

## МЕТОД КВАЗИКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ ЗА УМОВ ІСНУВАННЯ ТРІЩИН ГІДРОРОЗРИВУ ПЛАСТА

А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярощак

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне, вул. Остафова 31,  
тел. (067) 9986498, e-mail: a bomba @ ukr.net, sinchuk@mail.ru

На основі ідей методів квазиконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища й процесу запропоновано числовий алгоритм визначення притоку пластової рідини до свердловини за наявності тріщин ГРП скінченної проникності. На конкретному прикладі проаналізовано ефективність гідророзриву та вплив просторової орієнтації тріщин на значення фільтраційної витрати.

Ключові слова: квазиконформні відображення, пластова рідина, гідророзрив, фільтраційна витрата

По идеях методов квазиконформных отображений и поэтапной фиксации характеристик среды и процесса предложено числовой алгоритм определения притока пластовой жидкости в скважину при наличии трещин ГРП конечной проницаемости. На конкретном примере проанализирована эффективность гидроразрыва и влияние пространственной ориентации трещин на значение расхода при фильтрации.

Ключевые слова: квазиконформные отображения, пластовая жидкость, гидроразрыв, расхода при фильтрации

Based on the ideas of methods of quasiconformal mappings and fixed phase characteristics of the environment and the process proposed numerical algorithm to determine the flow of formation fluid into the well in the presence of a finite fracture permeability. A specific example is analyzed and the efficiency of hydraulic influence of the spatial orientation of cracks on the value of spending by filtration.

Keywords: quasiconformal mappings, formation fluid, hydraulic influence, spending by filtration

На теперішньому етапі, коли більшість продуктивних родовищ нафти та газу вичерпали свої можливості, у розробку вводяться родовища з важковидобувними запасами, до яких зазвичай доводиться застосовувати різні методи інтенсифікації. Одним із них є використання гідравлічного розриву пласта (ГРП), у результаті якого значно підвищуються дебіти експлуатаційних свердловин за рахунок зниження гідравлічного опору в привибійних зонах [1]. Останніми роками інтенсивно розвиваються технології створення високопровідних тріщин відносно невеликої протяжності для збільшення ефективного радіуса свердловин. Ефективність роботи тріщин вимагає підбору адекватних параметрів їх геометрії, аналізу їх взаємодії між собою, визначення впливу розмірів тріщини на фільтраційний процес та значення дебіту свердловин.

У цій роботі на основі методу квазиконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища й процесу [2–3], запропоновано числовий алгоритм визначення притоку пластової рідини до свердловини за наявності тріщин ГРП скінченної проникності. Проаналізовано ефективність гідророзриву та вплив його на значення фільтраційної витрати.

Розглянемо модельну задачу на еволюцію (рух) границі розділу  $\Gamma_t$  двох різнокольорових рідин [4] у пласті  $G_z$  ( $z = x + iy$ ), обмеженому контуром живлення та контуром експлуатаційної свердловини за наявності тріщин, утворених в результаті ГРП (див. рис. 1). Для математичної постановки задачі запишемо рівняння

нерозривності та рівняння руху [5–6] відносно квазіпотенціалу швидкості:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \bar{v} = k \cdot \operatorname{grad} \varphi,$$

де:  $k = k(x, y)$  – коефіцієнт фільтрації,  $\varphi = \varphi(x, y)$  – квазіпотенціал швидкості фільтрації  $\bar{v} = v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y)$ . У випадку існування тріщин коефіцієнт фільтрації подамо у вигляді:

$$k(x, y) = \begin{cases} k_l(x, y), & (x, y) \in D_l, \\ k_*(x, y), & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_l D_l, l = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

де:  $D_l$  – ділянка пласта, що відповідає тріщині з індексом  $l$ ;  $k_l(x, y)$ ,  $k_*(x, y)$  – деякі задані достатньо гладкі і певним чином узгоджені між собою функції.

Аналогічно до [7], ввівши функцію течії  $\psi = \psi(x, y)$ , комплексно спряжену до  $\varphi$ , та здійснивши умовний розріз  $\Gamma$  області  $G_z$  вздовж лінії розділу течії, що визначаються точками  $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$ ,  $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукання фільтраційної витрати, положення точок  $(x^*, y^*)$ ,  $(x_*, y_*)$  та інших характерних фільтраційних параметрів зводиться до задачі на квазиконформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  [7], утвореної при цьому однозв'язної області  $G_z^0 = G_z / \Gamma$  на від-

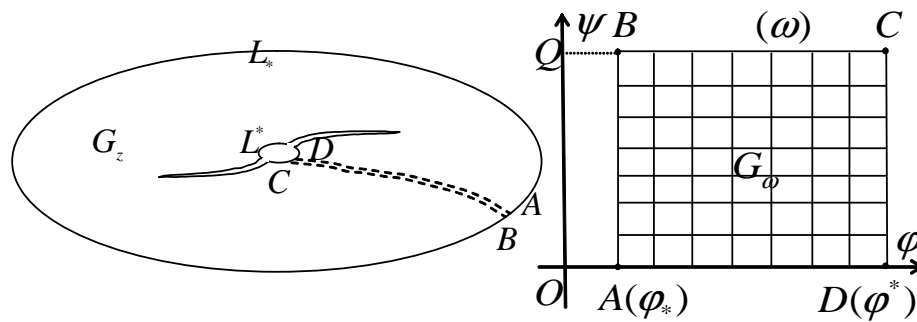


Рисунок 1 – Горизонтальний пласт після процедури ГРП та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

повідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ :

$$k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, (x, y) \in G_z^0,$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \psi|_{AD} = 0, \psi|_{BC} = Q, \quad (1)$$

де:  $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$ ,

$$Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy \text{ – невідома витрата.}$$

Через геометричну складність області  $G_z^0$  та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$  ми розглядатимемо замість прямої задачі на квазіконформне відображення  $G_z^0 \rightarrow G_\omega$  обернену до неї ( $G_\omega \rightarrow G_z^0$ ). Обвернена крайова задача на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z^0$  та рівняння для дійсної  $x = x(\varphi, \psi)$  і уявної  $y = y(\varphi, \psi)$  частини (виконання яких вимагатимемо і на розрізі для врахування його «роздвоєння» при переході від області  $G_z$  до  $G_\omega$ ) характеристичної функції течії при невідомій  $Q$  запишуться у вигляді:

$$k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad k \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0,$$

$$f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (3)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left( k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left( k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

де  $f_*$ ,  $f^*$  – задані функції, що характеризують контури області  $G_z$  відповідно  $L_*$ ,  $L^*$ .

Запис рівнянь контурів області  $G_z$  може бути представлено як у неявній, так і у параметричній формі, що є зручнішим у деяких випадках, тому в подальшому користуватимемося

як неявним, так і параметричним представленням контурів:

$$L_* = \{z: x = x_*(\tau), y = y_*(\tau), \alpha_* \leq \tau \leq \beta_*\} = \{z: f_*(x, y) = 0\},$$

$$L^* = \{z: x = x^*(\tau), y = y^*(\tau), \alpha^* \leq \tau \leq \beta^*\} = \{z: f^*(x, y) = 0\}.$$

Маючи характеристичну функцію течії  $z = z(\omega)$  та виділивши її дійсну і уявну частини  $x = \text{Re } z(\omega)$ ,  $y = \text{Im } z(\omega)$ , знаходимо поле швидкості, компоненти якої визначаються такими співвідношеннями:

$$v_x = \frac{k}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{k}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

де  $J(\varphi, \psi) = x'_\varphi y'_\psi - x'_\psi y'_\varphi$ .

Час  $t$  проходження частинкою шляху від точки  $(\varphi_*, \bar{\psi}_0)$  до поточної точки  $(\varphi, \bar{\psi}_0)$  вздовж лінії течії  $\psi(x, y) = \bar{\psi}_0$  знаходимо за формулою [4]

$$t = \Phi(\varphi, \bar{\psi}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma k v^{-2}(x(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0), y(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0)) d\tilde{\varphi}, \quad (6)$$

де:  $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$ ,  $\sigma$  – пористість ґрунту (вважатимемо, що пористість обчислюється за формулою  $\sigma = ak$ , де  $a$  – деяке додатне дійсне число). Використовуючи (6), знаходимо положення лінії розділу  $\Phi(\varphi, \psi) = \bar{t}$  різнокольорових рідин у довільний фіксований момент часу  $t = \bar{t}$ , зокрема, час початку та повного заводнення експлуатаційної свердловини, відповідно

$$\Phi(\varphi^*, \underline{\psi}) = \min_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi),$$

$$\Phi(\varphi^*, \bar{\psi}) = \max_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi).$$

Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області  $G_\omega$  рівномірну ортогональну сітку

$$G_\omega^l = \{(\varphi_i, \psi_j): \varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi, \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}$$

$$\text{при } i = \overline{0, n}; \psi_j = j\Delta\psi, \Delta\psi = \frac{Q}{m}, j = \overline{0, m}\},$$

де  $n, m \in \mathbb{N}$  – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу,  $\Delta\varphi, \Delta\psi$  – кроки сітки відповідно за змінними  $\varphi$  та  $\psi$ .

Рівняння (5) усередині сіткової області  $G_\omega$  та розрізі  $\Gamma$ , крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності) апроксимуємо наступним чином [8]:

$$\begin{cases} \gamma^2(k_{i,j+1/2}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-1/2}(x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \\ + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \\ \gamma^2(k_{i,j+1/2}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-1/2}(y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \\ + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{0, n}; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + \\ + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \\ j = \overline{0, m-1}, \end{cases} \quad (9)$$

де:  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j),$

$$k_{i,j+1/2} = k \left( \frac{x_{i,j+1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j+1} + y_{i,j}}{2} \right),$$

$$k_{i,j-1/2} = k \left( \frac{x_{i,j} + x_{i,j-1}}{2}, \frac{y_{i,j} + y_{i,j-1}}{2} \right),$$

$$k_{i+1/2,j} = k \left( \frac{x_{i+1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i+1,j} + y_{i,j}}{2} \right),$$

$$k_{i-1/2,j} = k \left( \frac{x_{i,j} + x_{i-1,j}}{2}, \frac{y_{i,j} + y_{i-1,j}}{2} \right);$$

$$\gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi} - \text{квазіконформний інваріант.}$$

Невідому витрату  $Q$  шукаємо за формулою  $Q = \frac{m\Delta\varphi}{\gamma}$ , величину  $\gamma$  одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{1}{k_{i+1/2,j+1/2}} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \quad (10)$$

де:  $\alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$

$$\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Згідно з (6) маємо формулу для наближеного розрахунку часу проходження частинкою шляху вздовж  $j$ -тої лінії течії від  $i_*$  - ї до  $i^*$  - ї еквіпотенціалей:

$$t_{j(i_*,i^*)} = \sum_{i=i_*}^{i^*} \frac{\sigma k_{i,j} \Delta\varphi}{v^2(x(\varphi_i, \psi_j), y(\varphi_i, \psi_j))},$$

$$j = \overline{0, m}, (i_*, i^*) = \overline{0, n}.$$

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (2)–(5) різницевою задачею в загальному випадку, як і в роботах [2–4], побудуємо шляхом поетапної параметризації величини  $\gamma$ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації, для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме: задавши геометричну конфігурацію фізичної області  $G_z$ , що обмежена контурами  $L_*, L^*$ , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$  (параметри  $n$  та  $m$ ); параметри необхідної точності роботи алгоритму  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  та рівень квазіконформності  $\delta_*$  відображення, задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів так, щоб виконувалися умови (8), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки  $i$ , використовуючи (10), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту  $\gamma^{(0)}$  та невідому величину

$$\text{витрати } Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{n\gamma^{(0)}}.$$

Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}, y_{i,j})$  за формулами, отриманими шляхом розв'язання (7) відносно  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$  (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок; при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (9). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (10), знаходимо нове наближення величини  $Q$ , якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за  $\varepsilon_1$ , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} -$$

зміщення вузлів на границі за проведену  $k$ -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за  $\varepsilon_2$ , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності  $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$  отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізи-

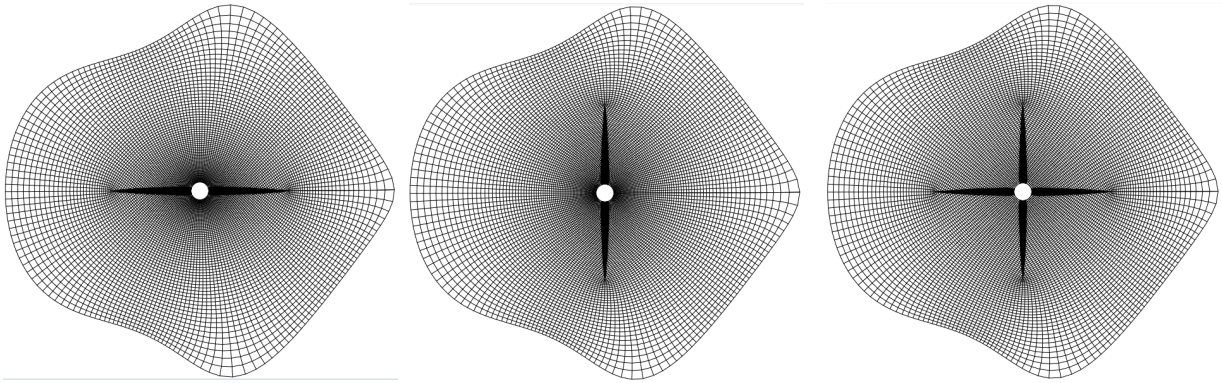


Рисунок 2 – Гідродинамічні сітки для пласта з тріщинами ГРП

чну область із розрізами вздовж ліній течії, де  $\delta_1, \delta_2$  – нев'язки апроксимацій рівнянь (2):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|.$$

Якщо  $\delta \geq \delta_*$ , то змінюємо кількість вузлів розбиття області  $G_\omega$  та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю. Формули для розрахунку швидкості у внутрішніх вузлах сітки запишемо наступним чином:

$$(v_x, v_y)_{i,j} = \frac{k(x_{i,j}, y_{i,j})}{2\Delta\psi J_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1}),$$

$$j = \overline{1, m-1}, i = \overline{1, n},$$

$$J_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi} ((x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})).$$

Аналогічним чином знаходимо значення швидкості у вузлах, що належать розрізу  $\Gamma$  та границі області. Після розв'язання фільтраційної задачі аналогічно, як і в роботі [4], будемо лінії розділу рідин.

Проведемо числові розрахунки для пласта обмеженого контуром свердловини

$$L^* = \begin{cases} x^*(t) = 0.1 \cos(t) + \tilde{x}^*, \\ y^*(t) = 0.1 \sin(t) + \tilde{y}^*, \end{cases}$$

та контуром живлення

$$L_* = \begin{cases} x_*(t) = 2(\cos(t) + 0.1 \cos(3t)), \\ y_*(t) = 2(\sin(t) - 0.1 \sin(4t)), 0 \leq t < 2\pi, \end{cases}$$

при  $\varphi_* = 0, \varphi^* = 1$ ,

$$k(x, y) = \begin{cases} k_l, (x, y) \in D_l = \left\{ (x, y) : \left( \frac{x - \tilde{x}^*}{a_l} \right)^2 + \left( \frac{y - \tilde{y}^*}{b_l} \right)^2 \leq 1 \right\}, \\ k_*, (x, y) \in G_\tau \setminus \bigcup_l D_l, l = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$\sigma = 0.5, n \times m = 70 \times 180, \varepsilon = 10^{-5}$ , де  $k_l = 10, k_* = 1, a_l$  і  $b_l$  – півосі еліпсів, що моделюють тріщини гідророзриву,  $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$  – координати центру експлуатаційної свердловини. На рисунку 2 зображено гідродинамічні сітки за різних положень тріщин, утворених внаслідок ГРП.

На рис. 3 зображено залежності частки витісняючої рідини (води)  $Q_i$  у загальній фільтраційній витраті  $Q$  експлуатаційної свердловини від часу для випадків різної кількості тріщин ГРП та їх різної просторової орієнтації та випадку пласта без тріщин. Як бачимо, з використанням процедури ГРП у конкретному випадку віддача пласта значно збільшується зі збільшенням кількості тріщин. Змінюючи їх просторову орієнтацію при використанні розробленого алгоритму, вдалося підібрати таке їх положення, при якому час розробки пласта є мінімальним, а фільтраційна витрата – максимальною.

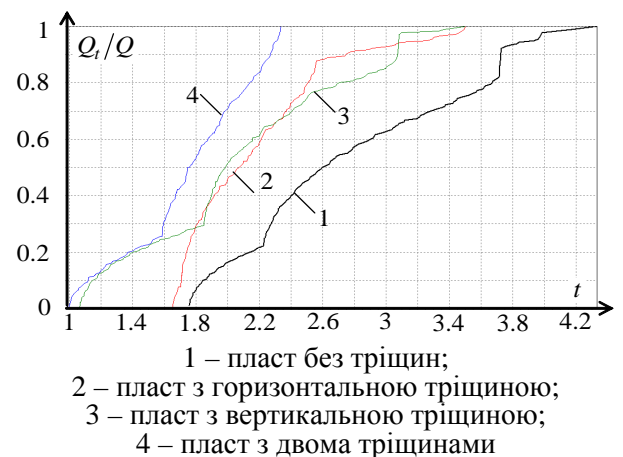


Рисунок 3 – Залежність частки витісняючої рідини у загальній фільтраційній витраті від часу

На рис. 4 зображено гідродинамічні сітки у випадку існування однієї та двох тріщин, де «жирні» лінії відповідають положенню границі розділу різнокольорових рідин у відповідні моменти часу, зокрема, в час прориву води до експлуатаційної свердловини, що становить для

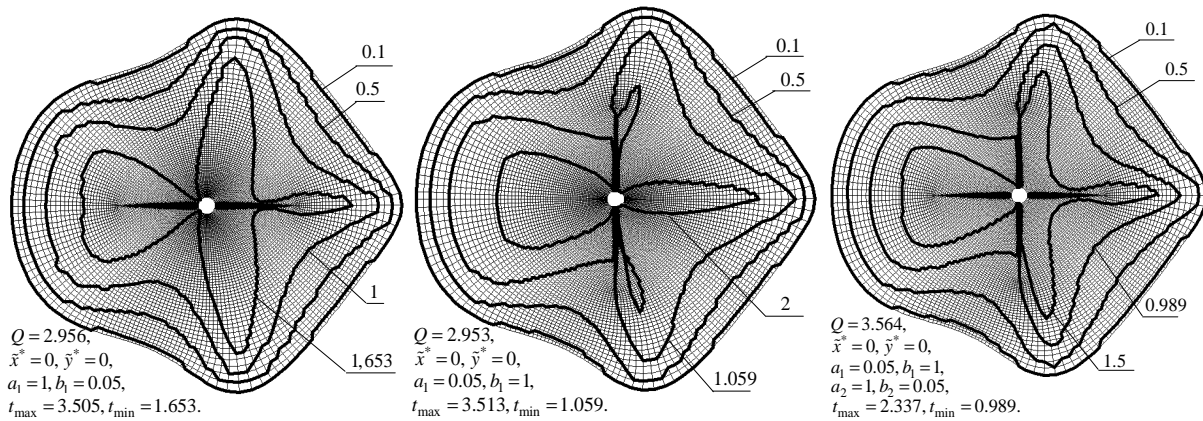


Рисунок 4 – Гідродинамічні сітки та лінії розділу різнокольорових рідин для різних моментів часу

кожного з випадків відповідно 1.653, 1.059 та 0.989. Таким чином, змінюючи орієнтацію тріщин чи збільшуючи їх кількість, маємо можливість забезпечити оптимальні умови експлуатації пласта за мінімальних затрат коштів.

**Висновки.** На основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища й процесу запропоновано числовий алгоритм визначення притоку пластової рідини до свердловини за наявності тріщин ГРП скінченної проникності, який автоматично вирішує проблему побудови рівномірної гідродинамічної сітки, знаходження положення лінії розділу різнокольорових рідин у різні моменти часу, частки витісняючої рідини (води) у загальній фільтраційній витраті (зокрема час повного обводнення експлуатаційної свердловини) за наявності збурюючих фільтраційну течію включень (моделей тріщин ГРП). На конкретному прикладі проаналізовано ефективність гідророзриву та вплив просторової орієнтації тріщин на значення фільтраційної витрати, встановлено оптимальні значення відповідних їм характеристичних параметрів. **У перспективі** – узагальнення розробленої методики на випадок багатозфазної та багатокомпонентної фільтрації.

### Література

1 Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта / Р. Д. Каневская. – М. : ООО "Недра-Бизнесцентр", 1999. – 212 с.  
 2 Бомба А.Я. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Доповіді НАН України. 2010. – №10 – С. 34–40.  
 3 Бомба А.Я. Числовий метод квазіконформних відображень дослідження двофазної фільтрації в елементах площового заводнення / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. 2010. – № 2(35). – С. 31–35.

4 Бомба А.Я. Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху лінії розділу різнокольорових рідин / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2009. – Вип. 6 (15). – С. 20–35.  
 5 Баренблатт Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1972. – 288 с.  
 6 Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. – 531 pp  
 7 Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечкий. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.  
 8 Versteeg Н. К. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method / Н. К. Versteeg, W. Malalasekera. - Longman Scientific & Technical. New York, 1995. – 267 pp.

Стаття надійшла до редакційної колегії 02.09.11  
 Рекомендована до друку професором Мойсишиним В.М.