УДК 517.9+535.4

И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко
Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: petrusigor@yahoo.com

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД СШИВАНИЯ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛНОВОДНЫХ МОД ЧАСТЬ 1. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрено обобщение классического метода сшивания (*the mode-matching technique*), соответствующее новой постановке задачи дифракции волн на неоднородности в волноводе. Кратко изложен используемый матрично-операторный формализм модового анализа. Для канонической задачи о ступеньке в прямоугольном волноводе дан вывод формул Френеля для искомых операторов отражения и прохождения мод. Аналитически доказана корректность найденной матрично-операторной модели. Показано, что полученные результаты справедливы для класса задач дифракции волн на скачкообразных неоднородностях в волноводах. Развитый обобщенный метод сшивания предназначен для эффективного строгого решения задач анализа волноводных узлов и устройств микроволновой техники. Библиогр.: 22 назв.

Ключевые слова: метод сшивания, преобразование Кэли, формулы Френеля, оператор рассеяния.

В вычислительной электродинамике давно сложилась парадоксальная ситуация, связанная с использованием «метода сшивания» (также известного как метод частичных (соприкасающихся) областей, метод переразложения, *the mode-matching technique*) для решения задач дифракции волн на неоднородностях волноведущих трактов. С одной стороны, этот метод на протяжении полувека является востребованным и, по-видимому, наиболее широко распространенным, поскольку он достаточно универсален, относительно прост в реализации и позволяет получать вполне приемлемые для современной инженерной практики численные результаты. А с другой стороны, до настоящего времени удовлетворительное обоснование этого численно-аналитического метода в общем случае отсутствует; это означает, что для большинства практически важных задач метод сшивания мало чем отличается от эвристического подхода.

Классический метод сшивания всегда приводит, как известно, к математической модели в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Последний, особенно заметный всплеск интенсивного изучения метода сшивания приходится на период, когда было продемонстрировано аналитически и численно «явление относительной сходимости» приближенных решений этих СЛАУ сначала для частной задачи о бифуркации волновода ([1] и цитированные там работы), а затем и для других задач [2, 3]. Однако предпринятые дальнейшие усилия по доказательству существования, единственности и устойчивости решения бесконечной СЛАУ метода сшивания и нахождению условий сходимости проекционных приближений сколько-нибудь значащих новых результатов не принесли [4].

Очевидный застой в развитии теории метода сшивания на протяжении длительного времени его использования свидетельствует, по нашему мнению, об абсолютной непригодности матричной модели в виде бесконечной СЛАУ для решения проблемы обоснования этого метода.

Мы утверждаем, что бесконечные СЛАУ относительно вектора неизвестных коэффициентов (обобщенного) ряда Фурье, представляющего комплексную амплитуду поля, не присущи методу сшивания как таковому. Они возникают лишь в связи с определенной и, как представляется, весьма частной постановкой задачи дифракции.

Общепринято, что задача дифракции мод на неоднородности в волноводе ставится следующим образом. На неоднородности рассеивается одна заданная волноводная мода; требуется найти амплитуды возбужденных мод (как распространяющихся, так и высших).

Следствием такой постановки задачи являются все вышеупомянутые математические трудности, которые можно исключить, изменив формулировку задачи на следующую (по нашему мнению, более естественную): на неоднородность падает электромагнитная волна конечной мощности, поле которой составляет бесконечный набор мод с любым известным распределением амплитуд; необходимо найти операторы рассеяния.

При предлагаемой постановке задачи дифракции метод сшивания приводит к уравнению относительно оператора рассеяния, а не к бесконечной СЛАУ [5–8]. Метод введения этого оператора состоит в замене неизвестного вектора коэффициентов Фурье, принадлежащего пространству последовательностей H, $\mathbf{x} \in H$, на искомый матричный оператор $\mathbf{X}: H \to H$ будем именовать методом матричных операторов. Этот подход в прикладной электродинамике был, по-видимому, впервые последовательно реализован в работе [9].

Для канонической задачи о равномерном изгибе прямоугольного волновода было найдено [5], что новый подход естественным образом приводит к формулам Френеля

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{DD}^T - \mathbf{I}}{\mathbf{DD}^T + \mathbf{I}}; \quad \mathbf{T} = \left(\mathbf{DD}^T + \mathbf{I}\right)^{-1} 2\mathbf{D} \qquad (1)$$

для матричных операторов отражения $\mathbf{R}$ и прохождения $\mathbf{T}$ (здесь заданный оператор $\mathbf{D}$ определяется геометрией задачи и зависит от частоты поля ω). Затем этот результат был распространен на задачи дифракции волноводных мод на других неоднородностях [6–8].

Целью данной работы (в трех частях) является краткое изложение новых результатов теории метода сшивания, обобщенного с помощью введения матричных операторов, в применении к таким задачам, которые приводят к операторным формулам Френеля, включая строгое обоснование корректности матричной модели (1) (данная статья), доказательство применимости метода редукции для нахождения приближенных решений и факторизацию обобщенной матрицы рассеяния (работы готовятся к публикации).

Заметим, что изложенный подход также можно трактовать как дальнейшее развитие метода спектральных операторов рассеяния [10–12].

1. Скалярный модовый анализ. Пусть поле в простой (частичной) области V полностью определено скалярной комплексной амплитудой $U = U(\omega, \vec{r})$, зависящей от радиус-вектора $\vec{r} \in V$ и удовлетворяющей уравнению

$$\Delta U + k^2 U = \phi, \qquad (2)$$

где $k = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega$ – волновое число; $\operatorname{Im} k = 0$, а функция $\phi = \phi(\omega, \vec{r})$ задает источник поля. Область будем называть простой, если она допускает решение заданной граничной задачи для уравнения Гельмгольца (2) методом разделения переменных в подходящей системе координат. Здесь мы полагаем, что область V представлена конечным или полубесконечным отрезком регулярного волновода.

Обычное разложение комплексной амплитуды по волноводным модам запишем в виде

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \varphi_m(\vec{r}) = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\vec{r}), \qquad (3)$$

где $\mathbf{x} = \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ – вектор-строка искомых комплексных коэффициентов, подлежащих определению, а $\boldsymbol{\varphi}(\vec{r}) = \{\varphi_m(\vec{r})\}_{m=1}^{\infty}$ – суть вектор-столбец известных функций, представляющих моды заданного регулярного волновода. Будем рассматривать только «нормальные моды» вида

$$\varphi_m(\vec{r}) = \psi_m(\vec{r}_\perp)\exp(\gamma_m \zeta), \quad m = \overline{1, \infty}. \qquad (4)$$

Здесь $\psi_m(\vec{r}_\perp)$ обозначает собственную функцию однородной граничной задачи для поперечного сечения регулярного волновода $\vec{r}_\perp \in \Theta$, а γ_m есть постоянная распространения m-й моды вдоль продольной оси волновода $O\zeta$. Принятое представление (4) позволяет определить структуру $\boldsymbol{\varphi}(\vec{r})$ в матрично-векторном виде

$$\boldsymbol{\varphi}(\vec{r}) = \mathbf{E}(\zeta)\,\mathbf{ш}(\vec{r}_\perp). \qquad (5)$$

Здесь мы ввели диагональный матричный оператор $\mathbf{E}(\zeta) \equiv \{\delta_{mn} \exp(\gamma_m \zeta)\}$, такой, что $\mathbf{E}(0) = \mathbf{I}$ есть единичный оператор, а также вектор-столбец вещественнозначных поперечных собственных функций $\mathbf{ш}(\vec{r}_\perp)$, основные свойства которого определены равенствами

$$\mathbf{ш}^{\Phi}(\vec{r}_\perp)\,\mathbf{ш}(\vec{r}\,'_\perp) = \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}\,'_\perp); \quad \left(\mathbf{ш}, \mathbf{ш}^{\Phi}\right)_{\Theta} = \mathrm{I}, \qquad (6)$$

где использованы обычные обозначения для дельта-функции Дирака и скалярного (билинейного) произведения функций, T означает операцию транспонирования. Используя формулы (3) и (5), производную комплексной амплитуды вдоль оси волновода $O\zeta$ представим в виде

$$\partial_\zeta U = \mathbf{x} \cdot \partial_\zeta \boldsymbol{\varphi}(\vec{r}); \quad \partial_\zeta \boldsymbol{\varphi}(\vec{r}) = \mathbf{E}_\gamma(\zeta)\,\mathbf{ш}(\vec{r}_\perp), \qquad (7)$$

где $\mathbf{E}_\gamma(\zeta) \equiv \{\delta_{mn}\gamma_m \exp(\gamma_m \zeta)\}$. Для упрощения записи дальнейших выкладок будем также использовать обозначение $\mathbf{I}_\gamma \equiv \mathbf{E}_\gamma(0)$.

Поток колеблющейся мощности через поперечное сечение волновода в плоскости $\zeta = 0$ с точностью до несущественных множителей есть

$$F_{osc} = [\left(U, \partial_\zeta U\right)_{\Theta}]_{\zeta=0} = \mathbf{x}\,\mathbf{I}_\gamma \mathbf{x}^T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T, \qquad (8)$$

где введено обозначение $\mathbf{a} = \mathbf{x}\,\mathbf{I}_\gamma^{1/2}$. Поток комплексной мощности через то же сечение Θ определяется величиной

$$F_{cmp} = [\left(U, \partial_\zeta U^*\right)_{\Theta}]_{\zeta=0} = \mathbf{x}\,\mathbf{I}_\gamma^* \mathbf{x}^\dagger = \mathbf{a}\,\mathbf{U}\,\mathbf{a}^\dagger, \qquad (9)$$

где символами $*$ и $\dagger$ обозначено комплексное и эрмитово сопряжения соответственно, а $\mathbf{U} \equiv \mathbf{I}_\gamma^{-1/2}\,\mathbf{I}_\gamma^*\,\mathbf{I}_{\gamma^*}^{-1/2} = \{\delta_{mn} \exp[-i \arg(\gamma_m)]\}$ есть оператор волноводного порта (или плеча), однозначно определенный при условии $\gamma_m \neq 0, \forall m$.

Пусть при заданной частоте в рассматриваемом волноводе распространяется P типов волн. Введем ортопроекторы

$$\mathbf{P} = \left\{ \sum_{p=1}^{P} \delta_{mp}\,\delta_{pn} \right\}, \quad \mathbf{Q} = \left\{ \sum_{q=P+1}^{\infty} \delta_{mq}\,\delta_{qn} \right\}; \qquad (10)$$

так что $\mathbf{a}_- = \mathbf{a}\mathbf{P}$ и $\mathbf{a}_+ = \mathbf{a}\mathbf{Q}$ есть векторы амплитуд распространяющихся волн и всех высших типов колебаний, соответственно. Далее заметим, что оператор волноводного порта является унитарным, $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$, а из представления $\mathbf{U} = \mathbf{Q} \mp i\,\mathbf{P}$ следует, что его числовая область значений лежит полностью в четвертом или первом квадранте комплексной плоскости в соответствии с выбранным направлением течения времени $\exp(\pm i\omega t)$.

Наконец, постулируем, что поток комплексной мощности через волновод

$$F_{cmp}=\|\mathbf{a}_+\|^2_{\ell_2}\mp i\,\|\mathbf{a}_-\|^2_{\ell_2}$$

есть величина ограниченная, $|F_{cmp}|<\infty$ (при этом автоматически получаем условие $|F_{osc}|<\infty$). Это эквивалентно требованию $\mathbf{a}\in\ell_2 \Leftrightarrow \mathbf{x}\in\tilde{\ell}_2$, где $\ell_2\equiv\left\{\mathbf{a}:\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2<\infty\right\}$, $\tilde{\ell}_2\equiv\left\{\mathbf{x}:\sum_{m=1}^{\infty}|\gamma_m||x_m|^2<\infty\right\}$ есть гильбертовы пространства последовательностей комплексных чисел.

2. Матрично-операторный формализм. Изложим основы техники матричных операторов для скалярных задач стационарной теории дифракции волноводных мод.

В соответствии с новой постановкой задачи дифракции представим решение уравнения Гельмгольца (2) в виде ряда

$$U=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\,u_m(\vec{r})=\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}(\vec{r}), \tag{11}$$

в котором вектор-строка $\mathbf{b}=\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ задана, а $\mathbf{u}(\vec{r})=\{u_m(\vec{r})\}_{m=1}^{\infty}$ – вектор-столбец подлежащих определению функций (ср. с представлением (3)). Ввиду известной произвольности задания вектора $\mathbf{b}$ стандартная формулировка электродинамической задачи переносится на функцию $\mathbf{u}(\vec{r})$, которая, в частности, должна удовлетворять уравнению Гельмгольца и заданным граничным условиям. Следовательно, в каждом регулярном волноводе для каждой неизвестной функции $u_m(\vec{r})$, $m=1,2,\ldots$ имеем обычное разложение по волноводным модам, удовлетворяющее принципу суперпозиции для поля падающих, отраженных и прошедших волн.

Другими словами, представление рассматриваемой комплексной амплитуды U в виде разложения (11) равносильно замене коэффициентов Фурье $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ в модовом разложении поля (3) на элементы бесконечной матрицы, имеющей физический смысл оператора рассеяния волн. Итак, искомыми решениями являются операторы отражения и прохождения мод.

Пространства, которым принадлежат $\mathbf{b}$ и $u_m(\vec{r})$, $m=1,2,\ldots$, должны быть выбраны таким образом, чтобы исходная комплексная амплитуда (11) принадлежала пространству Соболева $H^1(V)$. Оказывается, что все получаемые формулы обладают максимальной простотой и симметрией, если положить $\mathbf{b}\in\ell_2$. При этом необходимо стандартизовать искомые операторы рассеяния к виду $\mathbf{R}:\ell_2\to\ell_2$ и $\mathbf{T}:\ell_2\to\ell_2$ (напр., [5]).

В соответствии с техникой матричных операторов введем представление $\mathbf{a}=\mathbf{b}\mathbf{L}$, где $\mathbf{L}:\ell_2\to\ell_2$ суть подходящий оператор рассеяния (конкретные реализации этого оператора будут даны в следующем разделе). Тогда, согласно выражению (8), поток колеблющейся мощности через плоскость $\zeta=0$ пропорционален величине

$$F_{osc}=[(U\,,\,\partial_\zeta U\,)_\Theta]_{\zeta=0}=\mathbf{b}\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{b}^T. \tag{12}$$

Заметим, что возникающий здесь оператор $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ обладает характерной симметрией относительно операции транспонирования. Формула (9) для потока комплексной мощности через то же сечение волновода дает

$$F_{cmp}=[(U\,,\,\partial_\zeta U^*)_\Theta]_{\zeta=0}=\mathbf{b}\mathbf{L}\,\mathbf{U}\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{b}^{\dagger}. \tag{13}$$

Учитывая свойства оператора порта, находим, что числовая область значений оператора $\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{L}^{\dagger}$ лежит в четвертом или первом квадранте комплексной плоскости. Указанные свойства операторов в выражениях (12) и (13) играют определяющую роль в дальнейшем анализе.

3. Операторные формулы Френеля. Рассмотрим каноническую задачу дифракции LM_{m0}, $m=1,2,\ldots$ или LE_{m1}, $m=0,1,\ldots$ мод на ступеньке в полом бесконечном прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками, заданными в декартовой системе координат. Геометрически область определения поля $\{x\in\Omega_s,\ s=1,2;\,y\in(0,l);\,z\in(-\infty,\infty)\}$ может быть разделена на две соприкасающиеся частичные подобласти с поперечным сечением $\Omega_1\times l$ и $\Omega_2\times l$. В дальнейшем без ограничения общности полагаем $\Omega_1=\Omega_2\cup\Omega'$. Референсную плоскость совместим с апертурой неоднородности $\{x\in\Omega_2\,;\,y\in(0,l);\,z=0\}$. Зависимость от времени примем в виде $\exp(i\omega t)$.

Пусть скалярная функция ${}^pU_q(x,z)$ обозначает комплексную амплитуду, определяющую в q-м волноводе все компоненты электромагнитного поля, источник которого расположен в p-м волноводе, $p,q=1,2$. Поле этого источника содержит полный спектр мод $\{LM_{m0}\}_{m=1}^{\infty}$ или $\{LE_{m1}\}_{m=0}^{\infty}$ с любым известным распределением амплитуд, объединенных в вектор-строку ${}^p\mathbf{b}=\{{}^pb_m\}_{m=(0)1}^{\infty}\in\ell_2$.

Условие непрерывности тангенциальных компонентов электрического и магнитного полей на референсной плоскости, записанное в виде

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} {}^pU_1 = {}^pU_2, \\ \partial_z\, {}^pU_1 = \partial_z\, {}^pU_2, \end{matrix}\right\} & x \in \Omega_2, \\ \left.\begin{matrix} {}^pU_1 = 0, \quad (LM) \\ \partial_z\, {}^pU_1 = 0, \, (LE) \end{matrix}\right\} & x \in \Omega', \end{cases} \quad z = 0,\ p = 1, 2,$$

приводит к импликации

$$\begin{cases} {}^p\mathbf{b}\left({}^p\mathbf{u}_1 - {}^p\mathbf{u}_2\right) = 0, \\ {}^p\mathbf{b}\,\partial_z\left({}^p\mathbf{u}_1 - {}^p\mathbf{u}_2\right) = 0, \end{cases} \quad \forall\, {}^p\mathbf{b} \in \ell_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} {}^p\mathbf{u}_1 = {}^p\mathbf{u}_2, \\ \partial_z\, {}^p\mathbf{u}_1 = \partial_z\, {}^p\mathbf{u}_2, \end{cases} \quad x \in \Omega_2,\ z = 0. \qquad (14)$$

Здесь ключевой момент состоит в том, что вектор ${}^p\mathbf{b}$ является общим для двух частичных областей. Аналогичные рассуждения приводят к однородным граничным условиям

$$\begin{matrix} {}^p\mathbf{u}_1 = 0, \quad (LM) \\ \partial_z\, {}^p\mathbf{u}_1 = 0, \ (LE) \end{matrix} \quad x \in \Omega',\ z = 0 \qquad (15)$$

на торце ступеньки.

На референсной плоскости разложения по модам для рассматриваемых функций имеют вид $(p, q = 1, 2)$

$${}^p\mathbf{u}_q(x,0) = \begin{cases} \left(\mathbf{I} + {}^p\mathbf{R}\right)\mathbf{I}_{\gamma p}^{-1/2}\,\text{ш}_p(x), & q = p, \\ {}^{pq}\mathbf{T}\,\mathbf{I}_{\gamma q}^{-1/2}\,\text{ш}_q(x), & q \neq p, \end{cases} \quad x \in \Omega_2; \qquad (16)$$

$$\left(\partial_z\, {}^p\mathbf{u}_q\right)(x,0) = \begin{cases} (\mp)\left(\mathbf{I} - {}^p\mathbf{R}\right)\mathbf{I}_{\gamma p}^{1/2}\,\text{ш}_p(x), & q = p, \\ (\mp)\ {}^{pq}\mathbf{T}\,\mathbf{I}_{\gamma q}^{1/2}\,\text{ш}_q(x), & q \neq p, \end{cases} \qquad (17)$$
$$p = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad x \in \Omega_2.$$

Подставляя выражения (16) и (17) в (14), получим систему матричных равенств для $x \in \Omega_2$

$$\begin{cases} \left(\mathbf{I} + {}^p\mathbf{R}\right)\mathbf{I}_{\gamma p}^{-1/2}\,\text{ш}_p(x) = {}^{pq}\mathbf{T}\,\mathbf{I}_{\gamma q}^{-1/2}\,\text{ш}_q(x), \\ \left(\mathbf{I} - {}^p\mathbf{R}\right)\mathbf{I}_{\gamma p}^{1/2}\,\text{ш}_p(x) = {}^{pq}\mathbf{T}\,\mathbf{I}_{\gamma q}^{1/2}\,\text{ш}_q(x), \end{cases} \qquad (18)$$

а из граничных условий (15) находим

$$\begin{cases} \left(\mathbf{I} \pm {}^1\mathbf{R}\right)\mathbf{I}_{\gamma_1}^{\mp 1/2}\,\text{ш}_1(x) = 0, \\ {}^{21}\mathbf{T}\,\mathbf{I}_{\gamma_1}^{\mp 1/2}\,\text{ш}_1(x) = 0, \end{cases} \quad x \in \Omega'. \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Применяя к соотношениям (18), (19) процедуру Бубнова–Галеркина, формально получаем искомое решение

$$\begin{cases} {}^1\mathbf{R} = (\pm)\left(\mathbf{D}_1 - \mathbf{I}\right)\left(\mathbf{D}_1 + \mathbf{I}\right)^{-1}, \\ {}^{12}\mathbf{T} = \left(\mathbf{D}_1 + \mathbf{I}\right)^{-1} 2\,\mathbf{D}_0, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} {}^2\mathbf{R} = (\mp)\left(\mathbf{D}_2 - \mathbf{I}\right)\left(\mathbf{D}_2 + \mathbf{I}\right)^{-1}, \\ {}^{21}\mathbf{T} = \left(\mathbf{D}_2 + \mathbf{I}\right)^{-1} 2\,\mathbf{D}_0^T. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Здесь мы ввели обозначения

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{I}_{\gamma_1}^{\pm 1/2}\left(\text{ш}_1, \text{ш}_2^{\Phi}\right)_{\Omega_2}\mathbf{I}_{\gamma_2}^{\mp 1/2}, \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix} \qquad (21)$$
$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_0\mathbf{D}_0^T, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_0^T\mathbf{D}_0.$$

Полученное решение (20) суть формулы Френеля для операторов отражения и прохождения волноводных мод.

Существование обратных операторов в решении (20) вытекает из закона сохранения комплексной мощности и будет строго доказано в разд. 6. Здесь мы отметим свойства симметрии операторов рассеяния, следующие из полученного решения. Действительно, из первой формулы Френеля получаем

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{I} - 2\left(\mathbf{D}_p + \mathbf{I}\right)^{-1} = \mathbf{R}_p^T,$$
$$\mathbf{R}_p = \begin{cases} (\pm)\ {}^1\mathbf{R}, & p = 1, \\ (\mp)\ {}^2\mathbf{R}, & p = 2, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix} \qquad (22)$$

поскольку $\mathbf{D}_p^T = \mathbf{D}_p$, $p = 1, 2$ по определению (21). Свойство симметрии для операторов прохождения мод ${}^{pq}\mathbf{T}^T = {}^{qp}\mathbf{T}$ проверяется непосредственной подстановкой.

Отметим, что первая операторная формула Френеля в (20) известна, как преобразование Кэли [13] (в дальнейшем мы будем использовать оба эти названия как равноправные). При выполнении условия существования этого преобразования, $-1 \notin \sigma\left(\mathbf{D}_p\right)$, оно является обратимым:

$$\mathbf{R}_p = \frac{\mathbf{D}_p - \mathbf{I}}{\mathbf{D}_p + \mathbf{I}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D}_p = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{R}_p}{\mathbf{I} - \mathbf{R}_p}. \qquad (23)$$

В этих формулах трансформанта Кэли записана в форме Г. Вейля [13].

4. Принцип взаимности и закон сохранения энергии в операторной форме. В пространстве комплексных амплитуд необходимо учитывать 4 базовых энергетических закона [14–16]. В их числе первая и вторая теоремы Лоренца [15], теорема о колеблющейся мощности [17] и общеизвестная теорема о комплексной мощности. Для рассматриваемой задачи эти теоремы дают приведенные ниже 4 группы операторных равенств, которые определяют основные свойства искомых операторов рассеяния [5, 8, 14]. При выводе этих равенств используется фундаментальное свойство пространства ℓ_2: каждый оператор однозначно определен своей квадратичной формой.

Итак, условие непрерывности потока колеблющейся мощности через апертуру неоднородности и первая лемма Лоренца дают четыре матричные соотношения:

$$\left({}^p\mathbf{u}_1, \partial_z\, {}^p\mathbf{u}_1^T\right)_{\Omega_1} = \left({}^p\mathbf{u}_2, \partial_z\, {}^p\mathbf{u}_2^T\right)_{\Omega_2}, \ p, q = 1, 2,$$
$$\left({}^p\mathbf{u}_1, \partial_z\, {}^q\mathbf{u}_1^T\right)_{\Omega_1} = \left({}^p\mathbf{u}_2, \partial_z\, {}^q\mathbf{u}_2^T\right)_{\Omega_2}, \ q \neq p. \qquad (24)$$

Подставляя в эти равенства представления (16), (17), (19) и используя свойство ортогональности поперечных собственных функций (6), находим

$$ {}^{p}\mathbf{R}^{T} = {}^{p}\mathbf{R}, \quad {}^{pq}\mathbf{T}^{T} = {}^{qp}\mathbf{T}; \tag{25} $$

$$ {}^{p}\mathbf{R}^{2} + {}^{pq}\mathbf{T}\,{}^{pq}\mathbf{T}^{T} = \mathbf{I}; \tag{26} $$

$$ {}^{p}\mathbf{R}\,{}^{pq}\mathbf{T} + \left({}^{q}\mathbf{R}\,{}^{qp}\mathbf{T}\right)^{T} = \mathbf{0}. \tag{27} $$

Эти операторные соотношения обычно записывают в виде свойств симметрии $\mathbf{S}^{T} = \mathbf{S}$ и инволютивности $\mathbf{S}^{2} = \mathbf{I}$ (или $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}$) обобщенной матрицы рассеяния. Последнее свойство означает, что операторы $(\mathbf{I} \pm \mathbf{S})/2$ являются проекторами (но не ортопроекторами), из чего следует, что спектр $\sigma(\mathbf{S})$ состоит всего из двух точек $\{+1, -1\}$ бесконечной кратности, а $\mathbf{S}$ есть симметрия (не эрмитовая) пространства ℓ_2. Как следствие, обобщенный иммитанс (т. е. преобразование Кэли оператора $\mathbf{S}$) для скачкообразных неоднородностей не определен [14].

Далее, следствиями непрерывности потока комплексной мощности через апертуру неоднородности и второй леммы Лоренца будут 4 равенства:

$$ \begin{aligned} &\left({}^{p}\mathbf{u}_1, \partial_z\, {}^{p}\mathbf{u}_1^{\dagger}\right)_{\Omega_1} = \left({}^{p}\mathbf{u}_2, \partial_z\, {}^{p}\mathbf{u}_2^{\dagger}\right)_{\Omega_2}, \; p, q = 1, 2, \\ &\left({}^{p}\mathbf{u}_1, \partial_z\, {}^{q}\mathbf{u}_1^{\dagger}\right)_{\Omega_1} = \left({}^{p}\mathbf{u}_2, \partial_z\, {}^{q}\mathbf{u}_2^{\dagger}\right)_{\Omega_2}, \; q \neq p. \end{aligned} \tag{28} $$

Отсюда следуют операторные соотношения

$$ \left(\mathbf{I} + {}^{p}\mathbf{R}\right)\mathbf{U}_p\left(\mathbf{I} - {}^{p}\mathbf{R}^{\dagger}\right) = {}^{pq}\mathbf{T}\,\mathbf{U}_q\,{}^{pq}\mathbf{T}^{\dagger}; \tag{29} $$

$$ {}^{pq}\mathbf{T}\,\mathbf{U}_q\left(\mathbf{I} - {}^{q}\mathbf{R}^{\dagger}\right) = \left(\mathbf{I} + {}^{p}\mathbf{R}\right)\mathbf{U}_p\,{}^{qp}\mathbf{T}^{\dagger}, \tag{30} $$

которые объединяются в простое равенство для характеристического оператора рассеяния [16]

$$ \mathbf{G} \equiv (\mathbf{I} + \mathbf{S})\,\mathbf{U}\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{\dagger}\right) = 0, \; \mathbf{U} = \operatorname{diag}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2). \tag{31} $$

Полученный закон сохранения энергии в операторной форме (31) справедлив для всех задач дифракции волн на скачкообразной неоднородности в волноводе [14, 16].

Как будет показано далее, соотношения (25)–(27) позволяют обобщить полученные операторные формулы Френеля на весь класс задач дифракции мод для соответствующих волноводных 4-полюсников. В свою очередь, закон сохранения энергии в операторной форме (29)–(31) гарантирует существование, единственность и устойчивость полученного решения (20).

5. Универсальность операторной модели. Операторные формулы Френеля (20) тождественно удовлетворяют соотношениям (25)–(27), что легко проверить прямой подстановкой. Покажем, что в свою очередь эти энергетические соотношения, справедливые для всего класса задач рассматриваемого типа, приводят к операторным формулам Френеля.

Для этого запишем равенство (26) в виде

$$ (\mathbf{I} + \mathbf{R})(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{T} = \mathbf{T}\,\mathbf{T}^{T} \tag{32} $$

и будем его трактовать как уравнение относительно операторов отражения и прохождения мод (в данном разделе для упрощения записи индексы операторов p, q опущены). Из этого уравнения следует, что точки спектров $\lambda \in \sigma(\mathbf{R})$ и $\tau \in \sigma\left(\mathbf{T}\mathbf{T}^{T}\right)$ принадлежат алгебраической кривой

$$ \lambda^2 + \tau = 1, \quad \lambda, \tau \in \mathbb{C}, \tag{33} $$

для которой известно решение задачи униформизации в виде рациональных функций [18]. Запишем это решение в виде

$$ \lambda = \frac{t-1}{t+1}, \quad \tau = \frac{4t}{(t+1)^2}, \quad t \neq -1. \tag{34} $$

На основании теоремы об отображении спектра (напр., [19]) заключаем, что существует такой оператор $\mathbf{D}$, что $t = (1+\lambda)/(1-\lambda) \in \sigma(\mathbf{D})$ и справедливо представление

$$ \mathbf{R} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{I}}{\mathbf{D} + \mathbf{I}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathbf{I} + \mathbf{R} = 2\,(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{D}; \\ \mathbf{I} - \mathbf{R} = 2\,(\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}. \end{cases} \tag{35} $$

Учитывая свойство симметрии оператора отражения (25), получаем $\mathbf{D} = \widetilde{\mathbf{D}}_0 \widetilde{\mathbf{D}}_0^{T}$, где $\widetilde{\mathbf{D}}_0 \colon \ell_2 \to \ell_2$ пока произвольный ограниченный матричный оператор. Тогда из равенства (32) с учетом соотношений (35) следует вторая формула Френеля

$$ \mathbf{T} = (\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} 2\,\mathbf{D}_0. \tag{36} $$

Здесь обозначено $\mathbf{D}_0 = \widetilde{\mathbf{D}}_0 \mathbf{C}$, где второй сомножитель обладает свойством $\mathbf{C}\mathbf{C}^{T} = \mathbf{I}$, так что сразу можно положить $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_0^{T}$. Теперь произвольный ограниченный матричный оператор $\mathbf{D}_0$ должен быть доопределен законом сохранения комплексной мощности (31), что будет сделано в разд. 6. Заметим, что невозможно иначе распределить рациональные функции в равенствах (34), поскольку в дальнейшем это приводит к невыполнению соотношений (25) и (27).

Таким образом, принципиальная возможность параметризации кривой (33) с помощью однозначных функций (34) в данном случае гарантирует существование единого оператора задачи, который полностью определяет закон отражения и прохождения мод.

Теорема 1. Для каждой задачи дифракции мод на скачкообразной неоднородности в волноводе, для которой имеет место теорема взаимности и теорема о колеблющейся мощности в форме равенств (25)–(27), существует математическая модель в виде операторных формул Френеля (35) и (36).

6. Корректность операторных формул Френеля. В терминах трансформанты Кэли $\mathbf{D}_p$

закон сохранения энергии в формах (29)–(31) принимает особенно простой вид, что позволяет исследовать основные свойства этого оператора и тем самым доказать корректность матричной модели в виде формул Френеля (20).

Во-первых, из формулы (31) вытекает, что все операторные соотношения закона сохранения комплексной мощности следуют из единственного условия †

$$\mathbf{D}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^\dagger \\ \mathbf{U}_1 \end{Bmatrix} \mathbf{D}_0^* \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_2^\dagger \end{Bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix} \tag{37}$$

выделяющего этот элементарный оператор задачи из множества ограниченных матричных операторов. Для рассмотренной канонической задачи о ступеньке в прямоугольном волноводе условие (37) совпадает со свойством билинейного скалярного произведения вещественнозначных собственных функций $\mathrm{Im}\left(\text{ш}_p, \text{ш}_p^T\right) = 0$.

Во-вторых, закон сохранения энергии (29) может быть записан в виде

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{D}_1\mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_1\mathbf{D}_1^\dagger \end{matrix}\right\} = \mathbf{D}_0\mathbf{U}_2\mathbf{D}_0^\dagger, \quad \left.\begin{matrix} \mathbf{U}_2\mathbf{D}_2^\dagger \\ \mathbf{D}_2\mathbf{U}_2 \end{matrix}\right\} = \mathbf{D}_0^T\mathbf{U}_1\mathbf{D}_0^*. \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix} \tag{38}$$

Эти равенства означают, что область числовых значений оператора $\mathbf{D}_p\mathbf{U}_p$ $\left(\mathbf{D}_p\mathbf{U}_p^\dagger\right)$, $p = 1, 2$, полностью лежит в четвертом (первом) квадранте комплексной плоскости. На основании известных геометрических свойств пространства ℓ_2 в работе [20] было установлено, что при этом условии оператор $\mathbf{D}_p$ является m-аккретивным, т. е. $\mathrm{Re}\,\mathbf{D}_p > 0$. В этом доказательстве используются понятия и идеи теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой (в данном случае в пространстве Понтрягина [21]).

Исходя из свойства преобразования Кэли

$$\mathrm{Re}\,\mathbf{D}_p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\| {}^p\mathbf{R} \right\| < 1 \tag{39}$$

заключаем, что оператор отражения есть строгое сжатие.

Теорема 2. Решение задачи дифракции мод на ступеньке в волноводе в виде формул Френеля для операторов рассеяния (20) существует и является единственным.

Далее, введем в рассмотрение оператор $\mathbf{A}_p \equiv \left(\mathbf{D}_p + \mathbf{I}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_p\right)$, для которого прямым вычислением находим

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\mathbf{A}_p &= \mathbf{A}_p\mathbf{A}_p^\dagger + \mathbf{A}_p\left(\mathrm{Re}\,\mathbf{D}_p\right)\mathbf{A}_p^\dagger = \\ &= \mathbf{A}_p^\dagger\mathbf{A}_p + \mathbf{A}_p^\dagger\left(\mathrm{Re}\,\mathbf{D}_p\right)\mathbf{A}_p > 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Следовательно, этот оператор является m-аккретивным сжатием, $\mathrm{Re}\,\mathbf{A}_p > \mathbf{A}_p\mathbf{A}_p^\dagger$.

Определим «число обусловленности» этого матричного оператора по формуле $\mathrm{cond}\left(\mathbf{A}_p\right) \equiv \left\|\mathbf{A}_p\right\| \left\|\mathbf{A}_p^{-1}\right\|$, тогда верна оценка

$1 \le \mathrm{cond}\left(\mathbf{A}_p\right) \le 1 + \left\|\mathbf{D}_p\right\| < \infty.$

Тем самым доказана устойчивость полученного решения (20) на множестве ограниченных операторов, определенных на всем пространстве ℓ_2.

7. Разнообразие форм решения задачи. Эквивалентные преобразования операторных формул Френеля (20) приводят к другим эффективным формам искомого решения. Представим здесь это решение посредством введенного выше оператора $\mathbf{A}_p$, $p = 1, 2$ в виде таблицы

$$\begin{matrix} {}^1\mathbf{R} = (\pm)(\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_1), & {}^{12}\mathbf{T} = 2\mathbf{A}_1\mathbf{D}_0, \\ {}^{21}\mathbf{T} = 2\mathbf{A}_2\mathbf{D}_0^T, & {}^2\mathbf{R} = (\mp)(\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_2). \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix}$$

Используя обобщенную матрицу рассеяния $\mathbf{S}$, этому представлению очевидным образом можно придать компактную форму

$$\mathbf{S} = (\pm)\mathbf{J}_0 + 2\mathbf{A}(\mathbf{V}_0 \mp \mathbf{J}_0), \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix}$$

в которой диагональные операторные матрицы

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{D}_0^T & 0 \end{bmatrix}$$

есть, соответственно, каноническая симметрия пространства $\left(\ell_2\right)^2$, m-аккретивное сжатие и симметричный оператор задачи. Извлекая квадратный корень из оператора $\mathbf{A}$, приходим к соотношению

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{V}_0 \mp \mathbf{J}_0\right) = \left(\mathbf{V}_0 \mp \mathbf{J}_0\right)^{-1},$$

причем правая часть этого равенства определяет m-аккретивный оператор.

Таким образом, искомое решение принимает простой вид

$$\mathbf{S} = (\pm)\mathbf{J}_0 + 2\left(\mathbf{V}_0 \mp \mathbf{J}_0\right)^{-1} = 2\mathbf{A}^{1/2} \pm \mathbf{J}_0, \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix} \tag{41}$$

особенно удобный с точки зрения компьютерных вычислений.

Другое эквивалентное представление решения, вытекающее из формулы (41), суть преобразование Кэли

$$\mathbf{S}\,\mathbf{J}_0 = \pm\left(\mathbf{J}_0\mathbf{V}_0 \pm \mathbf{J}_0\right)\left(\mathbf{J}_0\mathbf{V}_0 \mp \mathbf{J}_0\right)^{-1}, \quad \begin{pmatrix} LM \\ LE \end{pmatrix} \tag{42}$$

связывающее операторные матрицы

$$\mathbf{S}\,\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{R} & -{}^{12}\mathbf{T} \\ {}^{21}\mathbf{T} & -{}^2\mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_0\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}_0 \\ -\mathbf{D}_0^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Выражение (42) также может быть эффективно использовано для вычислений.

Выводы. Характерные для стандартного метода сшивания трудноразрешимые проблемы доказательства существования, единственности и устойчивости решения итоговой бесконечной СЛАУ являются следствием общепринятой частной формулировки задачи дифракции, а не собственно метода сшивания.

Предложенная новая постановка задачи дифракции волн приводит к естественному обобщению классического метода сшивания. По своей сути, новый подход означает замену неизвестных коэффициентов Фурье на элементы искомого матричного оператора рассеяния (метод матричных операторов в теории дифракции). Как результат, корректность полученной матричной модели обобщенного метода сшивания может быть строго доказана.

С этой новой точки зрения матричная модель в виде бесконечной СЛАУ отнюдь не соответствует сущности метода сшивания, а является таким ничем не оправданным усечением общего матрично-операторного уравнения, которое приводит к фатальной потере необходимой информации о свойствах как самого решения, так и заданного оператора задачи.

Изложенные выше основы техники матричных операторов для скалярных задач стационарной дифракции волноводных мод позволяют естественным образом ввести матричные операторы рассеяния как истинные искомые величины метода сшивания.

На примере канонической задачи дифракции волн на ступеньке в H-(E-)плоскости в прямоугольном волноводе продемонстрирован вывод формул Френеля для операторов отражения и прохождения мод (20).

Полученные результаты применения обобщенного метода сшивания допускают распространение на другие задачи дифракции мод на скачкообразной неоднородности в волноводе (т. е. неоднородности, собственный объем которой равен нулю). Возможность выделения этого класса задач из всего многообразия задач дифракции волноводных мод следует из базовых энергетических законов. Именно, если для волноводных 4-полюсников записать 4 известных энергетических закона для объема V_d, содержащего скачкообразную неоднородность, то при переходе к пределу $V_d \to 0$ с учетом «условия на ребре» приходим к формулам (24) и (28). Следовательно, рассматриваемый класс задач дифракции мод полностью определен как такой, для которого выполняются соотношения (25)–(27) и (29)–(31), связывающие между собой искомые матричные операторы рассеяния.

Если допустить для каждой задачи этого класса наличие единого «оператора задачи», заданного геометрией неоднородности и зависящего от частоты, то, как найдено, из энергетических соотношений (25)–(27) вытекает существование матричной модели в виде формул Френеля для операторов отражения и прохождения мод (20).

Доказано, что корректность операторных формул Френеля является прямым следствием закона сохранения комплексной мощности и второй леммы Лоренца в операторной форме (29)–(31). Тем самым полностью решена проблема строгого обоснования матричной модели обобщенного метода сшивания.

Найденные операторные формулы Френеля порождают разнообразные эквивалентные формы решения, которые позволяют выявить структуру операторов рассеяния. Решения в форме (41), (42) имеет смысл использовать для разработки эффективных численных алгоритмов.

Разработанный и строго обоснованный метод расчета дифракции мод на волноводных неоднородностях следует рассматривать как обобщение широко используемого в прикладной электродинамике классического метода сшивания.

Библиографический список

1. *Миттра Р.* Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли; пер. с англ. под ред. Г. В. Воскресенского. – М.: Мир, 1974. – 327 с.
2. *Вычислительные* методы в электродинамике / под ред. Р. Миттры, – М.: Мир, 1977.– 485 с.
3. *Шестопалов В.* Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции / В. Шестопалов, А. Кириленко, С. Масалов. – К.: Наук. думка, 1984. – 296 с.
4. *Dudley D.* Mathematical foundations for electromagnetic theory / D. Dudley. – N. Y.: IEEE Press, 1994. – 264 p.
5. *Petrusenko I. V.* Analytic – numerical analysis of waveguide bends / I. V. Petrusenko // Electromagnetics. – 2004. – 24, N 4. – P. 237–254.
6. *Petrusenko I. V.* Matrix operator technique for analysis of wave transformers / I. V. Petrusenko // 10th Intern. conf. on mathematical methods in electromagnetic theory (MMET'04): proc. – Dnipropetrovs'k, 2004. – P. 118–120.
7. *Petrusenko I. V.* Mode diffraction: analytical justification of matrix models and convergence problems / I. V. Petrusenko // 11th Intern. conf. on mathematical methods in electromagnetic theory (MMET'06): proc. – Kharkov, 2006. – P. 332–337.
8. *Petrusenko I. V.* Fresnel formulae for scattering operators / I. V. Petrusenko , Yu. K. Sirenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2011. – 70, N 9. – P. 749–758.
9. *Шестопалов В. П.* Матричные операторы в задачах дифракции / В. П. Шестопалов, В. В. Щербак // Изв. вузов. Радиофизика. – 1968. – 9, № 2. – С. 285-295.
10. *Резонансное* рассеяние волн: в 2 т. Т. 1. Дифракционные решетки / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1986. – 232 с.
11. *Шестопалов В. П.* Резонансное рассеяние волн: в 2 т. Т. 2. Волноводные неоднородности / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, Л. А. Рудь. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
12. *Литвиненко Л. Н.* Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах / Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин. – К.: Наук. думка, 1984. – 240 с.
13. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления / Г. Вейль; пер. с англ. под ред. Д. А. Райкова. – М.: Гос. изд. иностр. лит., 1947. – 408 с.
14. *Petrusenko I. V.* Basic properties of the generalized scattering matrix of waveguide transformers / I. V. Petrusenko // Electromagnetics. – 2006. – 26, N 8. – P. 601–614.

15. *Petrusenko I. V.* The lost «second Lorentz theorem» in the phasor domain / I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2009. – 68, N 7. – P. 555–560.
16. *Petrusenko I. V.* Generalization of the power conservation law for scalar mode-diffraction problems / I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2009. – 68, N 16. – P. 1399–1410.
17. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
18. *Гурвиц А.* Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. – М.: Наука, 1968. – 648 с.
19. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики: в 2 т. Т. 1 / Р. Рихтмайер; пер. с англ. под ред. И. Д. Софронова. – М.: Мир, 1982. – 488 с.
20. *Petrusenko I. V.* Abrupt discontinuities: The reflection operator is a contraction / I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2008. – 67, N 19. – P. 1701–1709.
21. *Азизов Т. Я.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов. – М.: Наука, 1986. – 352 с.

Рукопись поступила 22.03.12.

I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko

GENERALIZED MODE-MATCHING TECHNIQUE IN THE THEORY OF MODE DIFFRACTION. PART I. FRESNEL FORMULAE FOR SCATTERING OPERATORS

A generalization of the classical mode-matching technique, which corresponds to a new formulation of the scalar problem of mode diffraction on the waveguide discontinuity, is proposed. The used matrix-operator formalism of the modal analysis is briefly presented. The Fresnel formulae for the sought-for operators of mode reflection and transmission are derived for the canonical problem of the step discontinuity in a rectangular waveguide. The correctness of the obtained matrix-operator model is proved analytically. It is shown that these results are valid for a class of the problems of wave diffraction on the abrupt discontinuity in a waveguide. This generalized mode-matching technique was developed for efficient and rigorous analysis of microwave devices.

Key words: mode-matching technique, Cayley's transform, Fresnel formulae, scattering operator.

І. В. Петрусенко, Ю. К. Сіренко

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ЗШИВАННЯ В ТЕОРІЇ ДИФРАКЦІЇ МОД ХВИЛЕВОДІВ ЧАСТИНА І. ФОРМУЛИ ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРІВ РОЗСІЮВАННЯ

Розглянуто узагальнення класичного методу зшивання (*the mode-matching technique*), що відповідає новому формулюванню задачі дифракції хвиль на неоднорідності у хвилеводі. Коротко викладено матрично-операторний формалізм модового аналізу, що використовується. Для канонічної задачі про сходинку у прямокутному хвилеводі виведено формули Френеля для шуканих операторів відбиття та проходження мод. Аналітично доведена коректність знайденої матрично-операторної моделі. Показано, що отримані результати дійсні для класу задач дифракції хвиль на стрибкоподібних неоднорідностях у хвилеводах. Розвинений узагальнений метод зшивання призначено для ефективного строгого розв'язування задач аналізу хвилевідних вузлів і пристроїв мікрохвильової техніки.

Ключові слова: метод зшивання, трансформація Келі, формули Френеля, оператор розсіювання.