

А. П. Кусайкин, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук

ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА, СОДЕРЖАЩЕГО СЛОЙ МЕТАМАТЕРИАЛА

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: melezhik@ire.kharkov.ua

С использованием метода обобщенных матриц рассеяния решена спектральная задача по определению постоянных распространения собственных *TM*-волн периодического волновода, образованного слоем метаматериала и отражательной дифракционной решеткой. В диапазоне частот, где диэлектрическая проницаемость метаматериала принимает отрицательные значения, проведено исследование особенностей поведения дисперсионных зависимостей собственных волн. Обнаружено проявление как эффекта междутиповой связи, так и нового вида междутипового взаимодействия поверхностных волн данного волновода, определены условия их проявления. Илл. 9. Библиогр.: 17 назв.

Ключевые слова: метаматериал, периодический волновод, частотная дисперсия, брэгговское отражение, поверхностные и вытекающие волны, междутиповая связь.

В последнее время большое внимание уделяется созданию композитных материалов, у которых эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости в микроволновом диапазоне могут принимать отрицательные значения [1–3]. Недавно Д. Р. Смит и другие [4, 5] создали такой композитный материал для микроволнового диапазона волн и экспериментально продемонстрировали эффект аномальной рефракции. Не меньший интерес вызывают и искусственные материалы с одним отрицательным материальным параметром среды: либо диэлектрической, либо магнитной проницаемостью. Исследование электромагнитных свойств таких материалов в сочетании с различными периодическими структурами показало возможность резонансного поглощения энергии падающей на них плоской однородной волны [6–9]. Данный эффект послужил основой для поиска режимов резонансного излучения плоских волн дифракционной структурой, содержащей метаматериал, при возбуждении ее электронным потоком [10]. Такое резонансное поведение дифракционного поля обусловлено возбуждением собственных волн (колебаний) периодических структур, содержащих метаматериал. В этой связи представляет интерес исследование собственных режимов таких структур, которые не связаны с конкретным типом возбуждения.

Целью нашей работы является изучение собственных волн и соответствующих им постоянных распространения периодического волновода, образованного дифракционной решеткой и слоем метаматериала. С одной стороны, получение информации об особенностях дисперсионных характеристик собственных волн позволит понять механизмы формирования резонансных эффектов, возникающих при возбуждении таких периодических структур, а с другой – оценить возможность их применения в фильтрующих и других частотно-разделительных устройствах [11].

1. Постановка и метод решения задачи.

На рис. 1 представлена схема периодического волновода, образованного слоем метаматериала, расположенного над идеально проводящей отражательной дифракционной решеткой со следующими геометрическими параметрами: l – период, d – ширина щелей, h_1 – высота ламелей. Слой метаматериала размещен на расстоянии h_2 от поверхности решетки и имеет толщину h_3 .

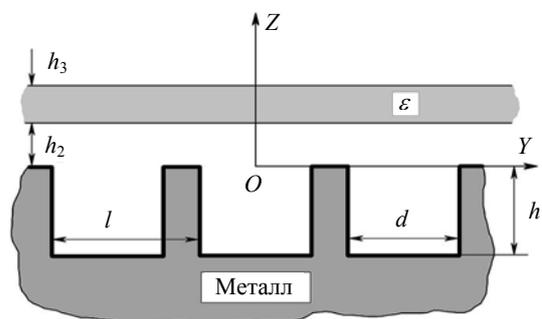


Рис. 1. Схема волновода

Для электромагнитных волн с зависимостью от времени $\exp(-i\omega t)$ эффективная диэлектрическая постоянная метаматериала описывается следующей формулой [12]:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (1)$$

где ω_p и ν – соответственно характеристическая (плазменная) частота и частота, отвечающая за потери в метаматериале. Предполагается, что магнитная постоянная $\mu = 1$.

Сформулируем двумерную задачу $\left(\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0\right)$ на собственные волны такого периодического волновода. В области вне отражательной решетки требуется определить нетривиальные реше-

ния $U(y, z)$ и соответствующие постоянные рас-
пространения γ однородного уравнения Гельм-
гольца

$$\Delta U + k^2 \bar{\varepsilon}(z) U = 0, \quad (2)$$

где $k = \omega/c$, а

$$\bar{\varepsilon}(z) = \begin{cases} \varepsilon(\omega) & (h_2 \leq z \leq h_2 + h_3), \\ 1 & (z > h_2 + h_3, z < h_2), \end{cases} \quad (3)$$

удовлетворяющие условиям квазипериодичности

$$\begin{aligned} U(y + l, z) &= e^{i\gamma l} U(y, z), \\ \frac{\partial}{\partial y} U(y + l, z) &= e^{i\gamma l} \frac{\partial}{\partial y} U(y, z) \end{aligned} \quad (4)$$

и излучения в полупространстве $z > h_2 + h_3$

$$U(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{\left\{ i \frac{2\pi}{l} [\Phi_n y + \Gamma_n (z - h_2 - h_3)] \right\}}, \quad (5)$$

где $\Phi_n = n + \Phi$; $\Phi = \frac{\gamma l}{2\pi}$; $\Gamma_n = \sqrt{\kappa^2 - \Phi_n^2}$; $\kappa = \frac{\omega l}{2\pi c} =$

$\frac{l}{\lambda}$; c – скорость света в вакууме. Область изме-
нения нормированной постоянной распростра-
нения Φ совпадает с римановой поверхностью F
аналитического продолжения канонической
функции Грина с действительной оси $\text{Im}(\Phi) = 0$,
где выполнено условие

$$\text{Im}(\Gamma_n) \geq 0, \quad \text{Re}(\Gamma_n) \geq 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

(подробнее см. [13], где приведено описание F).
Здесь ограничимся рассмотрением случая, когда
нормированная постоянная распространения

$\Phi = \frac{\gamma l}{2\pi}$ изменяется на «физическом» листе рима-
новой поверхности F [13].

Кроме условий (2)–(6), собственные вол-
ны должны удовлетворять граничным условиям
на поверхности идеально проводящей решетки
(равенство нулю тангенциальных компонент
электрического поля) и условиям непрерывности
на границах раздела сред тангенциальных компо-
нент электрического и магнитного полей.

Искомая функция $U(y, z)$ совпадает с
компонентой H_x магнитного поля в случае собст-
венных TM -волн ($E_x \equiv 0$) и с компонентой E_x
электрического поля в случае собственных
 TE -волн ($H_x \equiv 0$). В дальнейшем ограничимся
исследованием собственных TM -волн. Случай
 TE -волн может быть исследован по аналогии.

Решение задачи (2)–(5) было получено с
использованием метода обобщенных матриц рас-
сеяния [14]. Прежде всего отметим, что из ра-
венств (4) следует возможность представить ре-
шение задачи (2)–(5) в виде

$$U(y, z) = \exp(i\gamma y) \bar{U}(y, z), \quad (7)$$

где функция $\bar{U}(y, z)$ является периодической по
переменной y с периодом l , т. е.

$$\bar{U}(y + l, z) = \bar{U}(y, z). \quad (8)$$

Таким образом, решение уравнения (2)
имеет вид

$$U(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(z) \exp(i\Phi_n \frac{2\pi}{l} y). \quad (9)$$

Поскольку функция (9) должна удовле-
творять уравнению (2) и условию излучения (5),
то получаем

$$U(y, z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left\{ i \frac{2\pi}{l} [\Phi_n y + \Gamma_n (z - h_2 - h_3)] \right\}, & (z > h_2 + h_3); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(i \frac{2\pi}{l} \Phi_n y \right) \left[d_{n1} \exp\left(i \Gamma_{n1} z \frac{2\pi}{l} \right) + d_{n2} \exp\left(-i \Gamma_{n1} z \frac{2\pi}{l} \right) \right], & (h_2 < z < h_2 + h_3); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(i \frac{2\pi}{l} \Phi_n y \right) \left[c_{n1} \exp\left(i \Gamma_n z \frac{2\pi}{l} \right) + c_{n2} \exp\left(-i \Gamma_n z \frac{2\pi}{l} \right) \right], & (0 < z < h_2); \\ 2 \exp(i\gamma q l) \sum_{m=0}^{\infty} T_m \exp\left(i \frac{2\pi}{l} \beta_m h_1 \right) \cos\left[\frac{2\pi}{l} \beta_m (h_1 + z) \right] \cos \frac{\pi m}{d} \left(y - ql + \frac{d}{2} \right), & (-h_1 < z < 0, |y - ql| < \frac{d}{2}). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $\Gamma_{n1} = \sqrt{\kappa^2 \varepsilon - \Phi_n^2}$; $\beta_m = \sqrt{\kappa^2 - (m/l/2d)^2}$;
 $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – номера канавок решетки;
 $R_n, d_{n1}, d_{n2}, c_{n1}, c_{n2}, T_n$ – подлежащие определению
неизвестные константы. Отметим, что в пред-
ставлении (10) учтены граничные условия – ра-
венство нулю тангенциальных компонент элек-

трического поля на дне канавок и боковых по-
верхностях ламелей решетки.

В соответствии с методом обобщенных
матриц рассеяния введем следующие бесконеч-
номерные матрицы. Для дифракционной решетки
матрица отражения

$$\mathbf{R}_1 = \left\| R_{np} \right\|_{n,p=-\infty}^{\infty}. \quad (11)$$

Здесь R_{np} – комплексная амплитуда n -й пространственной гармоники отраженного поля при возбуждении решетки падающей волной

$$H_x^p = \exp\left[i\frac{2\pi}{l}(\Phi_p y - \Gamma_p z)\right], \quad p = 0, \pm 1, \dots \quad (12)$$

Матрица \mathbf{R}_1 находится с помощью метода переразложения [14]. Далее, введем матрицы отражения \mathbf{R}_2 и прохождения \mathbf{T}_2 для слоя метаматериала. Поскольку обе они являются диагональными, то легко конструируются из решения соответствующей задачи дифракции для падающей волны (12) и имеют следующий вид:

$$\mathbf{R}_2 = \left\| R_n \delta_{np} \right\|_{n,p=-\infty}^{\infty}, \quad \mathbf{T}_2 = \left\| T_n \delta_{np} \right\|_{n,p=-\infty}^{\infty}, \quad (13)$$

где δ_{np} – символ Кронекера;

$$R_n = \frac{(\Gamma_{n1}^2 - \varepsilon^2 \Gamma_n^2) \left[\exp(i\frac{4\pi}{l} \Gamma_{n1} h_3) - 1 \right]}{(\Gamma_{n1} + \varepsilon \Gamma_n)^2 - (\Gamma_{n1} - \varepsilon \Gamma_n)^2 \exp(i\frac{4\pi}{l} \Gamma_{n1} h_3)};$$

$$T_n = \frac{4\Gamma_{n1} \Gamma_n \exp(i\frac{4\pi}{l} \Gamma_{n1} h_3)}{(\Gamma_{n1} + \varepsilon \Gamma_n)^2 - (\Gamma_{n1} - \varepsilon \Gamma_n)^2 \exp(i\frac{4\pi}{l} \Gamma_{n1} h_3)}.$$

Кроме того, введем вектор-столбцы

$$\mathbf{R} = \left\| R_n \right\|_{n=-\infty}^{\infty}, \quad \mathbf{T} = \left\| T_m \right\|_{m=0}^{\infty},$$

$$\mathbf{d}_1 = \left\| d_{n1} \right\|_{n=-\infty}^{\infty}, \quad \mathbf{d}_2 = \left\| d_{n2} \right\|_{n=-\infty}^{\infty}, \quad (14)$$

$$\mathbf{c}_1 = \left\| c_{n1} \right\|_{n=-\infty}^{\infty}, \quad \mathbf{c}_2 = \left\| c_{n2} \right\|_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Их компоненты совпадают с соответствующими коэффициентами разложения функции $U(y, z)$ в ряды Рэлея (10). Видно, что вектор-столбец \mathbf{c}_1 выражается через вектор-столбец \mathbf{c}_2 с помощью матрицы отражения решетки

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{E} \mathbf{c}_2, \quad (15)$$

где $\mathbf{E} = \left\| \exp(i2\pi\Gamma_n h_2 / l) \delta_{np} \right\|_{n,p=-\infty}^{\infty}$ – диагональная матрица, описывающая фазовый набег волн на расстоянии h_2 – между нижней границей слоя метаматериала и верхней границей решетки. С другой стороны, вектор-столбец \mathbf{c}_2 выражается через вектор-столбец \mathbf{c}_1 посредством матрицы отражения от слоя метаматериала

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{R}_2 \mathbf{E} \mathbf{c}_1. \quad (16)$$

Подставив (16) в (15), получаем однородную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1 \mathbf{E} \mathbf{R}_2 \mathbf{E}) \mathbf{c}_1 = 0. \quad (17)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица. Действительно, можно показать [14], что матрицы \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 задают в пространстве последовательностей l_2 ограниченные операторы, а диагональная матрица \mathbf{E} – ядерный оператор. Следовательно, оператор, соответ-

ствующий матрице $\mathbf{R}_1 \mathbf{E} \mathbf{R}_2 \mathbf{E}$, является ядерным (как произведение ограниченного и ядерного операторов [15]). Поэтому уравнение (17) имеет нетривиальное решение ($\mathbf{c}_1 \neq 0$) тогда и только тогда, когда определитель

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{R}_1 \mathbf{E} \mathbf{R}_2 \mathbf{E}) = 0. \quad (18)$$

Элементы матрицы $\mathbf{R}_1 \mathbf{E} \mathbf{R}_2 \mathbf{E}$ зависят от спектрального параметра Φ . Следовательно, те значения Φ , которые удовлетворяют уравнению (18), являются искомыми нормированными постоянными распространения. Приближенное решение этого уравнения было найдено методом усечения – бесконечномерная матрица $\mathbf{R}_1 \mathbf{E} \mathbf{R}_2 \mathbf{E}$ аппроксимировалась матрицей конечного размера. Ядерность оператора, порождаемого матрицей $\mathbf{R}_1 \mathbf{E} \mathbf{R}_2 \mathbf{E}$, гарантирует сходимость приближенных решений к точным с увеличением порядка усечения матрицы $\mathbf{R}_1 \mathbf{E} \mathbf{R}_2 \mathbf{E}$. После того как найдены постоянные распространения Φ , из уравнения (17) может быть определен вектор-столбец \mathbf{c}_1 . Поскольку решения уравнения (17) инвариантны относительно умножения на произвольную константу, то использовалось условие нормировки

$$\|\mathbf{c}_1\|^2 = \sum_{n1=-\infty}^{\infty} |c_{n1}|^2 = 1.$$

Таким образом, определив вектор-столбец \mathbf{c}_1 из уравнения (17), согласно (16) найдем вектор-столбец \mathbf{c}_2 , а с помощью матрицы прохождения слоя метаматериала \mathbf{T}_2 можно определить вектор-столбец \mathbf{R} , а именно

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_2 \mathbf{E} \mathbf{c}_1. \quad (19)$$

Остальные неизвестные коэффициенты разложения могут быть найдены по следующим формулам:

$$T_m = \frac{4d}{i\pi l [\exp(i\beta_m 4\pi h_1 / l) + 1]} \times$$

$$\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} (c_{p1} + c_{p2}) \frac{\Phi_p [(-1)^m e^{i\pi d \Phi_p / l} - e^{-i\pi d \Phi_p / l}]}{4d^2 \Phi_p^2 / l^2 - m^2},$$

$$m = 0, 1, \dots;$$

$$d_{n1} = \frac{R_n}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon \Gamma_n}{\Gamma_{n1}} \right) \exp[-i2\pi\Gamma_{n1}(h_2 + h_3)/l];$$

$$d_{n2} = \frac{R_n}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon \Gamma_n}{\Gamma_{n1}} \right) \exp[i2\pi\Gamma_{n1}(h_2 + h_3)/l],$$

$$n = 0, \pm 1, \dots$$

Предложенный подход был реализован в виде численных алгоритмов на персональном компьютере. Расчеты проводились в диапазоне частот $0 < \omega < \omega_p / \sqrt{2}$, где реальная часть диэлектрической проницаемости метаматериала принимает отрицательные значения $\text{Re}(\varepsilon) < -1$.

Кроме того, при расчете постоянных распространения собственных волн мы ограничились полосой $0 \leq \text{Re}(\Phi) \leq 1$. Сделать это позволяет следующее свойство периодических волноводов (см. [11, 13]): если Φ – корень дисперсионного уравнения (18), то $\pm\Phi + n$, ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) также является корнем данного уравнения.

В качестве метаматериала был выбран искусственный композитный материал, описанный в работе [12], с характеристической (плазменной) частотой $f_p = \omega_p / 2\pi = 700$ ГГц, что соответствует нормированной частоте $\kappa_p = \omega_p l / 2\pi c = 0,7$ и периоду решетки $l = 0,3$ мм. Как установлено в этой же работе, эффективная диэлектрическая проницаемость такого композитного материала хорошо аппроксимируется формулой (1).

Кроме того, отметим, что приведенные далее численные результаты получены при отсутствии потерь в метаматериале, т. е. при $\nu = 0$.

2. Численные результаты. Толстый слой.

Рассмотрим результаты численного анализа исследуемого волновода со следующими относительными геометрическими параметрами: $h_1/l = 0,2$; $h_2/l = 0,1$; $h_3/l = 0,57$.

На рис. 2 представлены дисперсионные зависимости (сплошные и штриховые линии) волноводной структуры слой–металл над отражательной решеткой с узкими щелями (относительная ширина щели $d/l = 0,05$). Здесь же изображены две дисперсионные зависимости (треугольники), соответствующие двум поверхностным волнам слоя метаматериала, расположенного над гладкой металлической поверхностью при тех же параметрах $h_2/l = 0,1$ и $h_3/l = 0,57$.

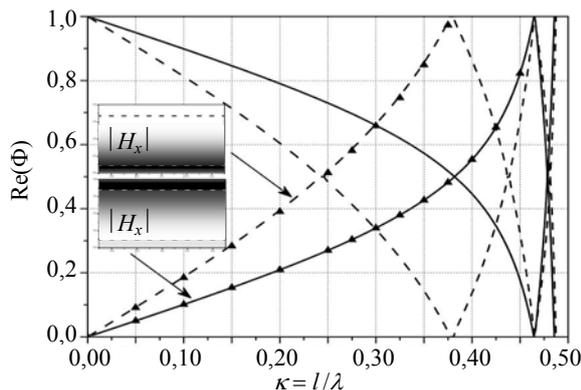


Рис. 2. Дисперсионные зависимости при узких щелях решетки $d/l = 0,05$: \blacktriangle – $h_1/l = 0$

Видно графическое совпадение дисперсионных кривых структуры слой–металл с двумя выходящими из начала координат дисперсионными кривыми структуры слой–решетка с узкими щелями. Это свидетельствует о том, что при таких щелях и прицельном параметре слой метаматериала практически «не замечает» решетку.

Для определенности, будем различать дисперсионные зависимости исследуемого волновода для волн 1-го типа (сплошные линии) и волн 2-го типа (штриховые линии). Как видно из распределения модуля H_x -компонент полей собственных волн волновода слой–металл при $\kappa = 0,2$, приведенных на рис. 2, для волн 1-го типа поля сконцентрированы в окрестности верхней границы слоя метаматериала, а для волн 2-го типа – в окрестности нижней границы.

Отметим, что у слоя метаматериала, расположенного в свободном пространстве [9], также существует два типа поверхностных TM -волн, которые отличаются четностью в распределении поля собственных волн вдоль оси OZ , т. е. по толщине слоя.

Две дисперсионные кривые, выходящие из точки $\{\kappa = 0, \text{Re}(\Phi) = 1\}$, соответствуют постоянным распространения $1 - \text{Re}(\Phi)$. Так же, как и у обычной решетки [13], при $\text{Re}(\Phi) = 0,5n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) проявляется хорошо известный эффект взаимодействия Брэгга. Однако ширина полосы его проявления в окрестности $\kappa \approx 0,24$ мала (на рис. 2 ее не видно), что, очевидно, обусловлено малостью ширины щели решетки $d/l = 0,05$.

В работе [7] показано, что открытая структура – периодическая ленточная решетка, расположенная на границе метаматериала, в области частот $\kappa \leq \kappa_p / \sqrt{2}$, где вещественная часть эффективной диэлектрической проницаемости метаматериала принимает отрицательные значения, обладает бесконечным числом комплексных собственных частот с конечной точкой накопления $\kappa = \kappa_p / \sqrt{2}$. Этим частотам отвечают собственные колебания, амплитуды которых экспоненциально затухают во времени.

В случае же исследуемого волновода при $\kappa \rightarrow \kappa_p / \sqrt{2}$ дисперсионные кривые собственных волн асимптотически приближаются к линии $\kappa = \kappa_p / \sqrt{2} \approx 0,495$.

С увеличением ширины щелей решетки ее влияние на поведение дисперсионных зависимостей становится заметнее, что иллюстрирует рис. 3, где данные представлены для случая широких щелей.

Первое, на что следует обратить внимание, – существенное влияние ширины щели решетки на волны 2-го типа, дисперсионные зависимости которых при увеличении d/l существенно сместились от соответствующей кривой волновода слой–металл. При этом на дисперсионные зависимости волн 1-го типа изменение d/l практически не повлияло. Это обусловлено тем, что поле собственных волн 2-го типа сосредото-

чено у нижней границы слоя метаматериала вблизи решетки, изменение параметров которой, естественно, существенно влияет на характеристики волн этого типа.

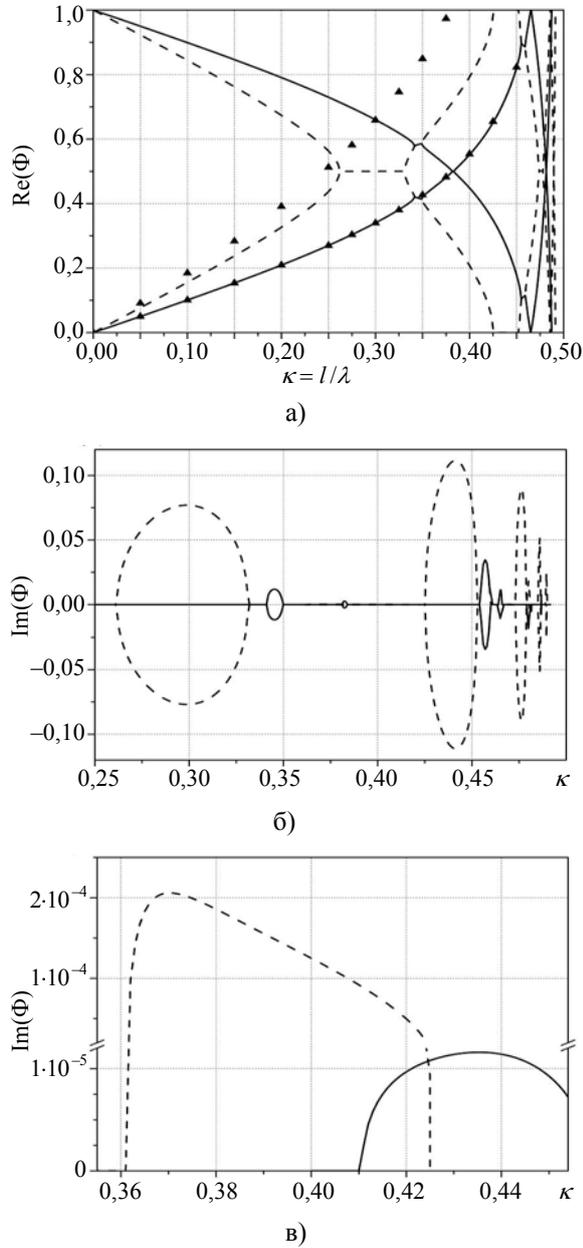


Рис. 3. Дисперсионные зависимости при широких щелях решетки $d/l = 0,95$: $\blacktriangle - h_1/l = 0$

Второе, что следует отметить, – это проявление режима взаимодействия Брэгга для волн 2-го типа в достаточно широких полосах частот $0,262 < \kappa < 0,331$ и $0,426 < \kappa < 0,452$, в то время как для волн 1-го типа этот режим остается очень узкополосным (при данном масштабе на рис. 3, а он практически не виден).

Поведение дисперсионных зависимостей в частотной области $0,341 < \kappa < 0,349$ на рис. 3, а требует особого рассмотрения. В периодических

волноводах с использованием обычного диэлектрика такой характер поведения дисперсионных зависимостей не наблюдался. Ниже мы подробнее рассмотрим этот режим взаимодействия собственных волн, который в дальнейшем будем называть эффектом «наклонного междутипового взаимодействия».

Остановимся теперь на поведении мнимых частей постоянных распространения $Im(\Phi)$ в исследуемой области частот, которые представлены на рис. 3, б. Здесь мы ограничились областью $\kappa > 0,25$, поскольку в диапазоне $\kappa < 0,25$ дисперсионным кривым соответствуют чисто поверхностные волны, для которых $Im(\Phi) = 0$.

Обратим внимание на поведение $Im(\Phi)$ дисперсионных кривых 2-го типа в частотном диапазоне $0,262 < \kappa < 0,331$. Такое поведение мнимых частей постоянных распространения типично для режима взаимодействия Брэгга. Так, для постоянных распространения, действительные части которых выходят из начала координат $\{\kappa = 0, Re(\Phi) = 0\}$, соответствующее значение мнимой части постоянной распространения положительно, а для постоянных распространения, действительные части которых выходят из точки $\{\kappa = 0, Re(\Phi) = 1\}$ – отрицательно. Обратим внимание на то, что для данной области частот характерно существование только поверхностных собственных волн.

Постоянные распространения могут иметь отличные от нуля мнимые части не только в режиме Брэгга, но и в режиме вытекающих волн, что продемонстрировано на рис. 3, в, который является увеличенным фрагментом рис. 3, б в диапазоне монотонного возрастания $Re(\Phi)$ дисперсионных кривых волн обоих видов. Отметим, что значения $Im(\Phi)$ в данном случае на 3–4 порядка меньше, чем в режиме взаимодействия Брэгга.

Остановимся теперь на анализе поведения дисперсионных зависимостей в области частотного параметра $0,341 < \kappa < 0,349$, где проявляется эффект, который ранее мы назвали эффектом «наклонного междутипового взаимодействия». На рис. 4, а представлен увеличенный фрагмент одной из областей изменения частотного параметра κ рис. 3, а, где проявляется этот эффект (в частотном диапазоне $0 < \kappa < 0,5$ проявлений данного эффекта всего четыре).

В первую очередь обращает внимание то, что в отличие от брэгговского режима, данное взаимодействие происходит между волнами разного типа (отсюда название «междутиповое»). Второе отличие – области проявления эффекта наклонного взаимодействия находятся вне целых и полужелых значений $Re(\Phi)$, что невозможно для брэгговского взаимодействия.

Поведение же мнимых частей $Im(\Phi)$ при данном взаимодействии аналогично случаю взаимодействия Брэгга (сравним рис. 3, б и 4, б).

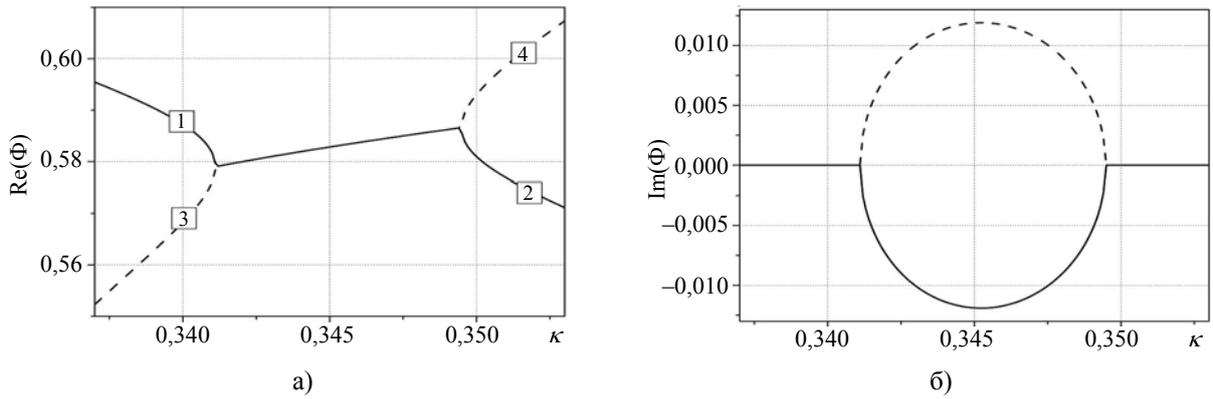


Рис. 4. Дисперсионные зависимости в случае наклонного междутипового взаимодействия

На рис. 5 показано распределение модуля H_x -компоненты ближнего поля на одном периоде волновода при значениях параметров κ и Φ , близким к таким, при которых проявляется наклонное междутиповое взаимодействие. На рис. 4, а эти точки обозначены цифрами от 1 до 4. Заштрихованная область – это часть металлической решетки, двумя белыми горизонтальными штриховыми

линиям обозначены границы слоя метаматериала. Видно, что при прохождении по частоте области наклонного взаимодействия пучности и узлы полей собственных волн обоих типов на верхней границе метаматериала поменялись местами (сравним попарно точки 1–2 и 3–4). Внутри щелей решетки и на нижней границе слоя поле практически не изменилось.

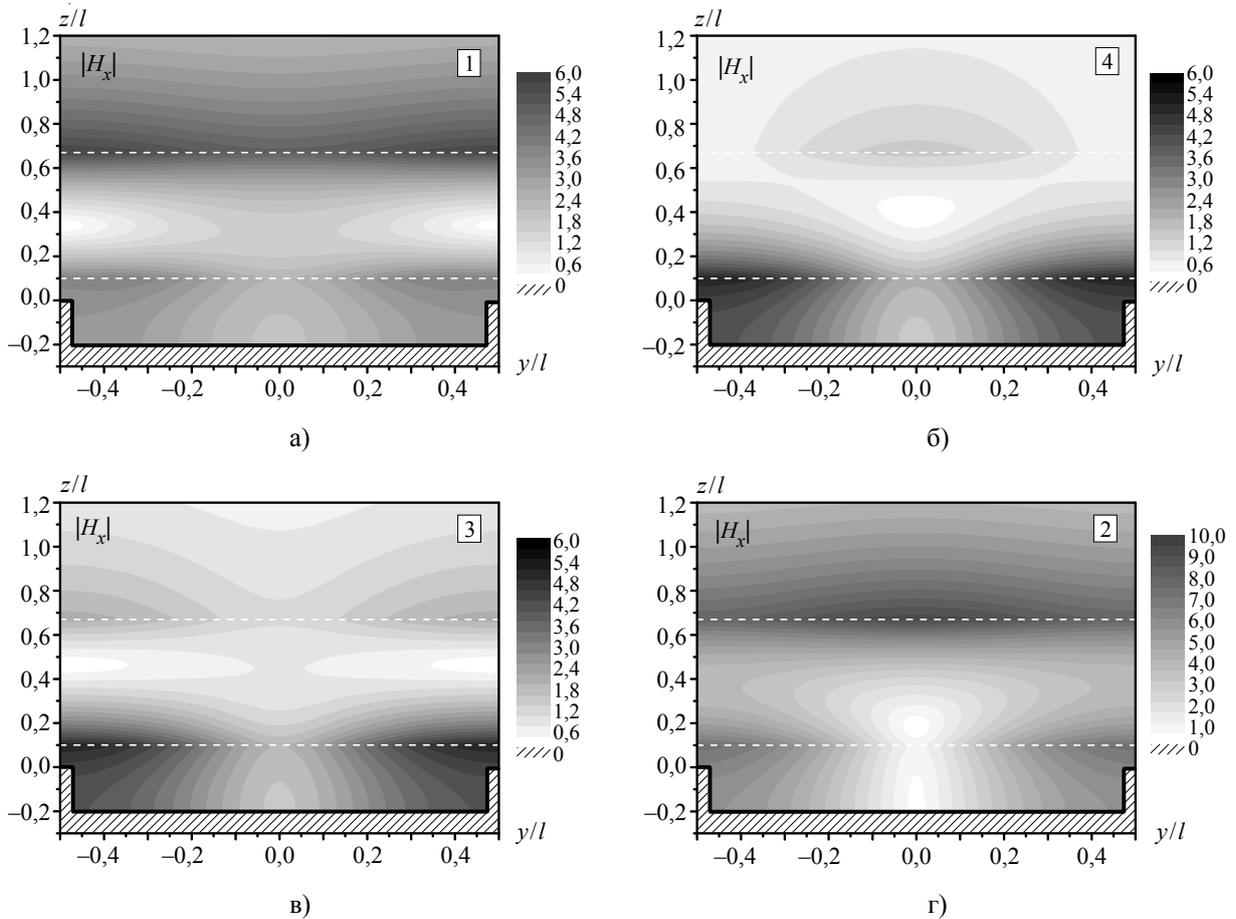


Рис. 5. Модуль H_x -компоненты поля собственных волн при: а) $\kappa = 0,34$; $\Phi = 0,59 + i0$; $\varepsilon = -3,24$; б) $\kappa = 0,352$; $\Phi = 0,6 + i0$; $\varepsilon = -2,95$; в) $\kappa = 0,34$; $\Phi = 0,57 + i0$; $\varepsilon = -3,24$; г) $\kappa = 0,352$; $\Phi = 0,57 + i0$; $\varepsilon = -2,95$ ($d/l = 0,95$)

Отметим также, что и для широких щелей поле собственной волны 1-го типа концентрируется у верхней границы слоя метаматериала (точки 1 и 2), а для волн 2-го типа – у нижней (точки 3 и 4), откуда следует разная степень влияния решетки на волны этих типов.

Распределения полей в точках, соответствующих наклонному прямолинейному участку дисперсионной кривой, практически аналогичны распределению полей в режиме Брэгга.

Рассмотрим зависимости постоянных распространения от расстояния между решеткой и слоем метаматериала (прицельный параметр) при частоте $\kappa = 0,335$, представленные на рис. 6.

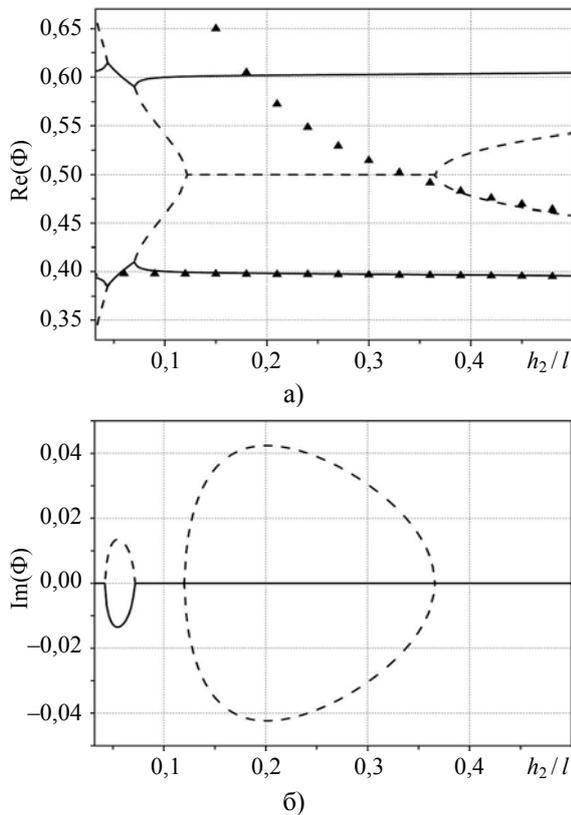


Рис. 6. Зависимость постоянных распространения от прицельного параметра при $\kappa = 0,335$, $d/l = 0,95$: ▲ – $h_1/l = 0$

Линиями из треугольников здесь изображены зависимости для волновода слой–металл. Поскольку поле собственной волны 1-го типа сконцентрировано у верхней границы слоя метаматериала, то зависимость ее постоянной распространения от прицельного параметра практически представляет собой константу, соответствующую постоянной распространения поляритона слоя метаматериала в открытом пространстве ($Re(\Phi) \approx 0,4$). Аналогичной является и данная зависимость для волновода слой–решетка при значениях прицельного параметра $h_2/l > 0,1$ (рис. 6, а).

Кривая зависимости, соответствующая волне 2-го типа волновода слой–металл, с ростом прицельного параметра асимптотически стре-

мится к значению постоянной распространения поляритона.

У волновода слой–решетка для волн 2-го типа существует диапазон изменения прицельного параметра, в котором зависимости действительных и мнимых частей постоянных распространения ведут себя так же, как и в случае режима взаимодействия Брэгга (рис 6). При дальнейшем увеличении параметра $h_2/l > 0,38$ линия зависимости постоянной распространения, практически совпадая с линией слой–металл, асимптотически приближается к значению постоянной распространения поляритона.

Отметим также, что с изменением прицельного параметра, как и в случае изменения частоты, возможно междутиповое наклонное взаимодействие (область $h_2/l < 0,1$).

3. Численные результаты. Тонкий слой.

Перейдем к анализу результатов численного эксперимента для волновода с тонким слоем. Зададим следующие относительные параметры геометрии: $d/l = 0,95$; $h_1/l = 0,2$; $h_2/l = 0,2$; $h_3/l = 0,1$.

Прежде всего следует отметить, что в случае тонкого слоя дисперсионные кривые волн 1-го типа для волновода слой–металл пересекают прямую $\kappa = \kappa_p/\sqrt{2}$, являющуюся частотой отсечки поляритона, распространяющегося вдоль границы метаматериала. При этом дисперсионные кривые волн 2-го типа по-прежнему асимптотически стремятся к этой прямой слева, не пересекая ее. Данный эффект, по-видимому, был впервые обнаружен в работе [9] при исследовании дисперсионных зависимостей слоя метаматериала, расположенного над идеально проводящей поверхностью. На рис. 7 две подобные зависимости представлены в виде линий из треугольников.

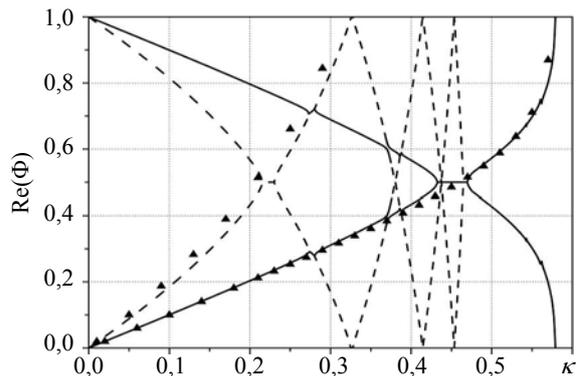


Рис. 7. Дисперсионные зависимости при малой толщине слоя метаматериала $h_3/l = 0,1$: ▲ – $h_1/l = 0$

Оказалось, что если вместо металлической поверхности использовать отражательную дифракционную решетку, то дисперсионная зависимость для волн 1-го типа, практически совпадая с аналогичной зависимостью для волновода слой–металл (треугольники), также пересекает

прямую $\kappa = \kappa_p / \sqrt{2}$. При этом в области значений частотного параметра $\kappa > \kappa_p / \sqrt{2}$ в точке $\text{Re}(\Phi) = 1$ режим Брэгга отсутствует.

Для случая тонкого слоя в области $\kappa < \kappa_p / \sqrt{2}$ поведение дисперсионных кривых волн обоих типов практически аналогично случаю толстого слоя. Здесь также присутствуют режимы Брэгга и наклонного междутипового взаимодействия, однако в окрестности $\kappa \approx 0,37$ проявляется другой тип взаимодействия, называемый междутиповой связью [16]. На рис. 8 представлен увеличенный фрагмент дисперсионных зависимостей в этой области изменения частоты.

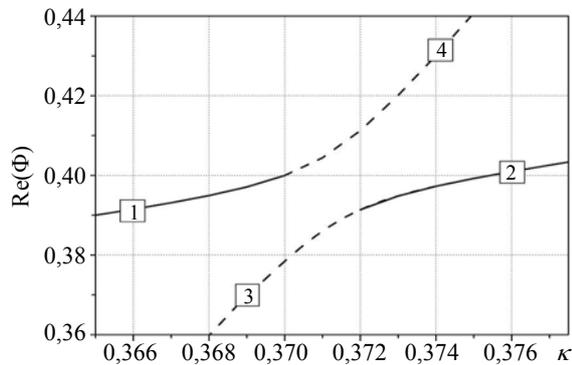


Рис. 8. Дисперсионные зависимости в случае междутиповой связи поверхностных волн

Видно, что в отличие от рассмотренных ранее режимов взаимодействия волн разного типа, при междутиповой связи у дисперсионных зависимостей на плоскости $\{\text{Re}(\Phi), \kappa\}$ отсутствуют общие точки. Другими словами, линии, соответствующие действительным частям постоянных распространения, не пересекаются. При этом происходит процесс непрерывного преобразования волн одного типа в другой. Поскольку это преобразование происходит в некоторой области изменения параметров, то на рис. 8 точки смены сплошной линии на штриховую и наоборот следует понимать как условность.

Необходимо также отметить, что в области междутиповой связи мнимые части обоих постоянных распространения $\text{Im}(\Phi) = 0$, т. е. междутиповое взаимодействие происходит между поверхностными волнами без возникновения вытекающей волны. В случае регулярных волноводов эффект междутиповой связи поверхностных волн, по-видимому, впервые был исследован в работе [17].

Отметим еще одну особенность, характерную для данной междутиповой связи волн. На рис. 9 представлено распределение модуля H_x -компонент поверхностных волн на одном периоде волновода в точках (κ, Φ) , близких к области проявления эффекта междутиповой связи, обозначенных на рис. 8 цифрами от 1 до 4.

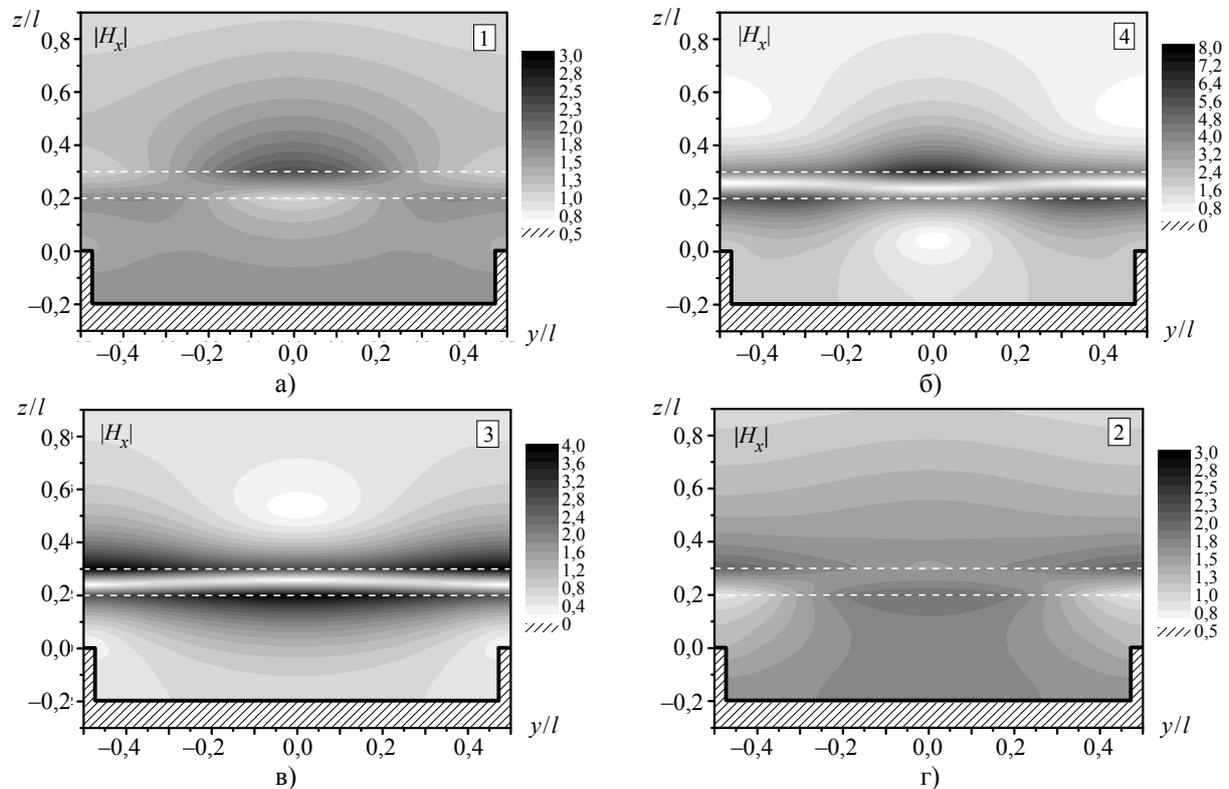


Рис. 9. Модуль H_x -компоненты поля собственных волн при: а) $\kappa = 0,366$; $\Phi = 0,39+i0$; $\varepsilon = -2,7$; б) $\kappa = 0,374$; $\Phi = 0,43+i0$; $\varepsilon = -2,5$; в) $\kappa = 0,369$; $\Phi = 0,37+i0$; $\varepsilon = -2,6$; г) $\kappa = 0,376$; $\Phi = 0,4+i0$; $\varepsilon = -2,47$

Как видно, наряду с обменом типами волн после прохождения области взаимодействия, наблюдаются изменения в расположении пучностей поля у верхней и нижней границ слоя метаматериала (см., например, рис. 9, б, в): они меняются местами после прохождения по частоте области взаимодействия. На наш взгляд, такое поведение собственных волн не является типичным для эффекта междутиповой связи.

Выводы. Таким образом, в строгой электродинамической постановке нами решена задача о собственных волнах периодического волновода, образованного слоем метаматериала и отражательной идеально проводящей дифракционной решеткой. Показано, что дисперсионные зависимости, соответствующие собственным волнам этого волновода, имеют сложный вид: диапазоны частот, отвечающие поверхностным волнам, чередуются с диапазонами, где существуют комплексные волны (режим Брэгга).

Кроме того, обнаружено, что с приближением частоты к $\omega_p/\sqrt{2}$ (где $\varepsilon = -1$) дисперсионные кривые асимптотически стремятся к прямой $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$. Установлены диапазоны частот, в которых наблюдаются разного вида междутиповые связи собственных волн как с возникновением комплексных волн, так и междутиповой обмен только между поверхностными волнами.

Проанализировано влияние изменения прицельного параметра (расстояния между слоем метаматериала и решеткой) на постоянные распространения собственных волн. Показано, что для данного значения частоты существует диапазон значений прицельного параметра, где возникают комплексные волны с реальной частью нормированной постоянной распространения, принимающей постоянное значение $\text{Re}(\Phi) = 0,5$, что характерно для брэгговского режима взаимодействия волн.

1. *Extremely low frequency plasmons in metallic meso structures* / J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, I. Youngs // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – 76, N 25. – P. 4773–4776.
2. *Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena* / J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, W. J. Stewart // *IEEE Tran. on Microwave Theory and Techniques.* – 1999. – 47, N 11. – P. 2075–2084.
3. *Negative refraction* / J. B. Pendry // *Contemporary Physics.* – 2004. – 45, N 3. – P. 191–203.
4. *Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity* / D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier et al. // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – 84, N 18. – P. 4184–4187.
5. *Experimental verification of a negative index of refraction* / R. A. Shelby, D. R. Smith, S. Schultz // *Science.* – 2001. – 292, N 5514. – P. 77–79.
6. *Absorbing properties of a negative permittivity layer placed on a reflecting grating* / O. P. Kusaykin, P. N. Melezhik, A. Ye. Poyedynchuk, O. S. Troschylo // *Progress in Electromagnetics Research.* – 2006. – 64. – P. 135–148.
7. *Surface resonances of metal stripe grating on the plane boundary of metamaterial* / A. V. Brovenko, P. N. Melezhik, A. Y. Poyedynchuk et al. // *Progress in Electromagnetics Research.* – 2006. – 63. – P. 209–222.
8. *Absorption of Waves by a Grating Filled with a Metamaterial with a Negative Dielectric Constant* / O. P. Kusaykin, P. N. Melezhik, A. Ye. Poyedynchuk // *Telecommunications and Radio Engineering.* – 2007. – 66, N 3. – P. 187–200.

9. *Resonant scattering of electromagnetic wave by stripe grating backed with a layer of metamaterial* / A. V. Brovenko, P. N. Melezhik, A. Y. Poyedynchuk et al. // *Progress in Electromagnetics Research B.* – 2009. – 15. – P. 423–441.
10. *Кусайкин А. П. Эффект резонансного излучения электромагнитных волн дифракционной решеткой с метаматериалом* / А. П. Кусайкин, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук // *Письма в журн. техн. физики.* – 2009. – 35, вып. 1. – С. 26–34.
11. *Силин Р. А. Периодические волноводы* / Р. А. Силин. – М.: Фазис, 2002. – 252 с.
12. *Terahertz plasmonic high pass filter* / D. Wu, N. Fang, C. Sun et al. // *Applied Physics Lett.* – 2003. – 83, N 1. – P. 201–203.
13. *Шестопапов В. П. Динамическая теория решеток* / В. П. Шестопапов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1989. – 210 с.
14. *Дифракция волн на решетках* / В. П. Шестопапов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб. – Х.: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1973. – 288 с.
15. *Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов* / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
16. *Шестопапов В. П. Морсовские критические точки дисперсионных уравнений* / В. П. Шестопапов. – К.: Наук. думка, 1992. – 240 с.
17. *Свеженцев А. Е. Явление междутиповой связи поверхностных волн в частично экранированном диэлектрическом стержне* / А. Е. Свеженцев // *Докл. АН УССР. Сер. А.* – 1986. – № 7. – С. 58–62.

О. П. Кусайкин, П. М. Мележик,
А. Ю. Поединчук

DISPERSION CHARACTERISTICS OF PERIODIC WAVEGUIDE CONTAINING METAMATERIAL LAYER

Using the generalized scattering matrix method, a spectral problem on determination the propagation constants of the *TM* eigenmodes of a periodic waveguide formed by a metamaterial layer and diffraction grating, is solved. The study of the eigenmodes dispersion characteristics was conducted in the frequency range where the metamaterial permittivity is negative. Both the effect of modes coupling and a new kind of interaction between surface waves of the waveguide were found, the conditions for their manifestation were determined.

Key words: metamaterial, periodic waveguide, frequency dispersion, Bragg's reflection, surface and leaky waves, modes coupling.

О. П. Кусайкін, П. М. Мележик, А. Ю. Поєдинчук

ДИСПЕРСІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРІОДИЧНОГО ХВИЛЕВОДУ, ЩО МІСТИТЬ ШАР МЕТАМАТЕРІАЛУ

З використанням методу узагальнених матриць розсіяння вирішено спектральну задачу з визначення постійних поширювання власних *TM*-хвиль періодичного хвилеводу, утвореного шаром метаматеріалу і відбивними дифракційними ґратами. У діапазоні частот, де діелектрична проникність метаматеріалу набуває негативних значень, проведено дослідження особливостей поведінки дисперсійних залежностей власних хвиль. Виявлено прояв як ефекту міжтипового зв'язку, так і нового виду міжтипової взаємодії поверхневих хвиль даного хвилеводу, визначено умови їхнього прояву.

Ключові слова: метаматеріал, періодичний хвилевід, частотна дисперсія, бреггівське відбиття, поверхневі та витікаючі хвилі, міжтиповий зв'язок.

Рукопись поступила 31.05.11 г.