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (2)$$

$$\Pi = - \int_{-l}^l q(x) y(x) dx, \quad (3)$$

где в формуле (1) интеграл берется по площади расчетной области.

Так как в состоянии статического равновесия функционал полной энергии  $\mathcal{E}$  должен иметь минимум, то неизвестные перемещения  $u_i(x)$ ,  $v_i(y)$  определяются из условия обращения в нуль производных от полной энергии по каждому из перемещений. Численная реализация вариационно-разностного метода осуществляется в программном пакете MATHMATICA.

Решение задачи строится в перемещениях и реализуется методом конечных разностей (МКР). При решении поставленной задачи энергия деформации подсчитывается для каждой ячейки МКР, а затем суммируется по объему упругого основания. Энергия деформаций упругого основания и энергия изгиба выражаются в конечно-разностной форме с учетом геометрических граничных условий на гранях расчетной области [6,7].

Например, энергия деформации упругого основания (1) в конечно-разностной форме имеет вид [6–8].

$$\begin{aligned}
 U_f = \sum_{j=1}^{MY-1} \left( \sum_{i=1}^{NX-1} U_{i,j}^{(k)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{MY-1} \left( \sum_{i=1}^{NX-1} \left[ \frac{E_k}{1+\nu_k} \cdot \left[ \frac{\nu_k}{1-2\nu_k} \cdot \left( \frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) + \right. \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + \frac{1}{2\Delta y} \cdot (\nu_c + \nu_d - \nu_a - \nu_b) \right) \right]^2 + \left( \frac{1}{2\Delta x} \cdot (u_b + u_d - u_a - u_c) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\Delta y} \cdot (\nu_c + \nu_d - \nu_a - \nu_b) \right)^2 + \right. \\
 \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\Delta y} \cdot (u_c + u_d - u_a - u_b) + \frac{1}{2\Delta x} \cdot (\nu_b + \nu_d - \nu_a - \nu_c) \right)^2 \right] \Delta x \Delta y \right), \quad (4)
 \end{aligned}$$

где  $u_k$ ,  $\nu_k$  - неизвестные перемещения в центре прямоугольной ячейки расчетной области упругого основания.

После дифференцирования функционала полной энергии по каждому из неизвестных перемещений получается система линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет найти неизвестные узловые перемещения. Используя дифференциальные зависимости при изгибе, определяются реактивные давления в контактной зоне плиты. По известным прогибам плиты определяются внутренние усилия в ее сечениях [6,8].

Сформулированная задача статического расчета решается в линейной постановке (нулевая итерация). По вычисленным значениям узловых перемещений определяются интенсивность деформаций и интенсивность напряжений в центрах прямоугольных ячеек, и возможно организовать итерационный процесс для решения задачи в нелинейной постановке, решая ее до достижения заданной точности [8].

В численный счет ВРМ используются следующие исходные параметры: загрузка  $I$  - нагрузка в рассматриваемой точке составляет  $P=100$  кН; упругие и геометрические параметры плиты -  $E=31500$  МПа,  $\nu=0,167$ ,  $H=0,17$  м,  $l=1,5$  м (в продольном направлении),  $l=0,9$  м (в поперечном направлении); для слоистого основания в каждом упругом слое - модуль упругости  $E_0$  и коэффициент Пуассона  $\nu_0$  в соответствии с таблицей 2, параметры расчетной области: 1) в продольном направлении плиты  $\Delta x=0,5$  м,  $\Delta y=0,5$  м; 2) в поперечном направлении плиты  $\Delta x=0,3$  м,  $\Delta y=0,5$  м.

Таблица 2

## Характеристики грунтов при моделировании ВРМ

Номер слоя	Тип грунта	Мощность слоя, м	$q_s$ МПа	$E_0$ МПа	$\nu$
1	Песок мелкий	1 (2Δy)	0,5	4,0	0,3
2		0,5 (Δy)	4,9	19,8	
3		1,0 (2Δy)	16,5	44,4	
4		0,5 (Δy)	10,9	32,7	

В результате численного счета ВРМ были получены следующие значения осадок балочной плиты:

1) в продольном направлении (в метрах)

12 0.005644186282024094  
 13 0.006709867631057538  
 14 0.007642657933305566  
 15 0.00812505842513046  
 16 0.00764265793330554  
 17 0.006709867631057491  
 18 0.005644186282024032

2) в поперечном направлении (в метрах)

12 0.01043850326674703  
 13 0.010713358622403872  
 14 0.010949207708750488  
 15 0.011066358548771773  
 16 0.010949207708750922  
 17 0.010713358622404731  
 18 0.010438503266748311

**Сопоставление результатов.** Максимальное значение осадки поверхности расчетной модели основания, полученное с использованием МКЭ и ВРМ в линейной постановке, составляет 3.58 мм, 8.13 мм – в продольном направлении и 11.07 мм – в поперечном направлении. Расхождение результатов численного исследования обусловлено различными подходами в решении контактной задачи.

1. Жемочкин Б.Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б.Н. Жемочкин, А.П. Сеницын. – М.: Госстройиздат, 1962. – 240 с.

2. Босаков С.В. Статические расчеты плит на упругом основании / С.В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.

3. Семенюк С.Д. Расчет плит покрытия автомобильных дорог на эксплуатационные нагрузки способом Б.Н. Жемочкина / С.Д. Семенюк, Р.В. Кумашов. // Инженерно-геотехнические изыскания, проектирование и строительство оснований, фундаментов и подземных сооружений: сборник трудов Всероссийской научно-технической конференции. – СПб.: СПбГАСУ, 2017. – с. 139-145.



4. ТКП 45-5.01-15-2005 (02250). Прочностные и деформационные характеристики грунтов по данным статического зондирования и пенетрационного каротажа. Правила определения. – Минск, 2006. – 21 с.

5. Гобунов-Посадов М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Гобунов-Посадов, Т.А. Маликова // Изд. 2-е, перераб. и доп. – М., Стройиздат, 1973. – 627 с.

6. Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета (Часть 1) / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – №1. – С. 5–13.

7. Козунова, О.В. Нелинейный расчет балочных плит на слоистых основаниях с биогенными включениями/ О.В. Козунова // Сборник статей международной научно – технической конференции «Геотехника Беларуси: теория и практика». – Минск, БНТУ, 20-22 октября 2008. – С. 27–63.

8. Р5.01.056.09 Особенности проектирования плитных фундаментов на многослойных основаниях со слабыми слоями грунтов / О.В. Козунова// Глава 8. Рекомендаций по проектированию и устройству рациональных фундаментов на основаниях, сложенных озерно-ледниковыми и лессовидными грунтами. Разраб. и утв. РУП «Институт БелНИИС» (пр.№4 от 21.05.2009 г.). Введ. 19.08.2009 г. – Минск, СТРОЙТЕХНОРМ. – С. 39-47.

1. Zhemochkin B.N. Prakticheskie metody` rascheta fundamentny`x balok i plit na uprugom osnovanii / B.N. Zhemochkin, A.P. Sinicyn. – M.: Gosstrojizdat, 1962. – 240 s.

2. Bosakov S.V. Sticheskie raschety` plit na uprugom osnovanii / S.V. Bosakov. – Minsk: BNTU, 2002. – 128 s.

3. Semenyuk S.D. Raschet plit pokry`tiya avtomobil`ny`x dorog na e`kspluatatsionny`e nagruzki sposobom B.N. Zhemochkina / S.D. Semenyuk, R.V. Kumashov. // Inzhenerno-geotexnicheskie izy`skaniya, proektirovanie i stroitel`stvo osnovanij, fundamentov i podzemny`x sooruzhenij: sbornik trudov Vserossijskoj nauchno-texnicheskoj konferencii. – SPb.: SPbGASU, 2017. – s. 139-145.

4. ТКП 45-5.01-15-2005 (02250). Prochnostny`e i deformatsionny`e xarakteristiki gruntov po dannym`m staticheskogo zondirovaniya i penetratsionnogo karotazha. Pravila opredeleniya. – Minsk, 2006. – 21 s.

5. Gobunov-Posadov M.I. Raschet konstrukcij na uprugom osnovanii / M.I. Gobunov-Posadov, T.A. Malikova // Izd. 2-e, pererab. i dop. – M., Strojizdat, 1973. – 627 s.

6. Bosakov, S. V. Variatsionno-raznostny`j podxod v reshenii kontaktnoj zadachi dlya nelinejno uprugogo neodnorodnogo osnovaniya. Ploskaya deformatsiya. Teoriya rascheta (Chast` 1) / S. V. Bosakov, O. V. Kozunova// Vestnik BNTU. – 2009. – №1. – S. 5–13.

7. Kozunova, O.V. Nelinejny`j raschet balochny`x plit na sloisty`x osnovaniyax s biogenny`mi vklyucheniyami/ O.V. Kozunova // Sbornik statej mezhdunarodnoj nauchno texnicheskoj konferencii «Geotexnika Belarusi: teoriya i praktika». Minsk, BNTU, 20-22 oktyabrya 2008. S. 27-63.

8. R5.01.056.09 Osobennosti proektirovaniya plitny`x fundamentov na mnogoslojny`x osnovaniyax so slaby`mi sloyami gruntov / O.V. Kozunova// Glava 8. Rekomendacij po proektirovaniyu i ustrojstvu racional`ny`x fundamentov na osnovaniyax, slozhenny`x ozerno-lednikovymi i lessovidny`mi gruntami. Razrab. i utv. RUP «Institut BelNIIS» (pr.№4 ot 21.05.2009 g.). Vved. 19.08.2009 g. Minsk, STROJTEXNORM. S. 39-47.