

## ВИЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ МОДУЛЯ ЮНГА СТАЛЕЙ МАГІСТРАЛЬНИХ ГАЗОПРОВІДІВ МОДЕЛЮВАННЯМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПОШИРЕННЯ УЛЬТРАЗВУКОВИХ МОД ЛЕМБА

А.А. Мандра, І.З. Лютак, З.П. Лютак

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422),  
e-mail: public@nimg.edu.ua

*Розроблено підхід моделювання скінченними елементами поширення ультразвукових коливань у стінці магістрального газопроводу. Суть методу полягає в тому, що розраховуються власні частоти коливання сектора стінки труби. Вибрано модальний метод розрахунку. Вибрана довжина сектора труби повинна відповідати хвильовому числу ультразвукової спрямованої кільцевої хвилі. Тому застосовано граничні умови, що відповідають циклічній симетрії. Умови циклічної симетрії накладаються на ту частину сектора труби, що паралельна її осі. Досліджено параметри поширення хвилі Лемба в стінці магістрального газопроводу. Представлено графічні залежності основних результатів розрахунків. Встановлено, що для магістральних газопроводів хвилі Лемба та ультразвукові спрямовані кільцеві хвилі мають однакові параметри поширення.*

Ключові слова: ультразвукова хвиля, метод скінченних елементів, моди Лемба, модуль Юнга

*Разработан подход к моделированию конечными элементами распространения ультразвуковых колебаний в стенке магистрального газопровода. Суть метода заключается в расчете собственных частот колебания сектора стенки трубы. В качестве метода расчета выбран модальный. Выбранная длина сектора трубы должна соответствовать волновому числу ультразвуковой направленной кольцевой волны. Поэтому применены граничные условия, соответствующие циклической симметрии. Условия циклической симметрии накладываются на часть сектора трубы, параллельную ее оси. Исследованы параметры распространения волны Лэмба в стенке магистрального газопровода. Представлены графические зависимости основных результатов расчетов. Установлено, что для магистральных газопроводов волны Лэмба и ультразвуковые направленные кольцевые волны имеют одинаковые параметры распространения.*

Ключевые слова: ультразвуковая волна, метод конечных элементов, моды Лэмба, модуль Юнга

*Developed is the approach for modeling of ultrasonic oscillations propagation in the wall of the gas main pipeline by finite elements method. Essence of method is based on computation of natural frequencies of sector of pipe wall. As the calculation method is selected modal. The selected length of the pipe sector should correspond to the wavenumber of ultrasonic circumferential guided waves. Therefore boundary conditions correspond to cyclic symmetry are applied. Cyclic symmetry conditions applied to the portion of pipe sector which is parallel to the pipe axis. The parameters of Lamb wave propagation in the wall of the gas main pipeline are investigated. The chart relationships of the basic results of calculations are presented. It has been determined for main gas pipelines that Lamb waves and ultrasonic circumferential guided waves have equal propagation parameters.*

Keywords: ultrasonic wave, finite element method, Lamb modes, Young's modulus

### Вступ

Модуль Юнга є основним фізичним параметром, що характеризує пружні властивості матеріалу. Знання пружних властивостей металу стінок магістральних трубопроводів дозволяє проводити точні розрахунки реального запасу міцності, а знання про зміну модуля Юнга в часі дає змогу визначити дійсне значення залишкового ресурсу.

Дослідження науковців на чолі із Д. Стойко визначили процедуру визначення модуля пружності труби і сформулювали її як зворотну задачу неруйнівного контролю [1]. В основі методу лежить застосування трьох мод ультразвукових спрямованих хвиль, параметри яких обчислюються за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів. Вхідними даними для проведення розрахунку є діаметр труби та густина металу. Для проведення обчислення було вибрано частоти відсікання на графіку дисперсії мод спрямованих ультразвукових хвиль.

Частотами відсікання вважається короткий чистий період відклику, який йде за раптовим припиненням зовнішнього зусилля. Інша група науковців для контролю пружних параметрів вирішила задачу оптимізації з метою зменшення відмінностей між теоретично обчисленим значенням дисперсних параметрів ультразвукових спрямованих хвиль та значеннями, отриманими в результаті експериментальних досліджень [2]. Для отримання теоретичних значень ними було використано напіваналітичний метод скінченних елементів та додатково було застосовано вейвлет-перетворення. Для оптимізації було використано симплексний метод пошуку, де як початкові значення було використано номінальні величини пружних параметрів середовища поширення ультразвукових спрямованих хвиль. Номінальні значення пружних параметрів середовища поширення ультразвукових хвиль ітеративно змінюються для досягнення мінімальної різниці між теоретичними та експериментальними даними. Запропонований метод було

розроблено для визначення пружних властивостей алюмінієвої пластини. Науковцем Ч.-Х. Ехом було досліджено спільні та характерні властивості ультразвукових спрямованих та кільцевих спрямованих хвиль при контролі пружних властивостей металу [3]. З результатами досліджень ним було встановлено, що основною відмінністю ультразвукових спрямованих кільцевих хвиль від ультразвукових спрямованих хвиль є чутливість перших хвиль до радіуса кривизни труби. Основною спільною рисою двох типів ультразвукових спрямованих хвиль є можливість отримувати інформацію про пружні властивості та товщину стінки труби. Додатково, ультразвукові спрямовані кільцеві хвилі можна застосовувати для контролю величини радіуса труби. Для визначення пружних властивостей тонких плівок, виготовлених на основі мікро- та наноструктур, науковцем Ф. Жангом було запропоновано фотоакустичний метод [4]. Суть методу полягає в тому, що лазером у тонкій пластині збуджуються високочастотні коливання ультразвукового спектра, що виникають внаслідок різкого розширення пластини від дії температури. Механічні коливання пластини визначаються через пружні властивості матеріалу та величину залишкових напружень. В першій частині експерименту науковцем було запропоновано визначити величину модуля Юнга алюмінієвої та нітридокремнієвої пластин фемтосекундним методом помпового давача. Отримані сигнали порівнювалися із сигналами, обчисленими теоретично при моделюванні миттєвого термопружного сигналу. В результаті порівняння було отримано значення пружних констант. В другій частині експерименту визначались хвильові параметри поширення нульової антисиметричної моди Лемба в тонкій пластині для визначення величини залишкових напружень.

Як бачимо, застосування ультразвукових спрямованих хвиль для контролю пружних властивостей є перспективним. На сьогодні застосування спрямованих хвиль для контролю пружних властивостей металу перебуває на початковому етапі лабораторних досліджень та теоретичних узагальнень. В даній роботі пропонується застосування розробленого та широко впровадженого методу модального аналізу з метою визначення дисперсних параметрів ультразвукових мод Лемба для контролю модуля Юнга металу стінок магістральних газопроводів. Це дозволить застосовувати моди Лемба (МЛ) при контролі пружних властивостей стінок магістральних газопроводів в натурних умовах їх експлуатації.

### Обчислення швидкості поширення МЛ у стінці труби

Основна ідея проведення розрахунку поширення МЛ по периметру стінки трубопроводу полягає у застосуванні модального підходу.

Модальний підхід базується на побудові двовимірної сітки скінченних елементів стінки труби вздовж її осі. Наступним кроком застосовуються граничні умови в напрямку, перпендикулярному сітці скінченних елементів. Ці умови визначають періодичний розподіл напружень і деформацій відповідно до умов поширення МЛ в напрямку по периметру труби навколо її осі. Для обчислення просторового періоду розподілу напружень та деформацій застосовується модальний підхід, при якому обчислюються власні числа та вектори коливання побудованої сітки скінченних елементів і реалізується за допомогою існуючого програмного забезпечення. Для побудови моделі скінченних елементів використано циклічні осесиметричні умови розв'язання рівняння власних коливань стінки труби.

Рівняння, що застосовує модальний підхід для опису поширення спрямованих хвиль, було представлено Л. Гаврічем у праці [5]. У цій праці Л. Гавріч розробив власне програмне забезпечення, що реалізує метод обчислення вільних коливань за допомогою скінченних елементів.

Адаптацію математичної моделі поширення спрямованих хвиль, розроблену Л. Гаврічем, було здійснено рядом науковців у праці [6], що дозволило застосовувати її у існуючих програмах, які реалізують метод модального аналізу.

### Рівняння власних коливань

Поле зміщень елементарного об'єму пружного середовища в площині  $x_1x_2$  для хвилі, що поширюється в напрямку  $x_3$ , запишемо так [5]:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= U_1(x_1, x_2) e^{-j(kx_3 - \omega t)}, \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= U_2(x_1, x_2) e^{-j(kx_3 - \omega t)}, \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= U_3(x_1, x_2) e^{-j(kx_3 - \omega t - \pi/2)}, \end{aligned} \quad (1)$$

де:  $j$  – комплексне хвильове число;

$k$  – хвильове число;  $\omega$  – частота;  $t$  – час;

$U_1(x_1, x_2)$ ,  $U_2(x_1, x_2)$ ,  $U_3(x_1, x_2)$  – розподіл амплітуд зміщень елементарного об'єму пружного середовища.

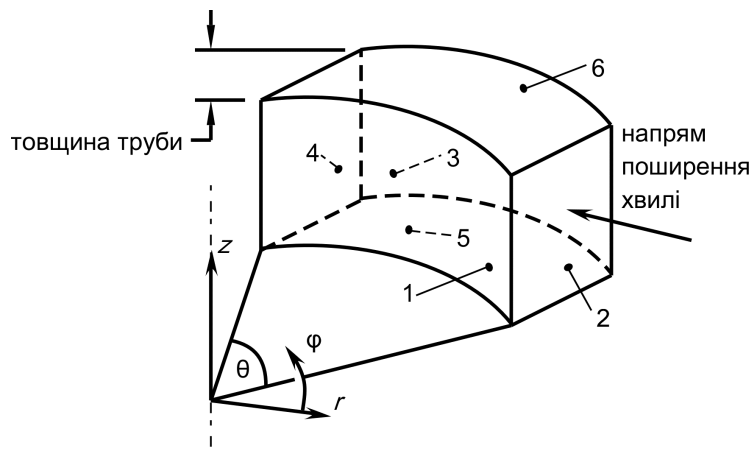
Будь-яка точка хвилеводу згідно з (1) піддається гармонічним коливанням із частотою  $\omega$ . Пружні коливання поширюються вздовж осі 3 із хвильовим числом  $k$  із зміщенням по фазі відносно коливань в одній площині поперечного перерізу стінки трубопроводу. Виразимо енергію скінченного елемента через Гамільтоніан так [5]:

$$\Pi(x_1, x_2, k) = [k^2 \cdot K_{\Pi 2}(x_1, x_2) + k \cdot K_{\Pi 1}(x_1, x_2) + k \cdot K_{\Pi 0}(x_1, x_2) - K_K(x_1, x_2)] \cdot 0,5, \quad (2)$$

де:  $\Pi$  – Гамільтоніан, що описує енергію скінченного елемента;  $K_{\Pi}$  – потенціальна енергія пружних сил,  $K_K$  – кінетична енергія.

Вираз (2) є доволі простим, оскільки в ньому відсутні члени, що описують енергію скінченних елементів вздовж осі 3. Ці члени були вилучені, оскільки вважаємо, що вздовж осі 3 енергія дорівнює деякій константі. Це відповідає поширенню МЛ по периметру стінки труби навколо її осі.

Члени (2) визначаються так [5]:



границі 1, 3 – відповідно внутрішня та зовнішня стінки труби;  
2, 4 – границі сегменту по периметру труби; 5, 6 – границі сегменту по довжині труби

Рисунок 1 – Сегмент стінки труби для циклічної осесиметричної моделі:

$$K_{\Pi 0}(x_1, x_2) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 - \nu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right],$$

$$K_{\Pi 1}(x_1, x_2) = \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} u_3 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} u_3 \right) - \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} u_1 \right), \quad (3)$$

$$K_{\Pi 2}(x_1, x_2) = \frac{E}{2(1+\nu)} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_3^2,$$

$$K_K(x_1, x_2) = \omega^2 \rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

де:  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\rho$  – густина.

Для опису розподілу енергії по всьому об'єму досліджуваного середовища необхідно просумувати всі члени виразу (3) [5]:

$$(k^2 [K_{\Pi 2}] + k [K_{\Pi 1}] + [K_{\Pi 0}] - \omega^2 [M]) \{u\} = \{0\}, \quad (4)$$

де  $M$  – матриця маси.

В результаті обчислення необхідно відняти скалярні значення хвильових чисел  $k_1, k_2, \dots, k_i$  та відповідні їм вектори переміщень  $\{u\}_1, \{u\}_2, \dots, \{u\}_i$  для одного значення частоти  $\omega$ . Кількість знайдених значень є удвічі більшою ступенів свободи розглядуваного пружного середовища.

Запропонований Л. Гавричем метод обчислення поширення спрямованих хвиль було удосконалено П. Вілкоксом для використання у комерційних пакетах скінченних елементів [6]. Метод П. Вілкокса є апроксимацією рівняння (4).

Розв'язок методу власних коливань шукається у такій формі [6, 7]:

$$(\ddot{u}M + \dot{u}C + K) = 0, \quad (5)$$

де:  $\ddot{u}, \dot{u}$  – відповідно прискорення та швидкість коливань об'єму пружного середовища;  $M$  – матриця маси;  $C$  – матриця демпфування;  $K$  – матриця жорсткості;

Коефіцієнти матриці жорсткості є функціями порядку циклічної симетрії та частоти. Без врахування демпфування рівняння (5) матиме такий вигляд [8]:

$$(\ddot{u}M + K) = 0. \quad (6)$$

Розв'язок власних коливань сегмента стінки труби (5) та (6) для циклічної осесиметричної моделі є гармонічні рівняння розподілу зміщень елементарного об'єму пружного середовища для знайденої частоти власних коливань  $\omega$  [6]:

$$\begin{aligned} u_r &= U_r(r, z) \cos k_\theta \theta, \\ u_z &= U_z(r, z) \cos k_\theta \theta, \\ u_\theta &= U_\theta(r, z) \sin k_\theta \theta, \end{aligned} \quad (7)$$

де:  $r, \theta, z$  – циліндрична система координат;  $U_r(r, z), U_z(r, z), U_\theta(r, z)$  – амплітуди розподілу зміщень елементарного об'єму пружного середовища;

$k_\theta$  – порядок циклічної симетрії.

Застосування (7) узгоджується із властивостями поширення спрямованих хвиль, де зміщення елементарного об'єму пружного середовища у напрямку  $\theta$  є зміщеним у фазі на  $90^\circ$  від зміщень у площині  $rz$  [9]. Підхід дає змогу встановити зв'язок між власними частотами та параметрами поширення МЛ (порядком циклічної симетрії  $k_\theta$ ).

Особливістю побудови числової моделі за підходом циклічної симетрії є зображений на рис. 1 сегмент трубопроводу. За основу вибрано циліндричну систему координат  $\varphi, \rho, z$ .

Вісь трубопроводу збігається із віссю  $z$  циліндричної системи координат. Величина сегменту труби  $\theta$  дорівнює:

$$\theta = \frac{360^\circ}{k_\theta}. \quad (8)$$

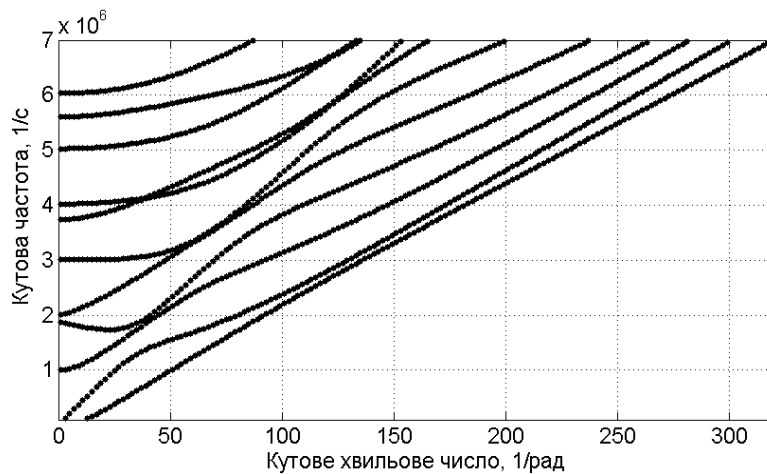


Рисунок 2 – Дисперсне рівняння кутового хвильового числа поширення МЛ у стінці трубопроводу діаметром 273 мм та товщиною стінки 10 мм

При моделюванні поширення МЛ циклічною осесиметричною моделлю знайдений розв'язок розподілу гармонійних коливань для одного сегменту циклічно повторюються по периметру труби. Це означає, що при поширенні МЛ в стінці труби, число  $k_\theta$  співвідноситься із кутовим хвильовим числом спрямованої кільцевої хвилі, що визначене І. Вікторовим [10]. Зв'язок між довжиною хвилі МЛ та числом циклічної симетрії  $k_\theta$  є такий [8]:

$$\lambda = 2\pi r_m / k_\theta, \quad (9)$$

де:  $\lambda$  – довжина хвилі МЛ,  $r_m$  – радіус труби, взятий до середини товщини стінки.

Зміна величини сегменту труби, що призводить, відповідно, до зміни порядку циклічної симетрії, задаватиме довжину хвилі МЛ, для якої шукатиметься розв'язок рівняння (5) у формі, що представлена рівняннями (7) [8].

Граничні умови на межі сегмента труби 5 та 6, (рис. 1) є симетричними. Симетричні граничні умови означають, що переміщення елементарного об'єму середовища стінки сегмента труби є вільними в напрямку, що лежить в площині грані, та дорівнюють нулю в напрямку, перпендикулярному поверхні грані [7]. Симетричні граничні умови на верхній та нижній межах сегмента стінки труби дозволяють шукати розв'язок для хвилі, що поширюється по периметру труби (в напрямку координати  $\phi$ ), без врахування скінченності труби в напрямку осі  $z$  [8]. Граничні умови на інших гранях сегмента трубопроводу є вільними (напруження дорівнюють нулю).

Розглянемо поширення МЛ в стінці труби діаметром 273 мм та товщиною стінки 10 мм. Параметри металу виберемо такими: модуль Юнга  $E = 207 \cdot 10^9$  Па, коефіцієнт Пуассона – 0,296. Це відповідає константам пружності другого порядку Ляме  $\lambda = 11,58 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 7,99 \cdot 10^{10}$  Па. Хвильове рівняння для МЛ, розв'язане із застосуванням математичної моделі, представимо графічно (рис. 2).

Розв'яжемо рівняння поширення МЛ для кутового хвильового числа, що дорівнює 100 із кутовою частотою  $6,331 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>. Сітку скінчен-

них елементів побудуємо для сектора труби, що дорівнює 1/100 довжини кола із одного шару. Розв'язком рівняння вільних коливань є кутова частота  $\omega = 6,347 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>. Форма розподілу амплітуди коливань в сектору стінки труби для знайденого значення частоти зображено на рис. 3.

Колівання мають форму еліпса, який формується коливаннями елементарного об'єму пружного середовища поздовжньої та поперечної хвиль (рис. 4).

Відносна похибка проведення обчислення між результатами, отриманими із розв'язку математичної моделі, та методом власних коливань складає 0,3 %, що входить у межі похибки числового пошуку кореня.

Для порівняння отриманих результатів розрахунків було проведено обчислення рівнянь, що описують дисперсні властивості спрямованих симетричних ультразвукових хвиль, які поширюються в пластині [11]:

$$\frac{\tan(qh)}{q} + \frac{4k^2 p \tan(ph)}{(q^2 - k^2)} = 0, \quad (10)$$

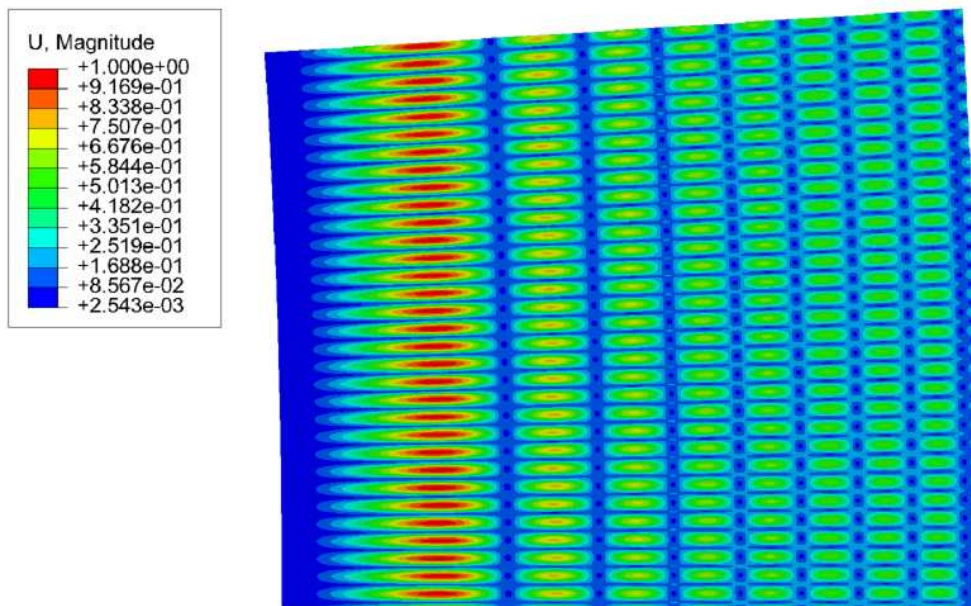
$$p^2 = \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 - k^2, \quad q^2 = \left(\frac{\omega}{c_l}\right)^2 - k^2,$$

де:  $k$  – хвильове число спрямованої хвилі;  $c_l$ ,  $c_t$  – відповідно швидкості поширення поздовжньої та поперечної хвиль.

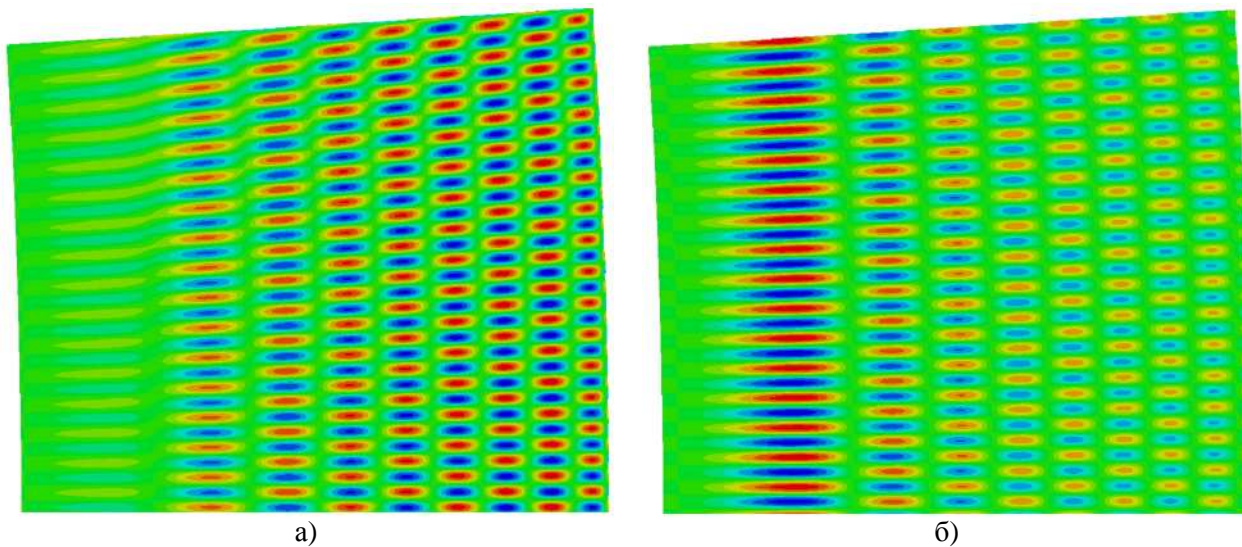
Рівняння, що описує дисперсні властивості спрямованих антисиметричних ультразвукових хвиль, що поширюються в пластині [11]:

$$q \cdot \tan(qh) + \frac{(q^2 - k^2)^2 \tan(ph)}{4k^2 p} = 0. \quad (11)$$

В результаті розв'язання (11) було знайдено симетричну моду ультразвукової спрямованої хвилі, що відповідає моді ультразвукової спрямованої кільцевої хвилі із кутовою частотою  $6,3437 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>. Відносна похибка визначення параметрів ультразвукових спрямованої та спрямованої кільцевої хвиль складає 0,5 %, що не виходить за межі похибки числового пошуку кореня.



**Рисунок 3 – Розподіл амплітуди коливань ультразвукової хвилі при поширенні в стінці труби діаметром 273 мм товщиною 10 мм частотою 1,01 МГц та кутовим хвильовим числом 100**



**а) поздовжні коливання із максимальною нормалізованою амплітудою 0,195,  
б) поперечні коливання із максимальною нормалізованою амплітудою 1**

**Рисунок 4 – Розподіл амплітуди коливань об'ємних хвиль в стінці труби діаметром 273 мм товщиною 10 мм частотою 1,01 МГц**

В результаті досліджень встановлено, що МЛ при поширенні в стінці магістрального газопроводу на частотах ультразвукового контролю 1-10 МГц практично мають однакові параметри із ультразвуковими спрямованими хвилями. Це можна пояснити тим, що радіус кривизни магістрального газопроводу є набагато більшим за довжину ультразвукової хвилі.

#### Література

1 Stoyko D.K. Finding a pipe's elastic and dimensional properties using ultrasonic guided wave cut-off frequencies / D. K. Stoyko, N. Popplewell, A. H. Shah // NDT & E International, 2010.- Volume 43.- Issue 7.- P.568-578.- ISSN 0963-8695.

2 Sale M. Semi-analytical formulation for the guided waves-based reconstruction of elastic moduli / Michele Sale, Piervincenzo Rizzo, Alessandro Marzani // Mechanical Systems and Signal Processing, 2011.- Volume 25.- Issue 6.- P. 2241-2256.- ISSN 0888-3270.

3 Cheng-Hung Yeh. Characterization of mechanical and geometrical properties of a tube with axial and circumferential guided waves / Cheng-Hung Yeh, Che-Hua Yang // Ultrasonics, 2011.- Volume 51.- Issue 4.- P. 472-479. – ISSN 0041-624X.

4 Feifei Zhang. Bulk-wave and guided-wave photoacoustic evaluation of the mechanical properties of aluminum/silicon nitride double-layer thin films / Feifei Zhang, Sridhar Krishnaswamy,

Carmen M. Lilley // Ultrasonics, 2006. – Volume 45. – Issues 1-4.- P. 66-76.- SSN 0041-624X.

5 Gavrić L.J. Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique / L. J. Gavrić // Sound and Vib. - 1995. - №185(3). - P. 531-543. – ISSN 0022-460X.

6 Wilcox P. Dispersion and excitability of guided acoustic waves in isotropic beams with arbitrary cross section / P. Wilcox, M. Evans, O. Diligent, M. Lowe, P. Cawley // Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation - 2002. - Vol. 21. - P. 203 - 210. - ISSN 0003-6951.

7 Документація на пакет програм скінченно-елементного аналізу Comsol версія 3.5a. - COMSOL Inc., 2009. – 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM) 12 см. – Системні вимоги: Pentium-266; 32 Mb RAM; DVD-ROM Windows 98/2000/NT/XP.- Назва з титул. екрану.

8 Fong K.L.J. A study of curvature effects on guided elastic waves / K. L. J. Fong. - PhD thesis. Imperial College London, 2005. – 209 p.

9 Lowe M.J.S. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media / M.J.S. Lowe // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Fr. Contr.- 1995.- 42.- (4).- p. 525-542.

10 Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966. – 168 с.

11 Rose J.L. Ultrasonic Waves in Solid Media // Cambridge University Press.- 1999.- 476 p.

*Стаття надійшла до редакційної колегії*

*25.11.11*

*Рекомендована до друку професором*

*Юрчишиним В.М.*