УДК 517.9+535.4

И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко
Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: petrusigor@yahoo.com

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД СШИВАНИЯ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛНОВОДНЫХ МОД ЧАСТЬ III. РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА РЕЗОНИРУЮЩИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

Проблема обоснования корректности матричных моделей метода сшивания для задач резонансного рассеяния волн на неоднородностях в волноводах оставалась актуальной на протяжении всего времени использования этого метода. Второй нерешенной задачей является обоснование метода редукции для решения получаемых матричных уравнений. Целью настоящей работы является строгое доказательство корректности математической модели в виде операторных формул Френеля для указанного класса задач дифракции мод, построение проекционных приближений для искомых операторов рассеяния и обоснование их сходимости. Использован обобщенный метод сшивания. Для операторов рассеяния получены «обобщенные операторные формулы Френеля». Доказана универсальность построенной операторной модели в виде преобразования Кэли. Показано, что область корректности этой модели полностью определена найденными операторными свойствами обобщенной матрицы рассеяния. Аналитически доказана безусловная сходимость проекционных приближений к точному решению. Метод сшивания, широко используемый для решения скалярных задач дифракции волноводных мод, имеет матрично-операторную природу и адекватный этой природе математический аппарат, а именно теорию операторов в гильбертовом пространстве. Предложенное обобщение метода сшивания следует использовать для строго анализа микроволновых устройств. Библиогр.: 13 назв.

Ключевые слова: метод сшивания, волноводные трансформаторы, преобразование Кэли.

В предыдущих частях работы [1, 2] изложены основы обобщенного метода сшивания, с помощью которого были получены операторные формулы Френеля для скачкообразных (т. е. имеющих собственный объем $V=0$) неоднородностей волноводного тракта. Оказывается, что этот метод также приводит к аналогичным операторным соотношениям (или «обобщенным операторным формулам Френеля») и в случае «объемных» ($V \neq 0$, т. е. образующих открытый резонатор) волноводных неоднородностей, но уже для обобщенной матрицы рассеяния **S**.

В данной части работы рассматриваются особенности применения метода сшивания, обобщенного посредством введения матричных операторов рассеяния, для анализа дифракции мод в общем случае $V \neq 0$ полых H-(E-) плоскостных трансформаторов волн, включающего:

– методику построения матрично-операторной модели;

– выявление условий существования искомого решения и строгое доказательство корректности найденной модели;

– аналитическое исследование сходимости приближений метода редукции к точному решению и поведения числа обусловленности матричных операторов.

Текст настоящей статьи структурирован следующим образом. Вначале мы вводим операторные матрицы, необходимые для полного описания характеристик плоских трансформаторов волн. Затем в терминах обобщенной матрицы рассеяния **S** и ее преобразования Кэли формулируем базовые энергетические законы, играющие ключевую роль в последующем анализе и недостаточно полно освещенные в известной литературе. Далее для классической задачи излома прямоугольного волновода на прямой угол мы выводим обобщенную формулу Френеля для оператора **S** и доказываем универсальность этой матрично-операторной модели для всего класса рассматриваемых задач. Вслед за этим мы обосновываем существование, единственность и устойчивость найденного решения, а также безусловную сходимость проекционных приближений.

В статье используются основные понятия и терминология первых двух частей работы [1, 2]; ниже приведены необходимые обобщения.

1. Класс исследуемых задач дифракции мод и используемые обозначения. Будем рассматривать скалярную задачу дифракции LM_{m0}-(LE_{m1}-), $m=(0),\ 1,\ \ldots,$ мод в полом H-(E-) плоскостном волноводном трансформаторе с N входами, $N=1,\ 2,\ \ldots,$ имеющем стандартную конфигурацию [3, 4]. Резонирующий объем и подводящие энергию регулярные волноводы являются однородными вдоль декартовой оси, перпендикулярной H-(E-) плоскости. Предполагается, что область определения поля заполнена однородной средой без потерь, металлические стенки на границах этой области являются идеально проводящими, а волноводные плечи устройства идеально согласованы с нагрузкой. Объем $V \neq 0$, замкнутый металлическими стенками области взаимодействия волн и референсными плоскостями $\Theta_n, n=\overline{1,N}$, которые расположены в регулярных волноводах, полагается свободным от источников/стоков поля. Временная зависимость принята в виде $\exp(i\omega t)$, $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\operatorname{Im}k=0$, суть волновое число.

Примем, что в каждом из N входов устройства модовый состав поля падающей волны описывается бесконечным вектором-строкой комплексных амплитуд $\mathbf{b}_n \in \ell_2, n = \overline{1,N}$. Тогда вектор амплитуд заданных источников поля $\mathbf{b} \equiv \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_N\}$ принадлежит гильбертову пространству $h \equiv (\ell_2)^N$. Пусть для n-го волноводного плеча P_n-типов волн являются распространяющимися. Соответствующий ортопроектор обозначим $\mathbf{P}_{P_n}$ и с его помощью образуем операторную матрицу проектирования на все имеющиеся в N плечах распространяющиеся моды

$$\mathbf{P} \equiv \operatorname{diag}\left(\mathbf{P}_{P_1}, \mathbf{P}_{P_2}, \ldots, \mathbf{P}_{P_N}\right). \tag{1}$$

Согласно этому определению $\mathbf{P}$ – оператор конечного ранга $\chi = \sum_{n=1}^{N} P_n = Tr\left(\mathbf{P}\right)$ (далее будем полагать $\chi \neq 0$). Ортопроектор на все нераспространяющиеся моды есть $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$, где $\mathbf{I}$ обозначает тождественный оператор. (Заметим, что наличие двух взаимно ортогональных подпространств векторов амплитуд распространяющихся мод и нераспространяющихся типов колебаний позволяет ввести в качестве области определения операторов рассеяния пространство Понтрягина [5]).

Будем характеризовать n-й регулярный волновод (или порт устройства) матричным оператором отражения ${}^{n}\mathbf{R}$ и унитарным оператором порта $\mathbf{U}_{P_n} = \mathbf{Q}_{P_n} - i\mathbf{P}_{P_n}$ [5, 6]. Матричный оператор прохождения волн из p-го волновода в q-й волновод обозначим через ${}^{pq}\mathbf{T}$. Подчеркнем, что здесь мы используем стандартизованные операторы ${}^{n}\mathbf{R} : \ell_2 \to \ell_2$ и ${}^{pq}\mathbf{T} : \ell_2 \to \ell_2$ (напр., [7]).

Рассматриваемый трансформатор волн может быть полностью описан с помощью действующих в пространстве h операторной матрицы портов

$$\mathbf{U} \equiv \operatorname{diag}\left(\mathbf{U}_{P_1}, \mathbf{U}_{P_2}, \ \ldots \ , \mathbf{U}_{P_N}\right) \tag{2}$$

и обобщенной матрицы рассеяния

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^{1}\mathbf{R} & {}^{12}\mathbf{T} & \cdots & {}^{1N}\mathbf{T} \\ {}^{21}\mathbf{T} & {}^{2}\mathbf{R} & \cdots & {}^{2N}\mathbf{T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^{N1}\mathbf{T} & {}^{N2}\mathbf{T} & \cdots & {}^{N}\mathbf{R} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

На основе операторов (2) и (3) сформируем характеристический оператор (напр., [6])

$$\mathbf{G} \equiv \left(\mathbf{I} + \mathbf{S}\right)\mathbf{U}\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{\dagger}\right) : h \to h, \tag{4}$$

где знак † означает эрмитово сопряжение.

2. Законы сохранения и свойства операторов рассеяния. Для рассматриваемого класса задач дифракции справедливы четыре (I-IV) фундаментальных закона электромагнетизма:

I. Первая лемма Лоренца, из которой следует свойство симметрии

$$\mathbf{S}^{T} = \mathbf{S} \tag{5}$$

(значок T означает транспонирование).

II. Теорема о колеблющейся мощности [8], которая приводит к соотношению

$$\mathbf{b}\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{2}\right)\mathbf{b}^{T} = \left(\nabla_{\|}U, \nabla_{\|}U\right)_{V} - k^{2}\left(U, U\right)_{V}, \forall \mathbf{b} \in h, \tag{6}$$

в котором U обозначает комплексную амплитуду поля в объеме V, а $\nabla_{\|}U$ – градиент этого поля в H-(E-) плоскости;

III-IV. Теорема о комплексной мощности и вторая лемма Лоренца [9], которые совместно дают равенство

$$\mathbf{b}\,\mathbf{G}\,\mathbf{b}^{\dagger} = \left\| \nabla_{\|}U \right\|^{2}_{L_2(V)} - k^{2}\left\| U \right\|^{2}_{L_2(V)}, \forall \mathbf{b} \in h. \tag{7}$$

В формулах (6), (7) использованы стандартные обозначения

$$\left(f, g\right)_{V} \equiv \int_{V} f\, g\, dV; \quad \left\| f \right\|^{2}_{L_2(V)} \equiv \left(f, f^{\dagger}\right)_{V}$$

для скалярного (билинейного) произведения и нормы функции в пространстве $L_2(V)$.

В терминах характеристического оператора (4) закон сохранения энергии, как следствие соотношения (7), принимает особенно простую форму

$$\operatorname{Im}\mathbf{G} \equiv \frac{1}{2i}\left(\mathbf{G} - \mathbf{G}^{\dagger}\right) = 0, \tag{8}$$

т. е. оператор $\mathbf{G}$ является самосопряженным. Из вида этого оператора (4) следует, что имеет смысл ввести в рассмотрение дробно-линейное преобразование обобщенной матрицы рассеяния.

Для этого исключим из анализа особые точки частотной оси – точки резонанса, для которых, как вытекает из соотношений (6) и (7), $\mathbf{b}\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{2}\right)\mathbf{b}^{T} = 0$ и $\mathbf{b}\,\mathbf{G}\,\mathbf{b}^{\dagger} = 0$ при $\forall \mathbf{b} \neq 0$. Нетрудно видеть, что это требование означает удаление двух вещественных чисел бесконечной кратности из спектра обобщенной матрицы рассеяния: $\pm 1 \notin \sigma(\mathbf{S})$ [6].

Теперь мы можем ввести преобразование Кэли оператора $\mathbf{S}$ по формуле

$$\mathbf{W}_{\mp}(\mathbf{S}) = \frac{\mathbf{I} \mp \mathbf{S}}{\mathbf{I} \pm \mathbf{S}} \cdot \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \tag{9}$$

Заметим, что по определению операторы $\mathbf{W}_{-} \equiv \mathbf{Y}$ и $\mathbf{W}_{+} \equiv \mathbf{Z}$ – обобщенные матрицы проводимости и сопротивления, соответственно. Тогда характеристический оператор (4) принимает вид

$$\frac{1}{4}\mathbf{G} = (\mathbf{W}_{\mp} + \mathbf{I})^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}\,\mathbf{W}_{\mp}^{\dagger} \\ \mathbf{W}_{\mp}\mathbf{U} \end{Bmatrix} (\mathbf{W}_{\mp}^{\dagger} + \mathbf{I})^{-1}, \ \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \qquad (10)$$

а закон сохранения энергии в форме (8) есть

$$\operatorname{Im}\begin{Bmatrix} \mathbf{W}_{\mp}\mathbf{U}^{-1} \\ \mathbf{W}_{\mp}\mathbf{U} \end{Bmatrix} = 0. \ \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Последнее равенство также можно записать в виде

$$\mathbf{W}_{\mp} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^{-1} \end{Bmatrix} \mathbf{W}_{\mp}^{\dagger} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^{-1} \end{Bmatrix}. \ \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Смысл этого условия для конкретной задачи дифракции мод будет рассмотрен в разд. 4.

Как найдено в работе [5], оператор $\mathbf{W}_{\mp}$ является квазиэрмитовым. Если его собственные векторы образуют множество $\{\mathbf{d}\}$, то для всех невещественных точек его спектра $\mu \in \sigma(\mathbf{W}_{\mp})$ из соотношения (11) находим

$$\operatorname{Im}\mu = (\mp)\,\theta_d^2 \operatorname{Re}\mu, \ \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \qquad (13)$$

где $\theta_d^2 = \left\| \mathbf{P}\mathbf{d}^T \right\|^2 \left\| \mathbf{Q}\mathbf{d}^T \right\|^{-2}, \ \mathbf{Q}\mathbf{d}^T \neq 0.$

Этот результат означает следующее: если рабочая частота такова, что справедлив закон сохранения энергии в форме (8), (11) или (12), то выполняется условие $-1 \notin \sigma(\mathbf{W}_{\mp})$, и следовательно, имеет место представление

$$\mathbf{S} = (\pm)\frac{\mathbf{I} - \mathbf{W}_{\mp}}{\mathbf{I} + \mathbf{W}_{\mp}}, \ \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \qquad (14)$$

а точки спектра $\lambda \in \sigma(\mathbf{S})$ удовлетворяют соотношению

$$2\operatorname{Im}\lambda = \theta_d^2 \left(1 - |\lambda|^2\right), \qquad (15)$$

которое определяет локализацию полного спектра обобщенной матрицы рассеяния [6].

3. Задача об изломе волновода на прямой угол. В качестве классического примера объемной неоднородности – волноводного четырехполюсника – рассмотрим волноводный уголок постоянной высоты l с углом излома на 90°. Любопытно, что для этой задачи, по крайней мере, три разных подхода – метод сшивания, метод частичных пересекающихся областей [10] и метод произведения областей [11] – в сочетании с методом матричных операторов приводят к одной и той же итоговой матричной модели. Здесь мы даем решение этой задачи обобщенным методом сшивания с использованием аппарата функции Грина.

Вся область определения поля, заданная в одной декартовой системе координат, может быть разделена на три соприкасающиеся частичные подобласти: полубесконечный волновод 1 – $\{x \in \Omega_1 \equiv (0,a); z \in (b,\infty)\}$, такой же волновод 2 – $\{x \in (a,\infty); z \in \Omega_2 \equiv (0,b)\}$ и область взаимодействия мод 3 (или «область связи» V) – $\{x \in \Omega_1; z \in \Omega_2\}$ (для всех подобластей $y \in (0,l)$). Две референсные плоскости совместим с границами выделенных частичных областей $\Theta_1 \equiv \{x \in \Omega_1; z = b\}$ и $\Theta_2 \equiv \{x = a; z \in \Omega_2\}$, а нормали к этим плоскостям, внешние по отношению к области связи 3, обозначим $\vec{n}_1 = \vec{z}_0$ и $\vec{n}_2 = \vec{x}_0$ соответственно.

Считаем, что в областях 1 и 2 расположены независимые источники волн, которые генерируют монохроматические поля (временной множитель далее опущен). Тогда из каждого волноводного плеча на неоднородность падает электромагнитная волна конечной мощности, поле которой составляет бесконечный набор мод с любым известным распределением амплитуд ${}^{p}\mathbf{b} \in \ell_2, p = 1{,}2.$

Дифрагирующие волноводные моды заданы полными ортонормированными системами поперечных собственных функций, объединенных в вектор-столбцы $\boldsymbol{\varphi}_1(x)$, $x \in \Omega_1$, и $\boldsymbol{\varphi}_2(z)$, $z \in \Omega_2$ с базовыми свойствами

$$\begin{matrix} \boldsymbol{\varphi}_q^T(\eta)\,\boldsymbol{\varphi}_q(\xi) = \delta(\eta - \xi), \\ \left(\boldsymbol{\varphi}_q, \boldsymbol{\varphi}_q^T\right)_{\Omega_q} = \mathbf{I}, \end{matrix} \qquad \eta, \xi = \begin{cases} x, x'; q = 1, \\ z, z'; q = 2, \end{cases} \qquad (16)$$

представленными здесь посредством дельта-функции Дирака и идем-фактора $\mathbf{I}$. Далее, используя постоянные распространения волноводных мод ${}^{(q)}\gamma_m$, $m = (0), 1, \ldots; q = 1, 2,$ которые принадлежат первому квадранту комплексной плоскости, сформируем диагональные матричные «операторы подобия» по правилу

$$\mathbf{I}_{\gamma q} \equiv \left\{ \delta_{mn}\, {}^{(q)}\gamma_m \right\}_{m,n=(0)1}^{\infty},$$

где δ_{mn} – символ Кронекера. Особо отметим, что критические частоты волноводов $(\exists k, m{:}\, {}^{(q)}\gamma_m = 0)$ мы исключаем из рассмотрения как нефизические.

Пусть ${}^{p}U_q = {}^{p}\mathbf{b} \cdot {}^{p}\mathbf{u}_q$ комплексная амплитуда, определяющая в q-й частичной области все компоненты поля, источник которого расположен в p-м плече, $p = 1, 2,$ $q = \overline{1,3}.$ Векторная функция ${}^{p}\mathbf{u}_q$ должна удовлетворять однородным граничным условиям Дирихле (H) или Неймана (E) на проводящих поверхностях и условиям на бесконечности для волноводов, а также обеспечивать конечность энергии поля в области его определения и непрерывность тангенциальных составляющих компонентов поля на границах выделенных частичных подобластей:

$$\begin{cases} {}^p\mathbf{u}_1 = {}^p\mathbf{u}_3, \\ \partial_z {}^p\mathbf{u}_1 = \partial_z {}^p\mathbf{u}_3, \end{cases} \quad x \in \Omega_1,\, z = b; \tag{17}$$

$$\begin{cases} {}^p\mathbf{u}_2 = {}^p\mathbf{u}_3, \\ \partial_x {}^p\mathbf{u}_2 = \partial_x {}^p\mathbf{u}_3, \end{cases} \quad x = a,\, z \in \Omega_2. \tag{18}$$

На референсных плоскостях модовые разложения вектор-функций первых двух областей запишем в виде

$$\left.{}^p\mathbf{u}_q\right|_{\Theta_q} = \begin{cases} \left(\mathbf{I} + {}^p\mathbf{R}\right)\mathbf{I}_{\gamma p}^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_p, q = p, \\ {}^{pq}\mathbf{T}\,\mathbf{I}_{\gamma q}^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_q, \quad q \neq p, \end{cases} \quad p, q = 1, 2; \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial\, {}^p\mathbf{u}_q}{\partial \vec{n}_q}\right|_{\Theta_q} = \begin{cases} \left(\mathbf{I} - {}^p\mathbf{R}\right)\mathbf{I}_{\gamma p}^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_p, q = p, \\ -{}^{pq}\mathbf{T}\,\mathbf{I}_{\gamma q}^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_q, \quad q \neq p. \end{cases} \tag{20}$$

Неизвестную вектор-функцию в области 3 представим с помощью второй формулы Грина

$${}^p\mathbf{u}_3 = \begin{cases} -\left\{ {}^p\mathbf{u}_1, \dfrac{\partial G^D}{\partial \vec{n}'_1} \right\}_{\Omega_1} - \left\{ {}^p\mathbf{u}_2, \dfrac{\partial G^D}{\partial \vec{n}'_2} \right\}_{\Omega_2}, (H) \\ \left\{ G^N, \dfrac{\partial\, {}^p\mathbf{u}_1}{\partial \vec{n}'_1} \right\}_{\Omega_1} + \left\{ G^N, \dfrac{\partial\, {}^p\mathbf{u}_2}{\partial \vec{n}'_2} \right\}_{\Omega_2}, \quad (E) \end{cases} \tag{21}$$

гарантирующей непрерывность касательных составляющих электрического поля на границах частичных областей. В этих формулах $G^{D(N)}\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)$ – известная функция Грина прямоугольной области связи, удовлетворяющая однородным граничным условиям Дирихле (Неймана). Для наших целей здесь нет необходимости указывать явный вид функции $G^{D(N)}$. Отметим, однако, что в двух слагаемых формулы (21) надо использовать два разных «истокообразных» представления одной и той же функции Грина. Осталось обеспечить непрерывность тангенциальных компонентов магнитного поля, подставляя представление (21) в соответствующие равенства (17) и (18). В результате получаем функциональные соотношения для вектор-функций ${}^p\mathbf{u}_1$ и ${}^p\mathbf{u}_2$, $p = 1, 2$.

Используя эти соотношения и свойства (16), находим два операторных равенства для, соответственно, $p = 1$ и $p = 2$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{I} \mp {}^1\mathbf{R} = \left(\mathbf{I} \pm {}^1\mathbf{R}\right)\mathbf{D}_{11} \pm {}^{12}\mathbf{T}\mathbf{D}_{21}, \\ &\mp {}^{21}\mathbf{T} = \pm {}^{21}\mathbf{T}\mathbf{D}_{11} + \left(\mathbf{I} \pm {}^2\mathbf{R}\right)\mathbf{D}_{21}, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \tag{22}$$

как результат сшивания полей частичных областей на границе Ω_1, и пару аналогичных операторных соотношений

$$\begin{aligned} &\mp {}^{12}\mathbf{T} = \left(\mathbf{I} \pm {}^1\mathbf{R}\right)\mathbf{D}_{12} \pm {}^{12}\mathbf{T}\mathbf{D}_{22}, \\ &\mathbf{I} \mp {}^2\mathbf{R} = \pm {}^{21}\mathbf{T}\mathbf{D}_{12} + \left(\mathbf{I} \pm {}^2\mathbf{R}\right)\mathbf{D}_{22}, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \tag{23}$$

при сшивании полей на границе Ω_2. В формулах (22) и (23) мы ввели операторные матрицы

$$\mathbf{D} = \mathbf{I}_\Gamma^{\mp 1/2} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{I}_\Gamma^{\mp 1/2}, \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \; \mathbf{I}_\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\gamma 1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\gamma 2} \end{bmatrix}; \tag{24}$$

$$\mathbf{F}_{pq} = \begin{cases} -\left(\left(\dfrac{\partial^2 G^D}{\partial \vec{n}'_p \partial \vec{n}'_q}, \boldsymbol{\varphi}_q \right)_{\Omega_q}, \boldsymbol{\varphi}_p^T \right)_{\Omega_p}, (H) \\ \left(\left(G^N, \boldsymbol{\varphi}_p \right)_{\Omega_p}, \boldsymbol{\varphi}_q^T \right)_{\Omega_q}. \qquad (E) \end{cases} \tag{25}$$

Заметим также, что из определения (25) следует свойство симметрии $\mathbf{F}_{pq} = \mathbf{F}_{qp}^T$, $p, q = 1, 2$.

Равенства (22) и (23) очевидным образом объединяются в компактное соотношение

$$\mathbf{I} \mp \mathbf{S} = \left(\mathbf{I} \pm \mathbf{S}\right)\mathbf{D}, \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix}$$

из которого формально следует искомое решение в форме Вейля [12]

$$\mathbf{S} = (\pm)\frac{\mathbf{I} - \mathbf{D}}{\mathbf{I} + \mathbf{D}}, \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \tag{26}$$

крайне удобной с точки зрения использования свойств симметрии $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$.

4. Корректность операторной модели. Рассмотрим вопросы существования, единственности и устойчивости решения (26).

Сравнивая полученное выражение с формулой (14), находим $\mathbf{D} \equiv \mathbf{W}_\mp$. Значит, решение задачи в виде (26) существует и единственно при всех значениях волнового числа за исключением резонансных частот области связи V, поскольку при этом условии $-1 \notin \sigma\left(\mathbf{D}\right)$ как следствие закона сохранения энергии (11).

Как можно показать, для данной задачи выполнение энергетического закона в форме (12) означает самосопряженность операторной матрицы $\mathbf{F}$, заданной своими элементами (25). В свою очередь, это соответствует равенству $\mathbf{F}_{pq}^* = \mathbf{F}_{pq}$, $p, q = 1, 2$, которое обеспечивается свойством следов функции Грина и ее второй производной на референсных плоскостях, а также вещественнозначными поперечными собственными функциями прямоугольного волновода. И наоборот, когда функция Грина области связи V не определена (т. е. случай резонансных частот), закон сохранения энергии (12) теряет смысл.

Наконец, рассмотрим оператор $\mathbf{A} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}\right)^{-1}$, который является ограниченным, если выполняется равенство (12). Это означает, что решение (26) будет устойчивым при всех частотах, кроме окрестностей точек резонанса, где $\operatorname{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \to \infty$.

5. Универсальность построенной матричной модели. Покажем, что фундаментальный энергетический закон для колеблющейся мощности (6) в случае $V \neq 0$ приводит к операторной модели в виде (26).

Будем исходить из того, что обобщенная матрица рассеяния – квазиэрмитовый оператор [5], для которого в соответствии с формулой (15) известна локализация полного спектра $\sigma(\mathbf{S})$. Подставляя в соотношение (6) собственный вектор $\mathbf{d}_\lambda$ этого оператора, получаем равенство

$$1 - \lambda^2 = \chi, \tag{27}$$

где $\chi = \dfrac{1}{\mathbf{d}_\lambda \mathbf{d}_\lambda^T}\left[\left(\nabla_\| U_d, \nabla_\| U_d \right)_V - k^2 (U_d, U_d)_V \right]$.

Решение задачи униформизации (напр., [13]) для алгебраической кривой (27) запишем в виде

$$\lambda = \frac{\nu - 1}{\nu + 1}, \quad \chi = \frac{4\nu}{(\nu+1)^2}, \quad \nu \neq -1. \tag{28}$$

Как можно показать, только это решение соответствует свойству симметрии (5), именно поэтому оно единственно.

Итак, существует единый оператор задачи $\mathbf{W}:\ \{\mathbf{d}\},\ \nu = (1+\lambda)/(1+\lambda) \in \sigma(\mathbf{W})$, связанный с искомой обобщенной матрицей рассеяния преобразованием Кэли

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{S}}{\mathbf{I} - \mathbf{S}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S} = \frac{\mathbf{W} - \mathbf{I}}{\mathbf{W} + \mathbf{I}}. \tag{29}$$

Из вышеупомянутого свойства симметрии обобщенной матрицы рассеяния (5) вытекает свойство $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}$, что равносильно представлению $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 \mathbf{W}_0^T$, где $\mathbf{W}_0 : h \to h$ есть некоторый ограниченный оператор.

Далее, введем матричный оператор по формуле $\mathbf{K} = (\mathbf{W} + \mathbf{I})^{-1} 2\mathbf{W}_0$, тогда теорема (6) приобретает вид

$$\mathbf{b}\mathbf{K}\mathbf{K}^T\mathbf{b}^T = \left(\nabla_\| U, \nabla_\| U \right)_V - k^2 (U, U)_V, \ \forall \mathbf{b} \in h. \tag{30}$$

Отсюда следует, что оператор $\mathbf{K}$ определяет колеблющееся поле в объеме V.

Заметим, что выведенные выражения

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \dfrac{\mathbf{W} - \mathbf{I}}{\mathbf{W} + \mathbf{I}}, \\ \mathbf{K} = (\mathbf{W} + \mathbf{I})^{-1} 2\mathbf{W}_0, \end{cases} \qquad \mathbf{S}^2 + \mathbf{K}\mathbf{K}^T = \mathbf{I} \tag{31}$$

по своему виду аналогичны полученным в работе [1] матрично-операторным формулам Френеля. В отличие от последних, они не имеют скалярных аналогов, поэтому равенства (31) могут быть названы «обобщенными операторными формулами Френеля».

Таким образом, справедлива следующая *Теорема 1*. Для каждой задачи дифракции мод в волновом трансформаторе с областью взаимодействия волн $V \neq 0$, для которой имеет место теорема взаимности (5) и теорема о колеблющейся мощности (6), существует математическая модель в виде обобщенных операторных формул Френеля (31).

6. Сходимость проекционных приближений. Приближенные решения $\hat{\mathbf{S}}$ найдем методом редукции. Для этого используем ортопроектор $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}(M_1, M_2)$, действующий из ℓ_2 в конечномерное пространство, размерность которого определяется числом учитываемых волноводных мод M_1 и M_2 в регулярных волноводах.

Полностью повторяя приведенные выше рассуждения, но теперь для приближенных представлений компонентов поля в виде усеченных разложений по модам, и требуя непрерывность потока энергии для такой аппроксимации поля, получаем приближенное решение

$$\hat{\mathbf{S}} = (\pm) \frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{D}}}{\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{D}}} \quad \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \tag{32}$$

и закон сохранения энергии

$$\operatorname{Im}\left(\hat{\mathbf{D}} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^\dagger \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} \right) = 0. \quad \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} \tag{33}$$

Здесь обозначено $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{P}}\mathbf{D}\hat{\mathbf{P}}$.

Рассмотрим оператор $\hat{\mathbf{A}} = \left(\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{D}} \right)^{-1}$. Если резонансные частоты объема V исключены, то выполняется соотношение (33) и, как следствие, $-1 \notin \sigma\left(\hat{\mathbf{D}} \right)$. При этом условии семейство операторов $\left\{ \hat{\mathbf{A}}, \forall M_1, M_2 \right\}$ будет ограниченным в каждой точке области определения. Тогда по теореме Банаха–Штейнхауса это семейство будет равномерно ограниченным: $\left\| \hat{\mathbf{A}} \right\| < \mathrm{const},\ \forall M_1, M_2$. Значит,

$$\operatorname{cond}\left(\hat{\mathbf{A}} \right) < \mathrm{const} \cdot (1 + \|\mathbf{D}\|) < \infty. \tag{34}$$

Таким образом, проекционное приближение (32) существует, единственно и устойчиво, если рабочая частота находится вне ближайшей окрестности резонансной частоты области связи V, где $\operatorname{cond}\left(\hat{\mathbf{A}} \right) \to \infty$.

Далее, из формул (26) и (32) следует представление

$$\hat{\mathbf{P}}\mathbf{S}-\hat{\mathbf{S}}=2\hat{\mathbf{A}}\left(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{D}-\hat{\mathbf{D}}\right)\mathbf{A}, \qquad (35)$$

используя которое находим оценку

$$\left\|\left(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{S}-\hat{\mathbf{S}}\right)\mathbf{b}^{T}\right\|<\mathrm{const}_1\left\|\left(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{P}}\right)\mathbf{d}^{T}\right\|, \qquad (36)$$

где $\mathbf{d}=2\mathbf{b}\,\mathbf{A}$, $\forall\mathbf{b}\in\ell_2$. Поскольку в пространстве ℓ_2 ортопроектор $\hat{\mathbf{P}}(M_1,M_2)$ сильно (но неравномерно) сходится к единичному оператору при $M_1,M_2\to\infty$, $\forall M_1/M_2$, найденная оценка (36) означает, что справедлива

Теорема 2. Проекционные приближения (32) сходятся сильно к истинному решению (26), при этом относительная сходимость отсутствует.

Выводы. Разработанный обобщенный метод сшивания применен к анализу волноводных трансформаторов, имеющих резонирующую область взаимодействия мод $V\neq 0$. Данный класс задач дифракции определен как такой, для которого выполняются четыре базовых энергетических закона в форме (5)–(7).

Решение классической задачи об изломе волновода под прямым углом получено в виде обобщенной формулы Френеля для операторной матрицы рассеяния $\mathbf{S}$ (26).

Доказано, что такой вид матрично-операторной модели метода сшивания является общим для всего рассматриваемого класса задач дифракции волноводных мод. Универсальность указанной формулы Френеля обусловлена энергетическим законом (6) и существованием единого оператора задачи, определенного геометрией объемной неоднородности и зависящего от частоты.

Строго доказано, что корректность обобщенных операторных формул Френеля является прямым следствием закона сохранения энергии в форме (11), (12).

Обоснована применимость метода редукции для нахождения аппроксимаций обобщенной матрицы рассеяния. Аналитически доказана безусловная сильная сходимость проекционных приближений $\hat{\mathbf{S}}$.

Предложенный и строго обоснованный обобщенный метод сшивания может быть эффективно использован для расчета волноводных трансформаторов микроволнового диапазона.

Библиографический список

1. *Петрусенко И. В.* Обобщенный метод сшивания в теории дифракции волноводных мод. Ч. I. Формулы Френеля для операторов рассеяния / И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и электрон. – 2012. – 3(17), № 3. – С. 8–15.
2. *Петрусенко И. В.* Обобщенный метод сшивания в теории дифракции волноводных мод. Ч. II. Сходимость проекционных приближений / И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и электрон. – 2012. – 3(17), № 4. – С. 18–21.
3. *Шестопалов В. П.* Резонансное рассеяние волн: в 2 т. Т. 2. Волноводные неоднородности / В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, Л. А. Рудь. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
4. *Uher J.* Waveguide components for antenna feed systems / J. Uher, J. Bornemann, U. Rosemberg. – Norwood: Artech House, 1993. – 476 p.
5. *Petrusenko I. V.* Generalization of the power conservation law for scalar mode-diffraction problems / I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2009. – 68, N 16. – P. 1399–1410.
6. *Petrusenko I. V.* Basic properties of the generalized scattering matrix of waveguide transformers / I. V. Petrusenko // Electromagnetics. – 2006. – 26, N 8. – P. 601–614.
7. *Petrusenko I. V.* Analytic – numerical analysis of waveguide bends / I. V. Petrusenko // Electromagnetics. – 2004. – 24, N 4. – P. 237–254.
8. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
9. *Petrusenko I. V.* The lost «second Lorentz theorem» in the phasor domain / I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2009. – 68, N 7. – P. 555–560.
10. *Прохода И. Г.* Метод частичных пересекающихся областей для исследования волноводно – резонаторных систем сложной формы / И. Г. Прохода, В. П. Чумаченко // Изв. вузов. Радиофизика. – 1973. – 16, № 10. – С. 1578–1581.
11. *Чумаченко В. П.* Применение метода интегральных уравнений для решения одного класса задач электродинамики / В. П. Чумаченко // Изв. вузов. Радиофизика. – 1978. – 21, № 7. – С. 1004–1010.
12. *Weyl H.* The classical groups: Their invariants and representations / H. Weyl. – 15nd ed. – Chichester: Princeton University Press, 1997. – 316 p.
13. *Гурвиц А.* Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. – М.: Наука, 1968. – 648 с.

Рукопись поступила 08.06.2012.

I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko

GENERALIZED MODE-MATCHING TECHNIQUE IN THE THEORY OF MODE DIFFRACTION PART III. RESONANT SCATTERING OF WAVES BY INHOMOGENEITIES

The problem of correctness of matrix models related to the mode-matching technique for resonant scattering of waves by waveguide discontinuities had remained topical for the whole period of applying this technique. The next open question is the problem of validity of the truncation procedure for these matrix models. The aim of our work is to prove analytically the correctness of the mathematical models in the form of operator-based Fresnel formulae for the mentioned class of mode-diffraction problems, to construct projection approximations for the sought-for scattering operators and to justify their convergence. The generalized mode-matching technique has been used. The «generalized Fresnel formulae for scattering operators» have been derived. The universality of the developed operator model in the form of the Cayley transformation has been established. It has been shown that the correctness of this model is completely determined by the found operator properties of the generalized scattering matrix. The unconditional convergence of the projection approximation to the true solution has been proved analytically. The commonly used mode-matching technique for the scalar mode-diffraction problems is of matrix-operator nature and an adequate mathematical apparatus for this technique is based on the theory of operators in the Hilbert space. The proposed generalization of the mode-matching technique can be useful for rigorous analysis of microwave devices.

Key words: mode-matching technique, wave transformer, Cayley transformation.

І. В. Петрусенко, Ю. К. Сіренко

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ЗШИВАННЯ В ТЕОРІЇ ДИФРАКЦІЇ МОД ХВИЛЕВОДІВ. ЧАСТИНА III. РОЗСІЮВАННЯ ХВИЛЬ НА РЕЗОНУЮЧИХ НЕОДНОРІДНОСТЯХ

Проблема обгрунтування матричних моделей методу зшивання для задач резонансного розсіювання хвиль на неоднорідностях у хвилеводах залишалась актуальною протягом усього часу використання цього методу. Другою невирішеною задачею являється обгрунтування методу редукції для розв’язання матричних рівнянь, які отримуються. Метою цієї роботи є суворий доказ коректності математичної моделі у вигляді операторних формул Френеля для вказаного класу задач дифракції мод, побудова проекційних наближень для шуканих операторів розсіювання та обгрунтування їх збіжності. Використано узагальнений метод зшивання. Для операторів розсіювання отримано «узагальнені операторні формули Френеля». Доведено універсальність побудованої операторної моделі у вигляді перетворення Келі. Показано, що область коректності цієї моделі повністю визначено знайденими операторними властивостями узагальненої матриці розсіювання. Аналітично доведено безумовну збіжність проекційних наближень до точного розв’язання. Метод зшивання, який використовується для розв’язання скалярних задач дифракції хвилеводних мод, має матрично-операторну природу та адекватний цій природі математичний апарат, а саме теорію операторів в гільбертовому просторі. Запропоноване узагальнення методу зшивання треба використовувати для суворого аналізу мікрохвильових пристроїв.

Ключові слова: метод зшивання, хвилевідні трансформатори, перетворення Келі.