

## КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ НА ФОКАЛЬНОЙ ОСИ КРУГЛОЙ СФОКУСИРОВАННОЙ АПЕРТУРЫ

### Введение

Знание корреляционных свойств поля необходимо при оценке разброса случайной ДН (амплитудной, фазовой, поляризованной в определенном угловом секторе), необходимого в свою очередь при решении ряда важных прикладных задач. К числу таковых можно, в частности, отнести задачу анализа потенциальной точности моноимпульсных РЛС или фазовых пеленгаторов, работающих в неоднородной среде, расчет надежности систем углового разнесенного приема и т.д. В [1] изучены корреляционные свойства флуктуаций поля сфокусированной круглой апертуры на фокальной сфере. В данной работе рассматриваются корреляционные характеристики поля на фокальной оси. Получены выражения для корреляционных функций флуктуаций комплексного поля и его вещественной и мнимой компонент, а также для корреляционных и взаимных корреляционных функций флуктуаций амплитуды и фазы этого поля в зоне Френеля. Проанализированы зависимости указанных характеристик от параметров фазовых флуктуаций на апертуре – их дисперсии и радиуса корреляции.

### 1. Исходные соотношения

Рассмотрим плоскую синфазную равномерно возбужденную круглую апертуру радиуса  $R$ , сфокусированную в зону Френеля. Поле данной антенны в приближении Френеля с точностью до несущественного множителя  $i\pi E_A/8$  ( $E_A$  – амплитуда поля на апертуре) можно представить в виде [1]:

$$E_0(\zeta, \psi) = e^{-ib\chi(\zeta)} E_0^{(0)}(\zeta, \psi) = e^{-ib\chi(\zeta)} \frac{2}{\chi(\zeta)} \int_0^1 e^{i2\zeta u^2} J_0(u\psi) u du, \quad (1)$$

Входящие в (1) безразмерные переменные  $\psi, u, \chi$  и  $\zeta$  связаны с реальными координатами системы (рис.1) следующими соотношениями:  $\psi = kR \sin \theta$ ,  $u = \rho_1 / R$ ,  $\chi = r / r_{\text{фс}}^2$  и  $\zeta = \pi(1 - \chi_0/\chi) / 16\chi_0$ . Здесь  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве,  $r_{\text{фс}} = 8R^2/\lambda$  – расстояние до границы дальней зоны,  $\chi_0 = r_f / r_{\text{фс}}$  – нормированное значение фокусного расстояния,  $b = kr_{\text{фс}} = 16\pi(R/\lambda)^2$ .

Если на апертуре имеются фазовые флуктуации  $\Phi(u, \varphi_1)$ , то вместо (1) имеем для поля отдельной реализации следующее выражение:

$$E(\zeta, \psi, \varphi) = e^{-ib\chi(\zeta)} E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi) = e^{-ib\chi(\zeta)} \frac{1}{\pi\chi(\zeta)} \int_S e^{i\Phi(u, \varphi_1)} e^{i2\zeta u^2} e^{iu\psi \cos(\varphi - \varphi_1)} ds. \quad (2)$$

Будем считать, что функция  $\Phi(u, \varphi_1)$  – нормальная, однородная по раскрытию, случайная функция с нулевым средним значением, дисперсией  $\overline{\Phi^2(u, \varphi_1)} = \sigma^2(u, \varphi_1) = \alpha = \text{const}$  и коэффициентом корреляции гауссовского вида

<sup>1</sup> Здесь и далее верхний индекс (0) означает, что соответствующая величина записана без учета множителя  $\exp[-ib\chi(\zeta)]$ . В данном случае это величина  $E_0(\zeta, \psi)$ .

<sup>2</sup> Поскольку в качестве основной продольной переменной в дальнейшем используется  $\zeta$ , то безразмерная величина  $\chi$ , выраженная через  $\zeta$  как  $\chi(\zeta) = \chi_0 / (1 - 16\chi_0\zeta/\pi)$ , далее будет обозначаться как  $\chi(\zeta)$ .

$$r = \frac{\overline{\Phi(u, \varphi_1) \cdot \Phi(u', \varphi'_1)}}{\alpha} = e^{-\frac{u^2 + u'^2 - 2uu' \cos(\varphi_1 - \varphi'_1)}{c^2}},$$

где числитель дроби в показателе экспоненты – квадрат расстояния между точками с координатами  $u, \varphi_1$  и  $u', \varphi'_1$ , а знаменатель – квадрат радиуса корреляции  $c$  в относительных единицах, связанного с радиусом корреляции фазовых флуктуаций  $\rho_0$  соотношением  $c = \rho_0 / R$ .

Тогда, усредняя соотношение (2), получим

$$\overline{E(\zeta, \psi, \varphi)} = e^{-ib\chi(\zeta)} \overline{E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi)} = e^{-ib\chi(\zeta)} e^{-\frac{\alpha}{2}} E_0^{(0)}(\zeta, \psi). \quad (3)$$

Соотношения (2) и (3) являются исходными для определения корреляционных характеристик поля антенны с круглой апертурой.

В рамках корреляционной теории флуктуации поля

$$\begin{aligned} \delta E(\zeta, \psi, \varphi) &= e^{-ib\chi(\zeta)} \left[ E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi) - \overline{E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi)} \right] = \\ &= \frac{e^{-ib\chi(\zeta)}}{\chi(\zeta)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[2\zeta u^2 + u\psi \cos(\varphi - \varphi_1)]} \left[ e^{i\Phi(u, \varphi_1)} - e^{-\frac{\alpha}{2}} \right] d\varphi_1 u du = A(\zeta, \psi, \varphi) + iB(\zeta, \psi, \varphi) \end{aligned} \quad (4)$$

где  $A(\zeta, \psi, \varphi) = \text{Re} \delta E(\zeta, \psi, \varphi)$ ,  $B(\zeta, \psi, \varphi) = \text{Im} \delta E(\zeta, \psi, \varphi)$  – реальная и мнимая части флуктуаций поля, описываются корреляционной матрицей второго порядка [2]:

$$\mathbf{K}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \begin{pmatrix} K_{AA_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) & K_{AB_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) \\ K_{BA_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) & K_{BB_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь  $K_{AA_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  и  $K_{BB_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  – корреляционные функции (КФ), а  $K_{AB_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  и  $K_{BA_1}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  – взаимные корреляционные функции (ВКФ) реальной и мнимой частей флуктуаций поля.

В общем случае, когда  $\psi \neq \psi_1$ ,  $\zeta \neq \zeta_1$ ,  $\varphi \neq \varphi_1$ , корреляционная матрица (5) характеризует корреляционную связь между флуктуациями поля в произвольных точках  $(\zeta, \psi, \varphi)$  и  $(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$ . Эта же матрица  $\mathbf{K}$  при  $\zeta = \zeta_1$ , но  $\varphi \neq \varphi_1$ ,  $\psi \neq \psi_1$  будет характеризовать корреляцию между флуктуациями поля в поперечном направлении (в точках, лежащих на сфере радиуса  $\zeta$ , а при  $\zeta = \zeta_1 = 0$  на фокальной сфере). При  $\psi = \psi_1 = 0$  она характеризует корреляционную связь флуктуаций поля в продольном направлении (вдоль фокальной оси). Если же  $\psi = \psi_1$ ,  $\zeta = \zeta_1$ ,  $\varphi = \varphi_1$ , то диагональные элементы матрицы  $\mathbf{K}$  определяют дисперсию  $\sigma_A^2(\zeta, \psi, \varphi)$ ,  $\sigma_B^2(\zeta, \psi, \varphi)$ , а недиагональные – характеризуют корреляцию  $A(\zeta, \psi, \varphi)$  и  $B(\zeta, \psi, \varphi)$  в точке с координатами  $\zeta, \psi, \varphi$ .

Отметим, что если флуктуации поля излучающей системы (ИС) распределены по нормальному закону, то статистическое описание функции  $\delta E(\zeta, \psi, \varphi)$  с помощью матрицы  $\mathbf{K}$  будет исчерпывающим. Нормальный закон распределения флуктуаций поля будет иметь место в случае малых фазовых флуктуаций в апертуре или в случае, когда радиус корреляции этих флуктуаций много меньше размера ИС [2].

Введем, следуя [2], корреляционные функции

$$K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \overline{\delta E(\zeta, \psi, \varphi) \delta E^*(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} = e^{-ib[\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)]} \overline{\delta E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi) \delta E^{(0)*}(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} = e^{-ib[\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)]} K_1^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1), \quad (6)$$

$$K_2(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \overline{\delta E(\zeta, \psi, \varphi) \delta E(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} = e^{-ib[\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)]} \overline{\delta E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi) \delta E^{(0)}(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} = e^{-ib[\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)]} K_2^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1), \quad (7)$$

где \* – знак комплексного сопряжения, а вспомогательные функции

$$K_1^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \overline{E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi) E^{(0)*}(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} - \overline{E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi)} \overline{E^{(0)*}(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)}, \quad (8)$$

$$K_2^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \overline{E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi) E^{(0)}(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} - \overline{E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi)} \overline{E^{(0)}(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)}. \quad (9)$$

Значение  $K_1(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  при  $\zeta_1 = \zeta, \psi_1 = \psi, \varphi_1 = \varphi$  определяет дисперсию флуктуаций комплексного поля:

$$K_1(\zeta, \psi, \varphi) = \overline{|\delta E(\zeta, \psi, \varphi)|^2} = \overline{|E(\zeta, \psi, \varphi)|^2} - \left| \overline{E(\zeta, \psi, \varphi)} \right|^2, \quad (10)$$

где первое слагаемое есть средняя интенсивность поля, а второе – квадрат модуля среднего поля.

При принятой в данной работе статистике фазовых флуктуаций

$$\overline{E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi) E^{(0)*}(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} = \frac{e^{-\alpha}}{\chi(\zeta)\chi(\zeta_1)} \left\{ E_0^{(0)}(\zeta, \psi) E_0^{(0)*}(\zeta_1, \psi_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(+1)^n \alpha^n}{n!} T_n^{(1)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) \right\}, \quad (11)$$

$$\overline{E^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi) E^{(0)}(\zeta_1, \psi_1, \varphi_1)} = \frac{e^{-\alpha}}{\chi(\zeta)\chi(\zeta_1)} \left\{ E_0^{(0)}(\zeta, \psi) E_0^{(0)}(\zeta_1, \psi_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n!} T_n^{(2)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) \right\}. \quad (12)$$

Здесь  $c_n = c/\sqrt{n}$ ,  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1$  и согласно (П.7)

$$T_n^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = 4 \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) (\pm 1)^m \cos(m\Delta\varphi) S_m^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1), \quad (13)$$

где

$$S_m^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-\frac{u^2 + u_1^2}{c_n^2}} e^{i2(\zeta u^2 m \zeta_1 u_1^2)} I_m \left( \frac{2uu_1}{c_n^2} \right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1) uu_1 du du_1. \quad (14)$$

Подставив (11), (12) в (8), (9), получаем

$$K_{1,2}^{(0)}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{1}{\chi(\zeta)\chi(\zeta_1)} e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n \alpha^n}{n!} T_n^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi). \quad (15)$$

Как следует из (13) – (15),  $K_{1,2}^{(0)}(\zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1)$  – комплексные функции.

Так как согласно (6), (7) и (4)  $K_1 = \overline{(A + iB) \cdot (A + iB)^*} = (K_{AA_1} + K_{BB_1}) + i(K_{BA_1} - K_{AB_1})$

И  $K_2 = (K_{AA_1} + K_{BB_1}) + i(K_{BA_1} + K_{AB_1})$ , то элементы корреляционной матрицы выражаются через введенные вспомогательные функции  $K_{1,2}^{(0)}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)$  следующим образом<sup>3</sup>:

$$K_{AA_1, BB_1} = \frac{\operatorname{Re} K_1 \pm \operatorname{Re} K_2}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \cos b[\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)] \operatorname{Re} K_1^{(0)} \pm \cos b[\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)] \right. \\ \left. \times \operatorname{Re} K_2^{(0)} + \sin b[\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)] \operatorname{Im} K_1^{(0)} \pm \sin b[\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)] \operatorname{Im} K_2^{(0)} \right\}, \quad (16)$$

$$K_{BA_1, AB_1} = \frac{\operatorname{Im} K_2 \pm \operatorname{Im} K_1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \pm \cos b[\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)] \operatorname{Im} K_1^{(0)} + \cos b(\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Im} K_2^{(0)} \mp \sin b[\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)] \operatorname{Re} K_1^{(0)} - \sin b[\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)] \operatorname{Re} K_2^{(0)} \right\}. \quad (17)$$

Коэффициенты корреляции флуктуаций комплексного поля и его реальной и мнимой компонент при этом определяются выражениями:

$$R(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{K_1(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)}{\sigma_1(\zeta, \psi) \sigma_1(\zeta_1, \psi_1)}, \quad (18)$$

$$R_{AA_1, BB_1}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{K_{AA_1, BB_1}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)}{\sigma_{A,B}(\zeta, \psi) \sigma_{A_1, B_1}(\zeta_1, \psi_1)}, \quad (19)$$

$$R_{AB_1, BA_1}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{K_{AB_1, BA_1}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)}{\sigma_{A,B}(\zeta, \psi) \sigma_{B_1, A_1}(\zeta_1, \psi_1)}, \quad (20)$$

где  $R(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)$  – коэффициент корреляции флуктуаций комплексного поля, а

$$\sigma_1(\zeta, \psi) = \sqrt{K_1(\zeta, \psi, \zeta, \psi, \Delta\varphi = 0)}, \quad \sigma_{A,B}(\zeta, \psi) = \sqrt{K_{AA, BB}(\zeta, \psi, \zeta, \psi, \Delta\varphi = 0)}. \quad (21)$$

Полученные соотношения справедливы при произвольных значениях дисперсии  $\alpha$  и радиуса корреляции  $c$  фазовых флуктуаций на апертуре.

## 2. Корреляция комплексного поля и его реальной и мнимой компонент

Для точек на фокальной оси продольные<sup>4</sup> КФ и ВКФ будем записывать с верхним индексом “Р” – например,  $K_{1,2}^{(0)P}$ ,  $K_{AA_1}^P$ ,  $K_{BB_1}^P$ ,  $K_{AB_1}^P$  и т.д.

Полагая в (15)  $\psi = \psi_1 = 0$ , для функций  $K_{1,2}^{(0)}$  получим:

$$K_{1,2}^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) = \frac{1}{\chi(\zeta)\chi(\zeta_1)} e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\alpha^n}{n!} T_n^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \zeta_1), \quad (22)$$

где, согласно (П.17)

<sup>3</sup> Здесь и далее аргументы у КФ и ВКФ в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, для краткости будут опускаться

<sup>4</sup> Здесь и далее вместо термина “корреляционные функции в продольном направлении» будем использовать более короткий термин «продольные» корреляционные функции.

$$T_n^{(1),(2)}(c, \zeta, \zeta_1) = 4 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\frac{u^2 + u_1^2}{c_n^2}} e^{i2(\zeta u^2 m \zeta_1 u_1^2)} I_0 \left( \frac{2uu_1}{c_n^2} \right) uu_1 du du_1 \quad (23)$$

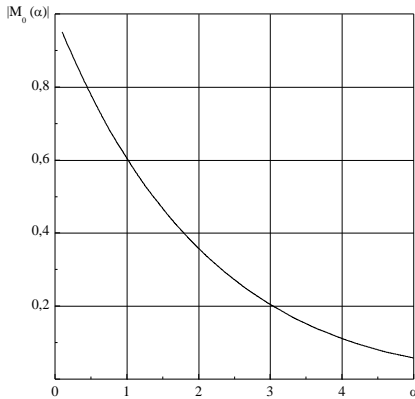


Рис. 2

Продольные КФ комплексного поля, его реальных и мнимых компонент, их ВКФ и соответствующие коэффициенты корреляции определяются выражениями (16), (17) и (19), (20).

Рассмотрим ряд частных случаев: а) радиусы корреляции флуктуаций фазы поля на апертуре малы, б) флуктуации фазы малы

**Радиусы корреляции малы.** Согласно (П.18) при  $c \ll 1$  функции  $T_n^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \zeta_1)$  с точностью до  $c_n^2$  имеют вид

$$T_n^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \zeta_1) = c_n^2 e^{i(\zeta m \zeta_1)} \frac{\sin(\zeta m \zeta_1)}{\zeta m \zeta_1}, \quad (24)$$

Тогда, согласно (22), получим

$$K_{1,2}^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) = \frac{c^2}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} e^{-\alpha} M_{1,2}(\alpha) e^{i(\zeta m \zeta_1)} \frac{\sin(\zeta m \zeta_1)}{\zeta m \zeta_1}, \quad (25)$$

и, подставив (25) в (16) и (17)

$$K_{AA_1, BB_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \frac{c^2}{2\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} e^{-\alpha} M_1(\alpha) \left\{ \frac{\sin(\zeta - \zeta_1) \cos[(\zeta - \zeta_1) - b(\chi - \chi_1)]}{(\zeta - \zeta_1)} \pm \right. \\ \left. \pm M_0(\alpha) \frac{\sin(\zeta + \zeta_1) \cos[(\zeta + \zeta_1) - b(\chi + \chi_1)]}{(\zeta + \zeta_1)} \right\}, \quad (26)$$

$$K_{BA_1, AB_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \frac{c^2}{2\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} e^{-\alpha} M_1(\alpha) \left\{ \frac{\sin(\zeta + \zeta_1) \sin[(\zeta + \zeta_1) - b(\chi + \chi_1)]}{\zeta + \zeta_1} \times \right. \\ \left. \times M_0(\alpha) \pm \frac{\sin(\zeta - \zeta_1) \sin[(\zeta - \zeta_1) - b(\chi - \chi_1)]}{\zeta - \zeta_1} \right\}, \quad (27)$$

где  $M_0(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{n!n} / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!n} = \frac{M_2(\alpha)}{M_1(\alpha)}$ ,  $M_{1,2}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n \alpha^n}{n!n} = \begin{cases} \text{Ei}(\alpha) - \ln \alpha - \gamma \\ \Gamma(0, \alpha) - \ln \alpha - \gamma \end{cases}$ .

Здесь  $\text{Ei}(\alpha)$  – интегральная показательная функция,  $\Gamma(0, \alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} (e^{-t}/t) dt$  – неполная гамма-функция [3],  $\gamma$  – постоянная Эйлера. Величина  $M_0(\alpha)$  отрицательна и её модуль монотонно уменьшается с ростом  $\alpha$ . Для малых  $\alpha$  это следует из асимптотического разложения  $M_0(\alpha)$  при  $\alpha \ll 1$ :  $M_0(\alpha) \approx -(1 - 0.5\alpha)$ . Для более широкого интервала значений  $\alpha$  график  $|M_0(\alpha)|$  представлен на рис. 2.

Величины дисперсий определяется выражением

$$\sigma_{A,B}^P{}^2(\zeta) = \frac{c^2 e^{-\alpha}}{2\chi^2(\zeta)} M_1(\alpha) \left[ 1 \pm M_0(\alpha) \frac{\sin 2\zeta \cos 2(\zeta - b\chi)}{2\zeta} \right].$$

Коэффициенты корреляции флуктуаций при этом принимают соответственно вид

$$R_{AA_1, BB_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \frac{\frac{\sin(\zeta - \zeta_1) \cos[b(\chi - \chi_1) - (\zeta - \zeta_1)]}{(\zeta - \zeta_1)} \pm M_0(\alpha) \frac{\sin(\zeta + \zeta_1) \cos[b(\chi + \chi_1) - (\zeta + \zeta_1)]}{(\zeta + \zeta_1)}}{\sqrt{1 \pm M_0(\alpha) \frac{\sin 2\zeta \cos 2(b\chi(\zeta) - \zeta)}{2\zeta}} \sqrt{1 \pm M_0(\alpha) \frac{\sin 2\zeta_1 \cos 2(b\chi(\zeta_1) - \zeta_1)}{2\zeta_1}}}, \quad (28)$$

$$R_{BA_1, AB_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \frac{-M_0(\alpha) \frac{\sin(\zeta + \zeta_1) \sin[b(\chi + \chi_1) - (\zeta + \zeta_1)]}{\zeta + \zeta_1} \mp \frac{\sin(\zeta - \zeta_1) \sin[b(\chi - \chi_1) - (\zeta - \zeta_1)]}{\zeta - \zeta_1}}{\sqrt{1 \mp M_0(\alpha) \frac{\sin 2\zeta \cos 2(b\chi(\zeta) - \zeta)}{2\zeta}} \sqrt{1 \pm M_0(\alpha) \frac{\sin 2\zeta_1 \cos 2(b\chi(\zeta_1) - \zeta_1)}{2\zeta_1}}}, \quad (29)$$

$$R^P(\zeta, \zeta_1) = e^{i[(\zeta - \zeta_1) - b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1))]} \frac{\sin(\zeta - \zeta_1)}{\zeta - \zeta_1}. \quad (30)$$

Заметим, что модуль КФ и коэффициента корреляции флуктуаций комплексного поля, в отличие от КФ, ВКФ и соответствующих коэффициентов корреляции реальной и мнимой частей поля, не зависят от параметра  $b$ . Радиус корреляции порядка  $\pi$  в единицах обобщенной координаты  $\zeta$ .

При  $\alpha \ll 1$  величина  $M_0(\alpha) \approx 0$  и из (28) и (29) следует, что

$$R_{AA_1} = R_{BB_1} = \frac{\sin(\zeta - \zeta_1) \cos[b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)) - (\zeta - \zeta_1)]}{\zeta - \zeta_1},$$

$$R_{AB_1} = -R_{BA_1} = \frac{\sin(\zeta - \zeta_1) \sin[b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)) - (\zeta - \zeta_1)]}{\zeta - \zeta_1}.$$

Коэффициенты корреляции реальных и мнимых компонент равны, взаимные коэффициенты корреляции равны по модулю, но противоположны по знаку.

На рис. 3 и 4 приведены графики (сплошная и штриховая кривые) коэффициентов корреляции реальной и мнимой компонент, а на рис.4 их взаимных коэффициентов корреляции для различных значений дисперсии  $\alpha$  и величины параметра  $b=7$ . Фокусное расстояние  $\chi_0=0.1$ , координата одной из точек наблюдения  $\chi(\zeta_1)=0.095$ , что соответствует  $\zeta_1=-0.1$ .

С ростом дисперсии флуктуаций фазы поля на апертуре взаимная корреляция реальной и мнимой компонент поля ослабевает (штриховые кривые). Коэффициенты корреляции этих компонент имеют практически одинаковый вид (штриховые кривые).

**Флуктуации малы.** При малых флуктуациях с точностью до первого порядка малости по  $\alpha$  имеем

$$K_{1,2}^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) = \frac{\pm \alpha}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} T_1^{(1),(2)}(c, \zeta, \zeta_1). \quad (31)$$

Рассмотрим случаи малых ( $c \ll 1$ ) и больших ( $c \gg 1$ ) радиусов корреляций.

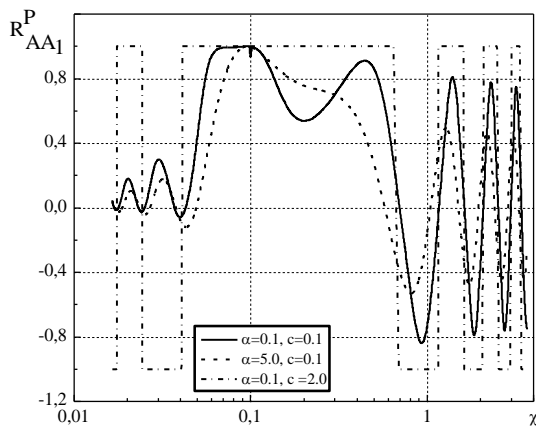
При  $c \ll 1$ , подставив (24) в (28) получим:

$$K_{1,2}^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) = \frac{\pm \alpha c^2}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} e^{i(\zeta m \zeta_1)} \frac{\sin(\zeta m \zeta_1)}{\zeta m \zeta_1} \quad (32)$$

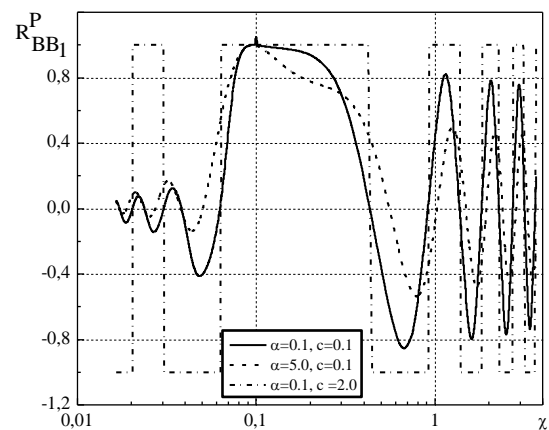
и затем для продольных корреляционных функций компонент флуктуаций поля:

$$K_{AA_1, BB_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \frac{\alpha c^2}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} \left[ \frac{\sin(\zeta - \zeta_1)}{(\zeta - \zeta_1)} \cos[b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)) - (\zeta - \zeta_1)] m + \right. \\ \left. m \frac{\sin(\zeta + \zeta_1)}{(\zeta + \zeta_1)} \cos[b(\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)) - (\zeta + \zeta_1)] \right] \quad (33)$$

$$K_{AB_1, BA_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \frac{\alpha c^2}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} \left[ \pm \frac{\sin(\zeta - \zeta_1)}{(\zeta - \zeta_1)} \sin[b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)) - (\zeta - \zeta_1)] + \right. \\ \left. + \frac{\sin(\zeta + \zeta_1)}{(\zeta + \zeta_1)} \sin[b(\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)) - (\zeta + \zeta_1)] \right] \quad (34)$$

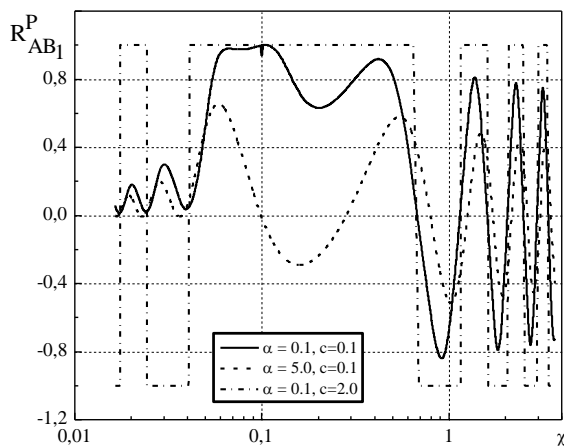


а

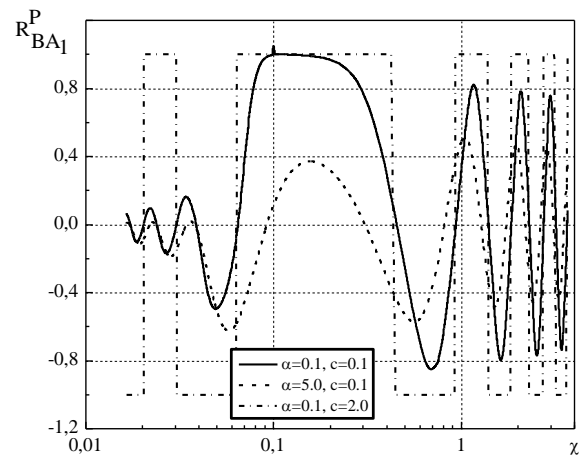


б

Рис. 3



а



б

Рис. 4

Коэффициент корреляции комплексного поля определяется соотношением (30).

При  $c \gg 1$ , как показано в приложении (П.30), с точностью до членов  $1/c^2$  имеем

$$T_1^{(1),(2)}(c, \zeta, \zeta_1) = \left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \frac{\sin \zeta \cdot \sin \zeta_1}{\zeta \zeta_1} e^{i(\zeta m \zeta_1)}.$$

Тогда для функции  $K_{1,2}^{(0)P}(\zeta, \zeta_1)$  получим

$$K_{1,2}^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) = \frac{\pm\alpha}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} \left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \frac{\sin \zeta \cdot \sin \zeta_1}{\zeta \zeta_1} e^{i(\zeta m \zeta_1)}. \quad (35)$$

При этом продольные КФ и ВКФ компонент флуктуаций поля на фокальной оси принимают вид

$$K_{AA_1, BB_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \frac{\alpha}{2\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} \left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \frac{\sin \zeta \cdot \sin \zeta_1}{\zeta \zeta_1} \times \left\{ \cos \left[ b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1) - (\zeta - \zeta_1)) \right] m \cos \left[ b(\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1) + (\zeta - \zeta_1)) \right] \right\}, \quad (36)$$

$$K_{AB_1, BA_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \frac{\alpha}{2\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} \left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \frac{\sin \zeta \cdot \sin \zeta_1}{\zeta \zeta_1} \times \left\{ \pm \sin \left[ b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1) - (\zeta - \zeta_1)) \right] + \sin \left[ b(\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1) - (\zeta + \zeta_1)) \right] \right\}. \quad (37)$$

Коэффициент корреляции комплексного поля

$$R^P(\zeta, \zeta_1) = e^{i \left[ (\zeta - \zeta_1) - b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)) \right]} \operatorname{sign} \left( \frac{\sin \zeta \sin \zeta_1}{\zeta \zeta_1} \right). \quad (38)$$

Представленные на рис. 3 и 4 кривые (сплошные и штрих-пунктирные) коэффициентов корреляции и взаимных коэффициентов корреляции флуктуаций компонент поля (реальных и мнимых частей его) иллюстрируют влияние величины радиуса корреляции флуктуаций фазы на их характер. При малых радиусах корреляции компоненты поля по мере приближения одной из точек к апертуре быстро уменьшается (сплошные кривые). С ростом радиуса корреляции корреляционная и взаимная корреляционная связь между флуктуациями реальных и мнимых компонент поля быстро растет (штрих-пунктирные кривые). Такая же закономерность имеет место и для коэффициента корреляции флуктуаций комплексного поля (рис.5). На рис. 5, а, б приведены кривые продольного коэффициента корреляции для синфазной апертуры (рис. 5, а) и апертуры, сфокусированной в точку с координатой  $\chi_0 = 0.1$  (рис. 5, б).

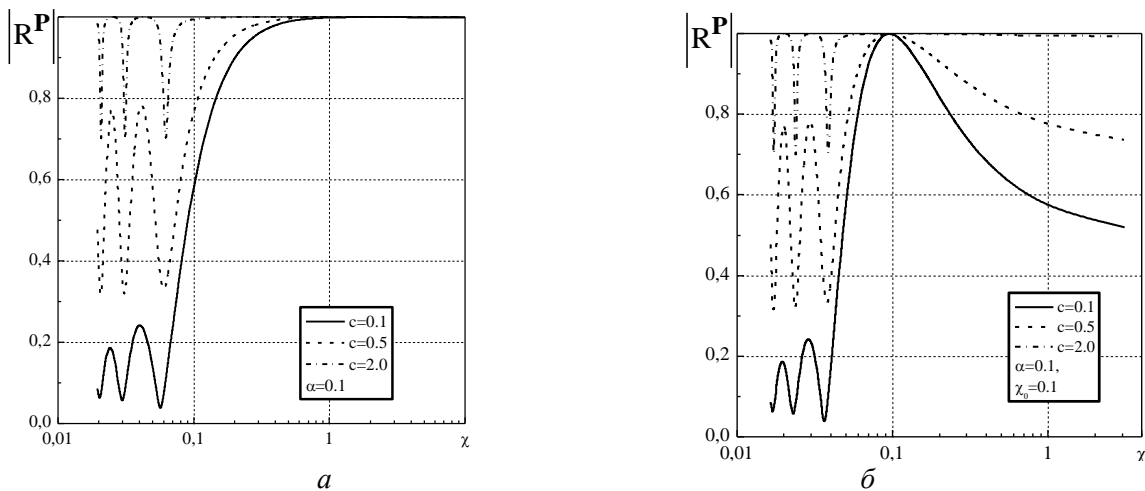


Рис. 5

Видно, что с ростом радиуса корреляции флуктуаций фазы коэффициент корреляции быстро стремится к единице.



### 3. Корреляция амплитуд и фаз поля

#### 3.1. Общие соотношения

При изучении этого вопроса ограничимся случаем малых фазовых флуктуаций в апертуре ( $\alpha \ll 1$ ). При этом флуктуации амплитуды  $\delta P$  и фазы  $\delta \Psi$  комплексного поля сфокусированной в зону Френеля круглой апертуры описываются следующими выражениями [2]:

$$\delta P(\zeta, \psi, \varphi) = \cos \Psi_0 \operatorname{Re}(\delta E) + \sin \Psi_0 \operatorname{Im}(\delta E),$$

$$\delta \Psi(\zeta, \psi, \varphi) = \frac{1}{|E_0(\psi, \zeta)|} [\cos \Psi_0 \operatorname{Im}(\delta E) - \sin \Psi_0 \operatorname{Re}(\delta E)],$$

где величины с нижним нулевым индексом относятся к случаю, когда флуктуации отсутствуют. (Здесь  $\Psi_0 = \Psi_0^{(0)} - b\chi(\zeta)$ , где  $\Psi_0^{(0)}$  фаза поля в отсутствие флуктуаций на апертуре без учета множителя  $\exp[-ib\chi(\zeta)]$ ).

Введем величины  $C^{(0)}(\zeta, \psi) = \operatorname{Re} E_0(\zeta, \psi)$ ,  $D^{(0)}(\zeta, \psi) = \operatorname{Im} E_0(\zeta, \psi)$  и учтем, что  $\cos \Psi_0 = C^{(0)}(\zeta, \psi)/|E_0(\zeta, \psi)|$ ,  $\sin \Psi_0 = D^{(0)}(\zeta, \psi)/|E_0(\zeta, \psi)|$ . Тогда, принимая во внимание обозначения (4), получим

$$\delta P(\zeta, \psi, \varphi) = \left[ C^{(0)}(\zeta, \psi)A(\zeta, \psi, \varphi) + D^{(0)}(\zeta, \psi)B(\zeta, \psi, \varphi) \right] / |E_0(\zeta, \psi)|,$$

$$\delta \Psi(\zeta, \psi, \varphi) = \left[ C^{(0)}(\zeta, \psi)B(\zeta, \psi, \varphi) - D^{(0)}(\zeta, \psi)A(\zeta, \psi, \varphi) \right] / |E_0(\zeta, \psi)|^2.$$

Корреляционные функции флуктуаций амплитуды  $K_{PP_1}$ , фазы  $K_{\Psi\Psi_1}$  и их взаимные корреляционные функции запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} & K_{PP_1}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) \\ & |E_0(\zeta, \psi)| |E_0(\zeta_1, \psi_1)| K_{\Psi\Psi_1}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{|E_0(\zeta, \psi)| |E_0(\zeta_1, \psi_1)|} \times \quad (39)$$

$$\times \left[ C^{(0)}C_1^{(0)}K_{AA_1, BB_1} + D^{(0)}D_1^{(0)}K_{BB_1, AA} \pm C^{(0)}D_1^{(0)}K_{AB_1, BA_1} \pm D^{(0)}C_1^{(0)}K_{BA_1, AB_1} \right]$$

$$K_{P\Psi_1, \Psi P_1}(\zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{1}{|E_0(\zeta, \psi)| |E_0(\zeta_1, \psi_1)|^2} \times \quad (40)$$

$$\times \left[ C^{(0)}C_1^{(0)}K_{AB_1, BA_1} - D^{(0)}D_1^{(0)}K_{BA_1, AB_1} \mp C^{(0)}D_1^{(0)}K_{AA_1, BB_1} \pm D^{(0)}C_1^{(0)}K_{BB_1, AA} \right]$$

где  $K_{AA_1, BB_1}$  и  $K_{AB_1, BA_1}$  определены в (16) и (17).

Следует отметить, что выражения (39), (40) при  $\zeta_1 = \zeta$ ,  $\psi_1 = \psi$  преобразуются в полученные ранее выражения [4] для дисперсий амплитуды и фазы поля  $\sigma_P^2(\zeta, \psi)$ ,  $\sigma_\Psi^2(\zeta, \psi)$ .

Нормированные корреляционные функции  $R_{PP_1}$ ,  $R_{\Psi\Psi_1}$ ,  $R_{P\Psi_1}$ ,  $R_{\Psi P_1}$  определяются соотношениями:

$$R_{PP_1, \Psi\Psi_1}(\zeta, \psi; \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{K_{PP_1, \Psi\Psi_1}(\zeta, \psi; \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)}{\sigma_{P, \Psi}(\zeta, \psi)\sigma_{P_1, \Psi_1}(\zeta_1, \psi_1)}, \quad (41)$$

$$R_{P\Psi_1, \Psi_{P_1}}(\zeta, \Psi; \zeta_1, \Psi_1, \Delta\varphi) = \frac{K_{P\Psi_1, \Psi_{P_1}}(\zeta, \Psi; \zeta_1, \Psi_1, \Delta\varphi)}{\sigma_{P, \Psi}(\zeta, \Psi) \sigma_{\Psi_1, P_1}(\zeta_1, \Psi_1)}. \quad (42)$$

Формулы (43), (44) и (16), (17) позволяют рассчитать корреляционные характеристики флуктуаций амплитуды и фазы поля для круглой апертуры, сфокусированной в зону Френеля при малых фазовых флуктуаций поля возбуждения с произвольными значениями радиуса корреляции  $c$ . Рассмотрим два частных случая.

### 3.2. Корреляция амплитуд и фаз поля на фокальной оси

Для точек на фокальной оси  $\psi = \psi_1 = 0$ . В этом случае

$$E_0(\zeta, 0) = \frac{e^{-i(a\chi - \zeta)}}{\chi(\zeta)} \frac{\sin \zeta}{\zeta}, \quad P_0(\zeta, 0) = |E_0(\zeta, 0)| = \frac{1}{\chi(\zeta)} \left| \frac{\sin \zeta}{\zeta} \right|,$$

$$\Psi_0(\zeta, 0) = \arg\left(\frac{\sin \zeta}{\zeta}\right) - [b\chi(\zeta) - \zeta] = \Psi_0^{(0)}(\zeta) - [b\chi(\zeta) - \zeta], \quad (43)$$

где  $\Psi_0^{(0)}(\zeta)$  равна 0 или  $\pi$ .

Из общих соотношений (39)-(42) тогда имеем:

$$\left. \begin{aligned} & K_{PP_1}^P(\zeta, \zeta_1) \\ & P_0(\zeta) P_0(\zeta_1) K_{\Psi\Psi_1}^P(\zeta, \zeta_1) \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \cos \left[ b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)) + \left( \Psi_0^{(0)}(\zeta) - \Psi_0^{(0)}(\zeta_1) \right) \right] \operatorname{Re} K_1^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) \pm \\ & \pm \cos \left[ b(\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)) + \left( \Psi_0^{(0)}(\zeta) + \Psi_0^{(0)}(\zeta_1) \right) \right] \operatorname{Re} K_2^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) + \\ & + \sin \left[ b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)) + \left( \Psi_0^{(0)}(\zeta) - \Psi_0^{(0)}(\zeta_1) \right) \right] \operatorname{Im} K_1^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) \pm \\ & \pm \sin \left[ b(\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)) + \left( \Psi_0^{(0)}(\zeta) + \Psi_0^{(0)}(\zeta_1) \right) \right] \operatorname{Im} K_2^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) \end{aligned} \right\}, \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} & K_{P\Psi_1}^P(\zeta, \zeta_1) P_0(\zeta_1) \\ & K_{\Psi P_1}^P(\zeta, \zeta_1) P_0(\zeta) \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \sin \left[ b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)) + \left( \Psi_0^{(0)}(\zeta) - \Psi_0^{(0)}(\zeta_1) \right) \right] \operatorname{Re} K_1^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) \operatorname{m} \\ & \operatorname{m} \sin \left[ b(\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)) + \left( \Psi_0^{(0)}(\zeta) + \Psi_0^{(0)}(\zeta_1) \right) \right] \operatorname{Re} K_2^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) - \\ & - \cos \left[ b(\chi(\zeta) - \chi(\zeta_1)) + \left( \Psi_0^{(0)}(\zeta) - \Psi_0^{(0)}(\zeta_1) \right) \right] \operatorname{Im} K_1^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) + \\ & \operatorname{m} \cos \left[ b(\chi(\zeta) + \chi(\zeta_1)) + \left( \Psi_0^{(0)}(\zeta) + \Psi_0^{(0)}(\zeta_1) \right) \right] \operatorname{Im} K_2^{(0)P}(\zeta, \zeta_1) \end{aligned} \right\}, \quad (45)$$

где  $K_{1,2}^{(0)P}(\zeta, \zeta_1)$  с точностью до первой степени  $\alpha$  определены в (31).

Чтобы выяснить зависимость корреляционных и взаимных корреляционных функций флуктуаций амплитуды и фазы от радиуса корреляции флуктуаций фазы на апертуре рассмотрим два случая.

Радиусы корреляции малы ( $c = 1$ ).

Используя (32) для  $K_{1,2}^{(0)P}(\zeta, \zeta_1)$ , имеем

$$K_{PP_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \frac{\alpha c^2}{2\chi(\zeta)\chi(\zeta_1)} \left[ \frac{\sin(\zeta - \zeta_1)}{\zeta - \zeta_1} - \frac{\sin(\zeta + \zeta_1)}{\zeta + \zeta_1} \right] \text{sign} \left( \frac{\sin \zeta \sin \zeta_1}{\zeta \zeta_1} \right), \quad (46)$$

$$K_{\Psi\Psi_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \frac{\alpha c^2}{2} \left[ \frac{\sin(\zeta - \zeta_1)}{\zeta - \zeta_1} + \frac{\sin(\zeta + \zeta_1)}{\zeta + \zeta_1} \right] \left( \frac{\zeta \zeta_1}{\sin \zeta \sin \zeta_1} \right), \quad (47)$$

$$K_{P\Psi_1}^P(\zeta, \zeta_1) = K_{\Psi P_1}^P(\zeta, \zeta_1) = 0. \quad (48)$$

Согласно (48) флуктуации амплитуды и фазы с точностью до величин первого порядка малости по  $\alpha$  не коррелированы.

Радиусы корреляции велики ( $c \gg 1$ ).

В этом случае с учетом (35) для  $K_{1,2}^{(0)P}(\zeta, \zeta_1)$  получим

$$K_{PP_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \alpha \cdot O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad K_{\Psi\Psi_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \alpha \left(1 - \frac{1}{c^2}\right), \quad (49)$$

$$K_{P\Psi_1}^P(\zeta, \zeta_1) = K_{\Psi P_1}^P(\zeta, \zeta_1) = 0. \quad (50)$$

Соответственно коэффициенты корреляции и взаимные коэффициенты корреляции имеют вид:

при  $c = 1$

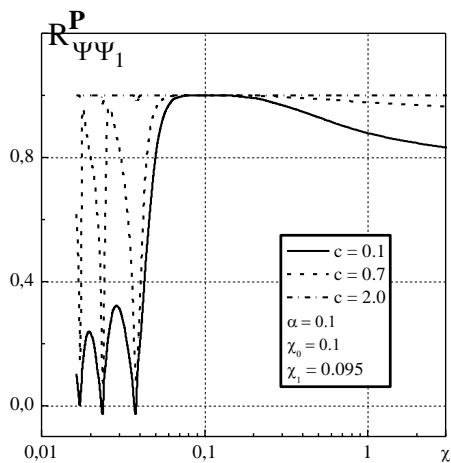
$$\left. \begin{array}{l} \frac{R_{PP_1}^P(\zeta, \zeta_1)}{\text{sign}(\sin \zeta \sin \zeta_1 / \zeta \zeta_1)} \\ R_{\Psi\Psi_1}^P(\zeta, \zeta_1) \end{array} \right\} = \frac{\left[ \sin(\zeta - \zeta_1) / (\zeta - \zeta_1) \text{msin}(\zeta + \zeta_1) / (\zeta + \zeta_1) \right]}{\sqrt{1 \text{msin} 2\zeta / 2\zeta} \sqrt{1 \text{msin} 2\zeta_1 / 2\zeta_1}}, \quad (51)$$

при  $c \gg 1$

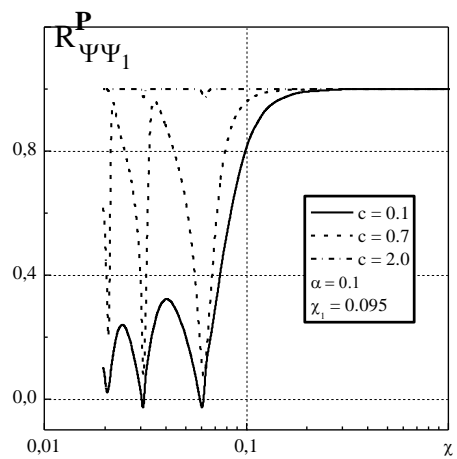
$$R_{PP_1, \Psi\Psi_1}^P(\zeta, \zeta_1) = \text{sign}(\sin \zeta \sin \zeta_1 / \zeta \zeta_1). \quad (52)$$

Из соотношений (47), (48) следует, что с ростом радиуса корреляции фазы поля на апертуре коэффициенты корреляции флуктуаций фазы и амплитуды поля возрастают до единицы. Однако при этом флуктуации амплитуды уменьшаются (их дисперсия стремится к нулю) в то время как дисперсия фазы стремится к величине  $\alpha$ . Это хорошо видно на рис. 6 и 7, на которых приведены графики коэффициентов корреляции амплитуды и фазы на фокальной оси сфокусированной (рис.6, а, 7, а) и синфазной (рис.6, б, 7, б) апертур для различных значений радиусов корреляции.

Из сравнения рис.6, а, 7, а и рис. 6, б, 7, б видно также, что протяженность области коррелированности амплитуды и фазы на фокальной оси для сфокусированных апертур больше. Её ближняя граница с уменьшением фокусного расстояния приближается к апертуре, в то время как дальняя остается на бесконечности.

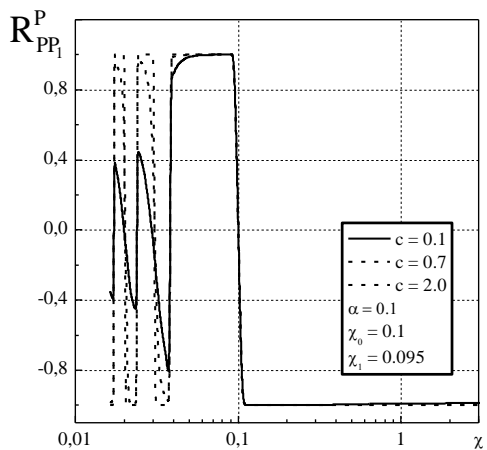


a

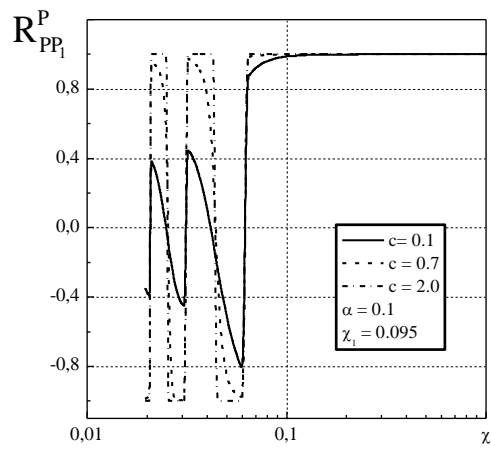


б

Рис. 6



a



б

Рис. 7

### Заключение

Получены корреляционные и взаимные корреляционные функции компонент флуктуаций комплексного поля, а также корреляционные и взаимные корреляционные функции амплитуды и фазы поля в зоне Френеля круглой сфокусированной апертуры при наличии флуктуаций фазы поля на апертуре. Полученные результаты необходимы при оценке уровня поля вне фокального пятна. Проанализированы частные случаи, для которых получены в явном и достаточно простом виде корреляционные и взаимные корреляционные функции, позволившие выяснить влияние статистических параметров флуктуаций фазы поля на апертуре – дисперсии и радиуса корреляции, на характер корреляционных связей компонент поля, а также амплитуды и фазы его.

### Приложение

II. Вычисление функций  $T_n^{(1),(2)}(c, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)$

II.1 Общие выражения

Исходные выражения для  $T_n^{(1),(2)}(c, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi)$  имеют вид:

$$T^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \psi, \varphi, \zeta_1, \psi_1, \varphi_1) = \int_S \int_{S'} e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} e^{i2(\zeta u^2 m \zeta_1 u_1^2)} J^{(1),(2)}(u, u_1, \psi, \varphi, \psi_1, \varphi_1) u u_1 d u d u_1, \quad (\text{П.1})$$

где  $c_n = c/\sqrt{n}$  и

$$J^{(1),(2)}(u, u_1, \psi, \varphi, \psi_1, \varphi_1) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2uu_1}{c_n^2} \cos(\varphi' - \varphi_1')} e^{i[u\psi \cos(\varphi - \varphi') m u_1 \psi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_1')]} d\varphi' d\varphi_1'. \quad (\text{П.2})$$

Введем ряд переменных:  $\eta' = \varphi - \varphi'$ ,  $\eta_1' = \varphi - \varphi_1'$ ,  $\theta = \varphi_1' - \varphi'$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ , и заметим, что  $\eta_1' - \eta' = \theta + \Delta\varphi$ .

С учётом новых переменных экспоненциальные множители в (П.2) запишутся следующим образом:

$$e^{\frac{2uu_1}{c_n^2} \cos(\varphi' - \varphi_1')} = e^{x \cos \theta}, \quad e^{i\psi u \cos(\varphi - \varphi')} = e^{iy \cos \eta'}, \quad e^{mi\psi_1 u_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_1')} = e^{mi y_1 \cos \eta_1'}.$$

Воспользуемся формулами Якоби-Ангера для производящих функций [5]:

$$e^{miz \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (mi)^n e^{in\varphi} J_n(z), \quad e^{z \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} I_n(z). \quad (\text{П.3})$$

где  $J_n(z)$  и  $I_n(z)$  – функции Бесселя первого рода и модифицированные функции Бесселя  $n$ -го порядка соответственно.

С учетом (П.3) и введенных обозначений будем иметь:

$$\begin{aligned} e^{i\psi u \cos \eta'} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\psi u), \quad e^{mi\psi_1 u_1 \cos \eta_1'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (mi)^n i^n e^{in\eta_1'} J_n(\psi_1 u_1), \\ e^{i[\psi u \cos(\varphi - \varphi_1') m \psi_1 u_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_1')]} &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} (mi)^n i^{n+m} e^{i(n\eta' + m\eta_1')} J_n(\psi u) J_m(\psi_1 u_1), \\ e^{\frac{2uu_1}{c_n^2} \cos(\varphi' - \varphi_1')} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} I_k\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right). \end{aligned}$$

Тогда (П.2) принимает вид

$$\begin{aligned} J^{(1),(2)}(u, u_1, \psi, \varphi, \psi_1, \varphi_1) &= \sum_{n,m,k=-\infty}^{\infty} (mi)^m i^{n+m} I_k\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) J_n(\psi u) J_m(\psi_1 u_1) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} e^{i(n\eta' + m\eta_1')} d\eta' d\eta_1' \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Интегрирование по  $\eta'$  и  $\eta_1'$  дает следующий результат:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} e^{i(n\eta' + m\eta_1')} d\eta' d\eta_1' = 4\pi^2 \delta_{n,k} \delta_{n,(-m)}, \quad (\text{П.5})$$

где  $\delta_{n,k}$  – символ Кронекера.

Подставив (П.5) в (П.4), после ряда преобразований получим:

$$J^{(1),(2)}(u, u_1, \psi, \psi_1, \Delta\varphi) = 4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) (mi)^m \cos(m\Delta\varphi) I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1), \quad (\text{П.6})$$

и имеем для  $T_n^{(1),(2)}(c, u, u_1, \psi, \psi_1, \Delta\varphi)$  соответственно

$$T_n^{(1),(2)}(c, \zeta, \psi, \zeta_1, \psi_1, \Delta\varphi) = 4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{0m})(m1)^m \cos(m\Delta\varphi) \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} e^{i2(\zeta u^2 m \zeta_1 u_1^2)} I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1) uu_1 du du_1 \quad (П.7)$$

П.2 Асимптотические выражения для  $T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, \Delta\varphi)$  при  $c \ll 1$  и  $c \gg 1$

При произвольных  $c$  из (П.7), полагая  $\zeta = \zeta_1 = 0$  и опуская нулевые значения из перечня аргументов, имеем

$$T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, \Delta\varphi) = 4 \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m})(\pm 1)^m \cos(m\Delta\varphi) S_m(c_n, \psi, \psi_1) \quad (П.8)$$

где

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1) uu_1 du du_1$$

Рассмотрим случай  $c \ll 1$ . Введем следующие обозначения:

$$f_m(u, u_1) = e^{-\frac{2uu_1}{c_n^2}} I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1) uu_1, \quad s(u_1) = -(u - u_1)^2$$

Тогда  $S_m(c_n, \psi, \psi_1)$  в (П.8) примет вид:

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-\frac{s(u_1)}{c_n^2}} f_m(u, u_1) du_1 du \quad (П.9)$$

Внутренний интеграл по  $u_1$  в (П.9) является интегралом Лапласа и для вычисления его асимптотического (при  $c \rightarrow 0$ ) значения воспользуемся следующим разложением [6]:

$$\int_0^1 e^{-\frac{s(u_1)}{c_n^2}} f_m(u, u_1) du_1 \approx e^{-\frac{s(u=u_1)}{c_n^2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k c^{2(k+\frac{1}{2})},$$

где

$$b_k = \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{(2k)!} \left(\frac{d}{du_1}\right)^k \left\{ f_m(u_1, u) \left[ \frac{2(s(u_1 = u) - S(u_1, u))}{(u_1 - u)^2} \right]^{-k - \frac{1}{2}} \right\} \Big|_{u_1 = u}.$$

и ограничимся в нем главным членом. Тогда для (П.9) имеем:

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = c_n \sqrt{\pi} \int_0^1 e^{-\frac{2u^2}{c_n^2}} I_m\left(\frac{2u^2}{c_n^2}\right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u) u^2 du.$$

При вычислении интеграла при  $c \rightarrow 0$ , используем асимптотическое разложение  $\exp(-2u^2/c_n^2) I_m(-2u^2/c_n^2)$  при больших значениях аргумента [3] и, ограничившись в нем членами первого порядка малости по  $c_n$ , для  $S_m(c_n, \psi, \psi_1)$  имеем:

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \frac{c_n^2}{2} \frac{\psi J_{m+1}(\psi) J_m(\psi_1) - \psi_1 J_m(\psi) J_{m+1}(\psi_1)}{\psi^2 - \psi_1^2}. \quad (П.10)$$

Подставив (П.10) в (П.8) получим окончательное выражение при  $c \ll 1$

$$T_n^{(1),(2)}(c_n, \psi, \psi_1, \Delta\varphi) = 2c_n^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m})(\pm 1)^m \cos(m\Delta\varphi) \frac{\psi J_{m+1}(\psi u) J_m(\psi_1) - \psi J_m(\psi) J_{m+1}(\psi_1)}{\psi^2 - \psi_1^2}. \quad (\text{П.11})$$

Рассмотрим теперь случай  $c \gg 1$ . Для получения асимптотического выражения для  $T_n^{(1),(2)}(c, 0, \psi, 0, \psi_1, \Delta\varphi)$  при  $c \gg 1$  воспользуемся разложением  $I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)$  [6]:

$$I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \frac{u^{2k+m} u_1^{m+2k}}{c_n^{2(m+2k)}}.$$

Тогда  $S_m(c_n, \psi, \psi_1)$  в (П.8) запишется в следующем виде:

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \frac{1}{c_n^{2(m+2k)}} \left\{ \int_0^1 e^{-\frac{u^2}{c_n^2}} u^{m+2k} J_m(\psi u) u du \int_0^1 e^{-\frac{u_1^2}{c_n^2}} u_1^{m+2k} J_m(\psi_1 u_1) u_1 du_1 \right\}$$

Интегралы в фигурных скобках после разложения  $\exp(u^2/c_n^2)$  в степенной ряд сводятся к сумме стандартных интегралов от произведения степенной и бesselовой функций [5]. Опуская простые, но громоздкие преобразования, получим

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \frac{1}{c_n^{2(m+2k)}} F_{m,k}(\psi) F_{m,k}(\psi_1), \quad (\text{П.12})$$

где

$$F_{m,k}(\psi) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(m+p+k)!(p+k)!}{p!c_n^{2p}} \sum_{t=0}^{p+k} (-1)^t \frac{(m+2t+1)}{(m+p+k+t)!(p+k-t)!} \frac{J_{m+2t+1}(\psi)}{\psi}. \quad (\text{П.13})$$

Из выражений (П.12) и (П.13) видно, что если ограничиваться членами не выше второго порядка малости по  $(1/\tilde{n}_n)$ , то необходимо найти только  $S_0(c_n, \psi, \psi_1)$  и  $S_1(c_n, \psi, \psi_1)$ . Соответствующие выражения имеют вид

$$S_0(c_n, \psi, \psi_1) = \frac{J_1(\psi) J_1(\psi_1)}{\psi \psi_1} \left\{ 1 - \frac{1}{c_n^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)} \right] \right\}, \quad (\text{П.14})$$

$$S_1(c_n, \psi, \psi_1) = \frac{1}{c_n^2} \frac{J_2(\psi) J_2(\psi_1)}{\psi \psi_1}. \quad (\text{П.15})$$

Выражения (П.8), (П.14) и (П.15) позволяют получить в явном виде  $T_n^{(1),(2)}$  при  $c \gg 1$ .

$$T_n^{(1),(2)}(c, \psi, \psi_1, \Delta\varphi) = 4 \left\{ \frac{J_1(\psi) J_2(\psi_1)}{\psi \psi_1} \left[ 1 - \frac{1}{c_n^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)} - \frac{1}{2} \frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)} \right) \right] \pm \frac{2}{c_n^2} \cos(\Delta\varphi) \frac{J_2(\psi) J_2(\psi_1)}{\psi - \psi_1} \right\}. \quad (\text{П.16})$$

П.3. Асимптотические выражения для  $T_n^{(1),(2)}(c, \zeta, \zeta_1)$  при  $c \ll 1$  и  $c \gg 1$

Полагая в (П.7)  $\psi = \psi_1 = 0$  и учитывая, что отличным от нуля будет только слагаемое с  $m = 0$  имеем:

$$T_n^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \zeta_1) = 4 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} e^{i2(\zeta u^2 m \zeta_1 u_1^2)} I_0\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) uu_1 du du_1 \quad (\text{П.17})$$

Пусть радиусы корреляции малы ( $c \ll 1$ ). При вычислении двойного интеграла воспользуемся тем, что при  $c \ll 1$  наибольший вклад в значение интеграла дает область малых  $u$ . Поэтому замена во внутреннем интеграле верхнего предела на бесконечность не внесет значительной ошибки. Выполнив интегрирование, после некоторых преобразований получим:

$$T_n^{(1)}(c_n, \zeta, \zeta_1) = \frac{\tilde{n}_n^2}{2} \frac{2\zeta\zeta_1 c_n^2 + i(\zeta - \zeta_1)}{4\zeta^2 \zeta_1^2 c_n^4 + (\zeta - \zeta_1)^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{4\zeta_1^2 c_n^2}{1 + 4\zeta_1^2 c_n^4} + i2\left(\zeta - \frac{\zeta_1}{1 + 4\zeta_1^2 c_n^4}\right)\right] - \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{4\zeta^2 c_n^2}{1 + 4\zeta^2 c_n^4} - i2\left(\zeta_1 - \frac{\zeta}{1 + 4\zeta^2 c_n^4}\right)\right] \right].$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости по  $c_n$ , окончательно имеем

$$T_n^{(1),(2)}(c_n, \zeta, \zeta_1) = c_n^2 e^{i(\zeta m \zeta_1)} \frac{\sin(\zeta m \zeta_1)}{\zeta m \zeta_1}. \quad (\text{П.18})$$

Теперь рассмотрим случай  $c \gg 1$ . В этом случае при вычислении двойного интеграла используем следующее разложение для  $I_0\left(2uu_1/c_n^2\right)$ :

$$I_0\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \frac{u^{2k} u_1^{2k}}{c_n^{4k}}.$$

Тогда двойной интеграл приводится к виду

$$S_0^{(0)}(c_n, \zeta, \zeta_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \frac{1}{c_n^{4k}} \left[ \int_0^1 e^{i(2\zeta - \frac{1}{c_n^2})u^2} u^{2k+1} du \right] \left[ \int_0^1 e^{-(i2\zeta_1 + \frac{1}{c_n^2})u_1^2} u_1^{2k+1} du_1 \right].$$

Выполнив интегрирование по  $u$  и  $u_1$ , после некоторых преобразований получим:

$$S_0^{(0)}(c_n, \zeta, \zeta_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4c_n^{4k}} \frac{[(4\zeta\zeta_1 + \frac{1}{\tilde{n}_n^4}) + \frac{2}{c_n^2}(\zeta - \zeta_1)]^{k+1}}{[(4\zeta\zeta_1 + \frac{1}{\tilde{n}_n^4})^2 + \frac{2}{c_n^4}(\zeta - \zeta_1)^2]^{k+1}} e^{i2(\zeta - \zeta_1)} \times \quad (\text{П.19})$$

$$\times [e^{i2\zeta} - e^{-\frac{1}{c_n^2}} \sum_{p=0}^k \frac{(-1)^p}{p!} (i2\zeta - \frac{1}{c_n^2})^p] [e^{i2\zeta_1} - e^{-\frac{1}{c_n^2}} \sum_{q=0}^k \frac{(-1)^q}{q!} (i2\zeta_1 - \frac{1}{c_n^2})^q]$$

Как показали расчеты, это выражение дает погрешность менее 1% при  $k=30$  для  $c \geq 0.2$ . Если  $c \geq 1.0$ , то достаточно в сумме по  $k$  брать не более двух слагаемых.

Ограничиваясь членами второго порядка малости по  $(c^{-1})$ , из (П.19) получим, опустив громоздкие вычисления, для  $T_n^{(1)}(c, \zeta, 0, \zeta_1, 0)$

$$T_n^{(1)}(c_n, \zeta, \zeta_1) \approx \frac{\sin \zeta \sin \zeta_1}{\zeta \zeta_1} e^{i(\zeta m \zeta_1)} \left( 1 - \frac{1}{c_n^2} \right). \quad (\text{П.20})$$

**Список литературы** 1. Должиков, В.В. Корреляционные характеристики поля на фокальной сфере круглой сфокусированной апертуры // Радиотехника : Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2011. – Вып. 129. – С. 35 – 43. 2. Шифрин, Я.С. Вопросы статистической теории антенн. – М. : Сов. радио, 1970. Y.S. Shifrin. Statistical Antenna Theory. Golem Press, 1971, 370 p. 3. Абрамовиц, А., Стиган, И. Справочник по специальным функциям. – М. : Наука, 1979. 4. Шифрин, Я.С., Должиков, В.В. Статистика поля антенны с круглой апертурой сфокусированной в зону Френеля. Ч. 2. Флуктуационные характеристики поля // Электромагнитные волны и электронные системы: – 2010. – Т.15. № 10. – С. 6-23. 5. Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций. – М. : ИЛ, 1949. 6. Федорюк, М.В. Метод перевала. – М. : Наука, 1977.

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 12.05.2012