

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПОСУДИН, ЩО ПРАЦЮЮТЬ ПІД ТИСКОМ

А.М. Карпаш<sup>1</sup>, А.П. Олійник<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ТОВ «Науково-виробнича фірма «Зонд»; м. Івано-Франківськ, вул. Микитинецька, 5а, тел. (0342) 505552

<sup>2</sup>ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 723824, e-mail: ankarpush@gmail.com

*У роботі запропоновано математичні моделі процесу деформування та напруженого стану для посудин циліндричної форми зі сферичним та конічним куполом, що працюють під дією високого тиску. Наведено методiku визначення додаткових факторів, що впливають на напружено-деформований стан, визначено напрямки подальших досліджень.*

Ключові слова: технічний стан, посудини високого тиску, напружений стан, деформації, фактори впливу, асоціативний аналіз.

*В работе предложены математические модели процесса деформирования и напряженного состояния для сосудов цилиндрической формы со сферическим и коническим куполом, работающих под действием высокого давления. Приведена методика определения дополнительных факторов, влияющих на напряженно-деформированное состояние, определены направления дальнейших исследований.*

Ключевые слова: техническое состояние, сосуды высокого давления, напряженное состояние, деформации, факторы влияния, ассоциативный анализ.

*Mathematical models of deformation and stress state for cylindrical vessels with a spherical and conic dome operating under high pressure are proposed. The technique of determining additional factors affecting the stress-strain state is described, and further research areas are determined.*

Key words: technical condition, pressure vessels, stress-strain state, deformations, influence factors, associative analysis.

### Вступ

Фактичний технічний стан є цікавим та актуальним напрямком для експлуатуючих організацій об'єктів підвищеної небезпеки, оскільки характеризує стан об'єкта та дозволяє зробити прогнози стосовно його безперебійної роботи, стабільний контроль та оперування робочими процесами, економічну та екологічну безпеку. Головною задачею для експлуатуючої сторони є достовірність отриманих результатів з визначення фактичного технічного стану об'єкта. З практики спеціалізованих організацій, які проводять технічне діагностування, за результатами якого роблять висновки про стан об'єкту і можливість подальшої експлуатації випливає, що оцінка стану проводиться за одним-двома інформативними параметрами (товщина стінки, твердість металу), яких не достатньо для повної характеристики стану об'єкта, а за результатами інших методів контролю виявляються вже існуючі дефекти, які потребують усунення, тобто зупинки експлуатування та ремонту [1, 2].

### Аналіз попередніх досліджень

Одним із головних параметрів технічного стану є його напружено-деформований стан, який постійно змінюється у процесі експлуатування технологічного обладнання [3]. Іншими словами, він залежить від певного ряду факторів, які впливають на об'єкт, що експлуатується (рисунок 1). Розуміючи поведінку та причину зміни напружено-деформованого стану і завча-

сні коригування режимів експлуатації, можуть попередити виникнення концентраторів напружень і подальших дефектів.

### Виділення невирішених частин загальної проблеми

Основним недоліком методів контролю напружено-деформованого стану на об'єктах експлуатації є складність його проведення у польових умовах та дороговартісне обладнання. Також чинна нормативно-технічна база не передбачає врахування факторів (структурні зміни, старіння, втома, міжкристалічна корозія, зменшення механічних властивостей, вплив вібрації, поодинокі дефекти), які вагомо впливають на безпечну роботу, а також спотворюють достовірність результатів контролю напружень та визначення технічного стану металевих конструкцій довготривалої експлуатації.

Тому, для отримання найбільш точної інформації під час визначення та контролю напружено-деформованого стану об'єктів довготривалої експлуатації ефективним є використання багатопараметрового контролю, інформативні параметри якого врахують максимум чинників, що впливають на поведінку зміни напруженого стану.

### Цілі статті

При вивченні напруженого стану посудин, що працюють під тиском використовується підхід, змодельований та обґрунтований в [4]. Згідно з яким для оцінки зміни напружено-



Рисунок 1 – Фактори впливу на об’єкт експлуатації

деформованого стану застосовується методика визначення компонента тензора напружень та деформацій за відомими координатами певної множини точок поверхні об’єкта та для якого відомим є параметричне подання його як тривимірного деформованого тіла в початковий та контрольний момент часу. При цьому компоненти тензора напружень та деформацій обчислюються без використання, як правило, невідомої інформації про сили та навантаження, що обумовлюють такого роду зміну просторової конфігурації. Розглядаються два типи посудин, що працюють під тиском: з сферичною та конічною верхніми частинами (рисунок 2). В початковий (не деформований) момент часу для координат точок поверхні посудини справедливе наступне параметричне подання в сферичній та циліндричній (для верхньої частини) системах координат (1).

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = S, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq r_{ст} \\ R_{вн} \leq r \leq R_3 \\ 0 \leq S \leq L \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_0 \\ R'_3 \leq r \leq R'_{вн} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Слід зазначити, що до закінчення циліндричної частини подання проводиться у циліндричній системі координат, а для сферичної частини у сферичній, при чому кут  $\theta_0$  задає кут спряження цих двох частин. Координати  $r$  для цих двох частин задовільняють умовам спряження:

$$\begin{aligned} R_{вн} &= R'_{вн} \cos \theta \\ R_3 &= R'_3 \cos \theta \end{aligned}$$

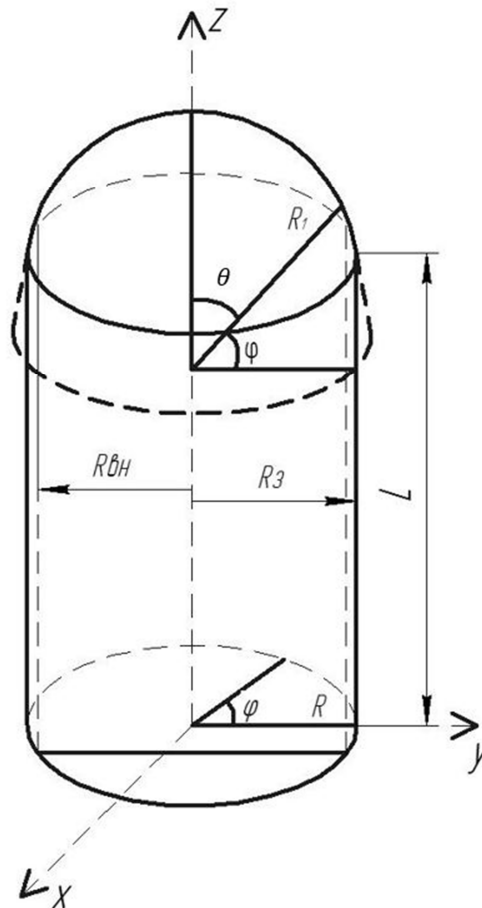


Рисунок 2 – Посудина зі сферичною конфігурацією верхньої частини

В контрольний момент часу подання (1) набуває іншого виду.

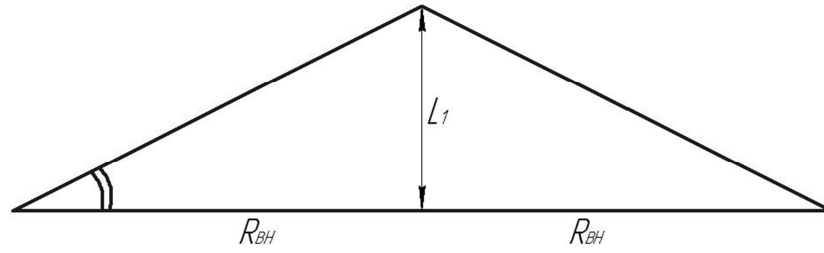


Рисунок 3 – Формалізація конічної частини

$$\begin{cases} x = X_L - Rn_x + \rho(S, \varphi, r, t) \cos \omega(S, \varphi, r, t)b_x + \\ + \rho(S, \varphi, r, t) \sin \omega(S, \varphi, r, t)n_x + \psi(S, \varphi, r, t)\tau_x; \\ y = Y_L - Rn_y + \rho(S, \varphi, r, t) \cos \omega(S, \varphi, r, t)b_y + \\ + \rho(S, \varphi, r, t) \sin \omega(S, \varphi, r, t)n_y + \psi(S, \varphi, r, t)\tau_y; \\ z = Z_L - Rn_z + \rho(S, \varphi, r, t) \cos \omega(S, \varphi, r, t)b_z + \\ + \rho(S, \varphi, r, t) \sin \omega(S, \varphi, r, t)n_z + \psi(S, \varphi, r, t)\tau_z, \end{cases} \quad (2)$$

де  $\rho(S, \varphi, r, t)$ ;  $\omega(S, \varphi, r, t)$ ;  $\psi(S, \varphi, r, t)$  – функції, що знаходять переміщення точок у радіальному, тангенціальному та в повздожньому напрямках;

$\vec{r}_L(X_L Y_L Z_L)$  – координати точок на осі труби;

$\vec{n}(n_x n_y n_z)$ ;  $\vec{b}(b_x b_y b_z)$ ;  $\vec{\tau}(\tau_x \tau_y \tau_z)$  – компоненти векторів нормалі, бінормалі та дотичної до осі труби.

В практичних розрахунках функції  $\rho(S, \varphi, r, t)$ ;  $\omega(S, \varphi, r, t)$ ;  $\psi(S, \varphi, r, t)$  задовольняють умови:

$$\begin{cases} \rho(S, \varphi, r, t) \approx r + r_1(S, \varphi, r, t) \\ \omega(S, \varphi, r, t) \approx \varphi + \varphi_1(S, \varphi, r, t) \\ \psi(S, \varphi, r, t) \approx \psi_1(S, \varphi, r, t). \end{cases} \quad (3)$$

Причому

$$\begin{cases} |r_1(S, \varphi, r, t)| \ll 1; |\varphi_1(S, \varphi, r, t)| \ll 1; \\ |\psi_1(S, \varphi, r, t)| \ll 1, \end{cases}$$

тобто, труба в загальному зберігає циліндричну конфігурацію. Для опису сферичної частини приймається або друге подання наведене в (1) або перераховують радіуси кривини сферичної частини  $R_3^1, R_{BH}^1$  за результатами експериментальних вимірювань координат верхньої частини. Нехай на верхній частині організується вимірювання координат точок  $(x_i; y_i; z_i)$ . тоді мінімізуючи функцію:

$$S(x_0; y_0; z_0; R) = \quad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^N [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2 - R^2]^2$$

знаходимо нові координати центру сферичної частини  $(x_0; y_0; z_0)$  та радіусу деформованої сфери. Оптимізація (4) проводиться шляхом знаходження виразу для  $R^2$ : диференціюється (4) по  $R$ , внаслідок чого отримуємо:

$$R^2 = \frac{1}{N} \sum [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - (z_i - z_0)^2] \quad (5)$$

Після чого даний вираз підставляємо у (4) і отримуємо задачу знаходження координат  $(x_0, y_0, z_0)$ , яка, очевидно, має єдиний розв'язок

через те, що при зазначеній підстановці отримується задача мінімізації додатньо визначеної квадратичної форми. Це дає змогу однозначно розрахувати центр  $(x_0, y_0, z_0)$  і радіус  $R$  деформованого купола посудини.

За даними для конічної верхньої частини аналогічно (1) для другої системи (рисунок 3), яка описує конічну частину, справедливим є подання:

$$\begin{cases} x = r(S) \cos \varphi, & 0 \leq \varphi \leq r_{CT} \\ y = r(S) \sin \varphi, & L \leq S \leq L_1 \\ z = S, & 0 \leq r(S) \leq R_3 \end{cases} \quad (6)$$

де  $L_1$  визначає кут при основі конічної частини перерізу.

В контрольний момент часу координати циліндричної частини описуються за (2), опис конічної частини або залишається таким як в (6), або може бути уточненим за результатами вимірювань певного набору координат точок конічної частини. Якщо позначити  $\vec{R}_0(S, \varphi, r, t)$  радіус-вектор кожної точки не деформованої посудини, що працює під тиском, а  $\vec{r}(S, \varphi, r, t)$  радіус-вектор у контрольний момент, де описані подання (1) – (6), дозволяють визначити наступні величини:

- компоненти векторів локальних базисів [5]:

$$\vec{\Theta}_0^i = \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial x_i} \quad x_1 = S; x_2 = \varphi; x_3 = r; \quad (7)$$

$$\vec{\Theta}^i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \quad x_1 = S; x_2 = \varphi; x_3 = r;$$

- компоненти метричного тензора в два моменти часу:

$$\begin{cases} g_{ij}^0 = \vec{\Theta}_0^i \vec{\Theta}_0^j, j, i = 1, 2, 3 \\ g_{ij} = \vec{\Theta}^i \vec{\Theta}^j; \end{cases} \quad (8)$$

- компоненти тензора деформацій:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - g_{ij}^0); \quad (9)$$

- компоненти тензора напруження в рамках моделі пружних деформацій:

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g_{ij}^0 + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (10)$$

де  $\lambda$  і  $\mu$  параметри Ламе матеріалу,  $I_1(\varepsilon)$  – перший інваріант тензора деформації:

$$I_1(\varepsilon) = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} g_{ij}^0, \quad (11)$$

де  $g_{ij}^0$  – компоненти матриці, оберненої до  $g_{ij}^0$ .

При відтворенні координат точок поверхні в контрольний момент часу широко використовуються інтерполяційні (кубічний сплайн, кубічний сплайн із згладжуванням [4]) та апроксимаційні процедури за методом найменших квадратів [6]. Вказані алгоритми реалізуються за допомогою стандартних пакетів прикладних програм [7].

Одержані за методикою (1) – (11) значення механічних напружень характеризують реальні напруження – в тому випадку, коли можна вважати, що в початковий момент часу напруження в посудині, що працює під тиском дорівнюють нулю. Якщо ж в початковий момент напруження є невідомими, то отримані значення характеризуватимуть зміну напруженого стану посудини, що працює під тиском.

Як було зазначено вище, одержані значення напружень (або характеристики їх зміни) одержуються без використання математично формалізованих значень сил, навантажень різної природи, які діють на об'єкті. Для знайдених компонентів можна записати:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^T + \sigma_{ij}^H, \quad (12)$$

де  $\sigma_{ij}^T$  – напруження знайдені за (11);

$\sigma_{ij}^H$  – значення напружень які можуть бути визначені теоретично (кільцеві напруження від дії внутрішнього тиску, температурних перепадів, тощо). Як правило, вказані напруження є однаковими в кожній точці тіла або функціями просторових координат;

$\sigma_{ij}^H$  – залишкові, неформалізовані напруження природа яких часто залишається невідомою. Зокрема для циліндричної частини посудини напруження визначаються за відомими формулами.

Для труби, що перебуває під дією внутрішнього тиску  $P$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{R_{BH}^2 \cdot P}{R_3^2 - R_{BH}^2} \cdot \left(1 - \frac{R_3^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{R_{BH}^2 \cdot P}{R_3^2 - R_{BH}^2} \cdot \left(1 + \frac{R_3^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \frac{R_{BH}^2 \cdot P}{R_3^2 - R_{BH}^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для сферичної частини (рисунок 4), де  $\alpha$  – кут який визначає частину сфери, яка є верхнім куполом посудини,  $\varphi$  – значення кута для даної точки;  $h$  – товщина стінки,  $R$  – радіус кривини. Всі компоненти тензора напружень визначаються формулами:

– меридіальне напруження під дією власної ваги:

$$\sigma_m = - \frac{\gamma_m \cdot R}{1 + \cos \varphi}, \quad (14)$$

де,  $\gamma_m$  – густина матеріалу;

– кільцеві напруження:

$$\sigma_{\theta\theta} = \gamma_m \cdot R \cdot \frac{1 - \cos \varphi - \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}. \quad (15)$$

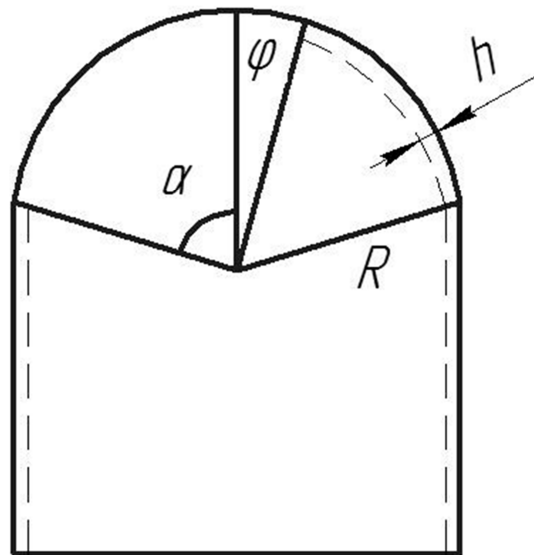


Рисунок 4 – Схема сферичної частини

Під дією тиску  $P$  [7]:

$$\sigma_m = \sigma_{\theta\theta} = \frac{P \cdot R}{2 \cdot h}. \quad (16)$$

Для конічної частини (рисунок 5) під дією внутрішнього тиску виникають напруження (де  $h$  – товщина стінки,  $\omega$  – переміщення в напрямку нормалі,  $2\alpha$  – кут при вершині конуса):

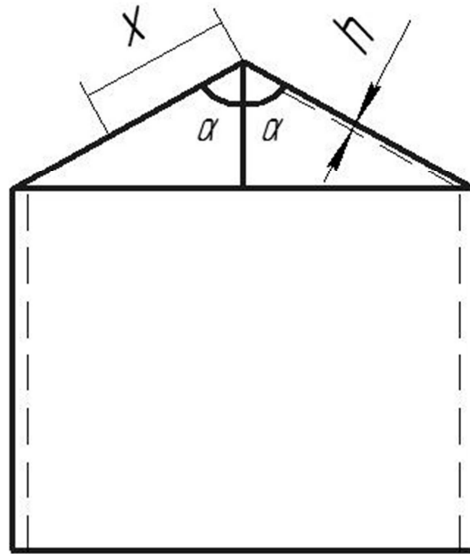


Рисунок 5 – Схема конічної вершини

$$\sigma_m = \frac{pxt\alpha}{2h}, \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pxt\alpha}{h}, \quad (18)$$

$$\omega = \frac{3px^2tg^2\alpha}{4hE}, \quad (19)$$

де  $E$  – модуль Юнга матеріалу

Наведені формули стосуються лише основних, найбільш легко формалізованих напружень.

Предметом подальших досліджень є напруження  $\sigma_{ij}^H$ , обчислення за (1) – (12) з урахуванням (13) – (19). Природа цих напружень є невідомою, тому необхідно висунути гіпотезу, від яких параметрів ці напруження залежать, в чому причина їх виникнення. Вони можуть залежати від фізико-механічних властивостей матеріалу, електричних параметрів, тощо. Нехай  $x_1, \dots, x_N$  –  $N$  – факторів, що впливають на  $\sigma_{ij}^H$ . Якщо провести виміри  $\sigma_{ij}^H$  при різних значеннях параметрів  $x_i$ , то для встановлення степеню взаємозв'язку між  $\sigma_{ij}$  та  $x_i$  використовується метод асоціативного аналізу. Для  $\sigma_{ij}^H$  та  $x_i$  встановлюються значення  $\sigma$  та  $X^i$  які визначають медіану розподілу цих величин на діапазонні їх зміни, при цьому заповнюється наступна таблиця (таблиця 1), яка містить результати  $N$  дослідів за критерієм їх попадання у відповідний інтервал. При цьому одержується [7].

**Таблиця 1 – Результати  $N$  дослідів за критерієм їх попадання у відповідний інтервал**

	$\sigma_{ij}^H < \sigma$	$\sigma_{ij}^H > \sigma$		$a+b+c+d=N$
$x_i < X^i$	$a$	$b$	$a+b$	
$x_i > X^i$	$c$	$d$	$c+d$	
	$a+c$	$b+d$	$N$	

де  $a, b, c, d$  – кількість результатів дослідів при відповідних значеннях ( $x_i; \sigma_{ij}^H$ ).

Тоді визначаються коефіцієнти:

$$\Psi_T = \frac{3}{\sqrt{N-1}}, \quad (20)$$

$$\Psi_E = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}. \quad (21)$$

Якщо  $\Psi_E > \Psi_T$ , то зв'язок між  $x_i$  та  $\sigma_{ij}^H$  є суттєвим, значущим, він вимагає подальшого дослідження, якщо ж  $\Psi_E < \Psi_T$ , то зв'язок між величинами є не суттєвим, ним можна знехтувати. При суттєвому взаємозв'язку між величинами  $\sigma_{ij}^H$  та  $x_i, k=1, 2, 3$  за методом найменших квадратів вдається побудувати неповну кубічну модель виду:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^H &= \eta(x_1 x_2 x_3) = \\ &= \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 + \theta_{12} x_1 x_2 + \\ &+ \theta_{13} x_1 x_3 + \theta_{23} x_2 x_3 + \theta_{123} x_1 x_2 x_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Яка при певних умовах [7] може бути адекватно замінена лінійною моделлю:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^H &= \eta(x_1 x_2 x_3) = \\ &= \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3. \end{aligned} \quad (23)$$

### Висновки

В роботі:

- запропоновано математичну модель для оцінки зміни напружено-деформованого стану посудин, що працюють під дією високого тиску

за відомими переміщеннями точок поверхні з урахуванням різної конфігурації склепіння – сферичної та конічної;

- запропоновано методику оцінки б компонент тензору напружень;

- виявлено та встановлено кількісні характеристики напружень в посудині під дією тиску з урахуванням конфігурації склепіння;

- наведено методику виявлення факторів впливу на напружено-деформований стан з використанням методів асоціативного аналізу з метою виявлення причин появи несиметричних деформацій.

Для проведення подальших досліджень запропонованої методики необхідне проведення експериментальних досліджень, які б дозволили:

- визначати переміщення точок об'єкта;

- визначати реальні фізико-механічні властивості матеріалу;

- визначати всі параметри (що встановлюються методом асоціативного аналізу) напруженого стану об'єкта.

### Література

1. Карпаш А. М. Особенности применения современных методов контроля для определения напряженно-деформированного состояния металлических конструкций / А. М. Карпаш, Н. Л. Тацакович, Е. Р. Доценко // “NDT days 2016” / SCIENTIFIC PROCEEDINGS. XXXI, №1 (187). – 2016. – С. 319-324.

2. Тацакович Н. Л. Проблемы технического диагностирования технологического оборудования автомобильных газонаполнительных компрессорных станций / Н. Л. Тацакович, А. М. Карпаш, О. М. Карпаш // “NDT days 2013” / SCIENTIFIC PROCEEDINGS. XXVIII, №2 (139). – 2013. – С. 40-43.

3. Олійник А. П. Математичні моделі процесу квазістаціонарного деформування трубопроводних та промислових систем при зміні їх просторової конфігурації / А. П. Олійник. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2010. – 320 с.

4. Седов Л. И. Механика сплошных сред / Л. И. Седов – М.: Наука, 1984. – т.2 – 572 с.

5. Самарский А. А. Численные методы / А. В. Гулин, А. А. Самарский – М.: Наука, 1989. – 432 с.

6. Дорошенко В. М. Основи наукових досліджень / В. М. Дорошенко – К.: ІСДО, 1993. – 128 с.

7. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії  
06.06.17

Рекомендована до друку  
професором **Райтером П.М.**  
(ІФНТУНГ, м. Івано-Франківськ)  
д-ром техн. наук **Банахевичем Ю.В.**  
(ПАТ «Укртрансгаз» НАК «Нафтогаз України»,  
м. Київ)