

*Н. К. САХНЕНКО, канд. физ.-мат. наук*

## ВОЗБУЖДЕНИЕ КРУГОВОГО РЕЗОНАТОРА УЛЬТРАКОРОТКИМИ ИМПУЛЬСАМИ

### Введение

Оптические резонаторы (микрорезонаторы) на протяжении последнего десятилетия пользуются огромным интересом в связи с широкими возможностями их приложений. Их необычайно высокая добротность находит применение в микролазерах [1], высокодобротных фильтрах [2], оптических переключателях [3], биологических сенсорах [4], элементах оптической памяти [5]. Для таких приложений очень важно эффективное моделирование нестационарных явлений. При решении задач во временной области, чаще всего используется метод конечных разностей во временной области (*finite difference time domain method*), который является очень универсальным, но требует огромных вычислительных затрат. Также, при использовании прямого численного метода, вызывает затруднения физическая трактовка результатов. Кроме всего прочего, метод конечных разностей во временной области имеет большие сложности с нахождением высокодобротных резонансов.

В данной работе используется строгий математический метод, основанный на применении преобразования Лапласа непосредственно к волновому уравнению. Это позволяет для задач с простой геометрией построить решение аналитически. Поле во временной области вычисляется с помощью обратного преобразования Лапласа. Функция в комплексной плоскости определяется точками сингулярности. Обращение преобразования Лапласа осуществляется с помощью вычисления вычетов в особых точках, которые соответствуют собственным частотам структуры, а также оценкой интеграла вдоль разреза. Такой подход гарантирует высокую точность вычислений и позволяет понять и легко трактовать полученные физические результаты.

Этот метод впервые был описан в трудах К. Баума [6 – 7] в 1970-х годах и успешно применялся в изучении широкополосных антенн и задачах распознавания целей. Также этот метод хорошо зарекомендовал себя при решении нестационарных задач в структурах с высокой добротностью [8 – 10].

В статье изучается динамика ультракороткого оптического импульса в круговом диэлектрическом резонаторе. Внешнее поле моделируется импульсным комплексным точечным источником (КТИ) с комплексными координатами [11 – 13].

### Постановка задачи

Рассматривается двумерная задача возбуждения кругового диэлектрического резонатора нестационарным внешним лучом, который моделируется с помощью КТИ. Для тонких дисков трехмерная задача моделируется двумерным эквивалентом с помощью метода эффективного показателя преломления. Будем считать, что эффективный показатель преломления диска равен  $n_d$ , окружающее пространство – вакуум. Материал диска предполагается линейным и немагнитным.

Ограничим рассмотрение случаем перпендикулярной поляризации, хотя предложенный подход может использоваться и для параллельной поляризации. Для описания полей вводится цилиндрическая система координат  $\rho, \varphi, z$ , с началом в центре координат (рис. 1, *a*). В области пространства, свободной от источников, магнитное поле  $h(t, \vec{\rho})$ , которое здесь представлено  $z$ -компонентой, перпендикулярной плоскости резонатора, должно удовлетворять волновому уравнению

$$\left(\Delta - \frac{n_d}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h(t, \vec{\rho}) = 0, \text{ если } \rho < a, \quad (1)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h(t, \vec{\rho}) = 0, \text{ если } \rho > a, \quad (2)$$

где  $\vec{\rho}$  – вектор в полярных координатах  $\rho$  и  $\varphi$ ,  $a$  – радиус резонатора,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  – лапласиан в полярных координатах,  $c$  – скорость света в вакууме. Предполагая, что источник включается после момента времени  $t = 0$ , введем начальные условия

$$h(t = -0, \vec{\rho}) = h(t = +0, \vec{\rho}), \quad \partial_t h(t = -0, \vec{\rho}) = \partial_t h(t = +0, \vec{\rho}). \quad (3)$$

Падающее поле генерируется источником, чьи координаты описываются комплексным вектором  $\vec{\rho}_{cs} = (x_{cs}, y_{cs})$  с координатами

$$\begin{cases} x_{cs} = x_0 + ib \cos \beta \\ y_{cs} = y_0 + ib \sin \beta, \end{cases} \quad (4)$$

где  $x_0, y_0, b, \beta$  – действительные числа. В этом случае расстояние между точкой источника и точкой наблюдения тоже является комплексным  $|\vec{\rho} - \vec{\rho}_{cs}| = \sqrt{(x - x_{cs})^2 + (y - y_{cs})^2}$ .

Источник представлен магнитным током с z-компонентой  $\hat{j}(t, \vec{\rho})$ , нормальной плоскости резонатора. В свободном пространстве, магнитное поле  $h_0(t, \vec{\rho})$  тока имеет вид

$$\Delta h_0(t, \vec{\rho}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_0(t, \vec{\rho}) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \hat{j}(t, \vec{\rho}). \quad (5)$$

Сначала предположим, что источник расположен в точке с действительными координатами, представленной радиус-вектором  $\vec{\rho}_s$ . Используя выражение для двумерной функции Грина во временной области [14]

$$g(t, t', \vec{\rho}, \vec{\rho}_s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(t - t' - |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|/c)}{\sqrt{(t - t')^2 - |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|^2/c^2}}, \quad (6)$$

где  $\theta(\dots)$  – единичная функция Хевисайда, можно записать выражение для поля в свободном пространстве

$$h_0(t, \vec{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\theta(t - t' - |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|/c)}{\sqrt{(t - t')^2 - |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^2/c^2}} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} \hat{j}(t', \vec{\rho}'). \quad (7)$$

Если источник расположен в действительной точке пространства, то  $\hat{j}(t, \vec{\rho}) = j(t) \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_s) / |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|$ , где  $\delta(\dots)$  – дельта функция Дирака и

$$\begin{aligned} h_0(t, \vec{\rho}) &= \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\theta(t - t' - |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|/c)}{\sqrt{(t - t')^2 - |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial t'} j(t') \frac{\delta(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_s)}{|\vec{\rho}' - \vec{\rho}_s|} = \\ &= \varepsilon_0 \int_0^\infty dt' \frac{\theta(t - t' - |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|/c)}{\sqrt{(t - t')^2 - |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial t'} j(t'). \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразование Лапласа  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$  выражения (8) имеет вид

$$H_0(p, \vec{\rho}) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} K_0\left(\frac{p}{c} |\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|\right) p J(p), \quad (9)$$

где  $J(p)$  – изображение функции  $j(t)$ ,  $H_0(p, \vec{\rho})$  – изображение функции  $h_0(t, \vec{\rho})$ ,  $K_0(\cdot)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода. Предположим далее, что вектор  $\vec{\rho}_s$  является комплексным  $\vec{\rho}_s = \vec{\rho}_{cs}$ , где  $\vec{\rho}_{cs}$  определяется выражением (4). Чтобы продемонстрировать направленный характер поля КТИ, применим асимптотические формулы для функции Бесселя при большом значении аргумента

$$K_0\left(\frac{p}{c} |\vec{\rho} - \vec{\rho}_{cs}|\right) \approx \frac{\pi}{\sqrt{2\pi \frac{p}{c} \rho}} e^{-\frac{p}{c}(\rho - \rho_0)} e^{\frac{p}{c} ib \cos(\varphi - \beta)}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Направленность излучения становится очевидной, если перейти к частотному представлению с помощью подстановки  $p = i\omega$ . Очевидно, что уходящая волна экспоненциально растёт, когда  $\cos(\varphi - \beta) = -1$ , т.е.  $\varphi = \pi + \beta$ , и экспоненциально убывает, если  $\cos(\varphi - \beta) = 1$ ,  $\varphi = \beta$ . В свободном пространстве вещественных координат КТИ моделирует луч, исходящий из апертуры с центром в точке  $\rho_0 = (x_0, y_0)$  и шириной, определяемой величиной параметра  $b\omega/c$ , направление излучения луча определяется углом  $\varphi = \pi + \beta$  (рис. 1, а).

При вычислении функции оригинала следует модифицировать формулу обращения:

$$f(t, \vec{\rho}, \vec{\rho}_{cs}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(p, \vec{\rho}, \vec{\rho}_{cs}) e^{p(t-t_1)} dp, \quad (11)$$

где  $t_1 = -ib$  при  $\text{Im } p > 0$ , и  $t_1 = ib$  при  $\text{Im } p < 0$ .

Далее рассмотрим возбуждение диэлектрического резонатора КИ. Для решения данной задачи, применим преобразование Лапласа к волновым уравнениям (1) – (2), включая начальные условия (3). Нуль в правой части уравнения (1) или (2) нужно заменить соответствующей дельта-функцией (по аналогии с (5)). Принимая во внимание теорему сложения для функций Бесселя [15]

$$K_0\left(\frac{p}{c} |\vec{\rho} - \vec{\rho}_{cs}|\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi - \varphi_{cs})} \left( I_k\left(\frac{p}{c} \rho_{cs}\right) K_k\left(\frac{p}{c} \rho\right) \Theta(\rho - |\rho_{cs}|) + I_k\left(\frac{p}{c} \rho\right) K_k\left(\frac{p}{c} \rho_{cs}\right) \Theta(|\rho_{cs}| - \rho) \right), \quad (12)$$

где  $\rho_{cs} = \sqrt{\rho_0^2 - b^2 + 2ib(x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta)}$ ,  $\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ ,  $\varphi_{cs} = \arccos\left(\frac{x_0 + ib \cos \beta}{\rho_{cs}}\right)$ , будем искать решение в виде

$$H(p, \vec{\rho}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(p) I_k\left(n_d \frac{p}{c} \rho\right) e^{ik(\varphi - \varphi_{cs})}, \quad \text{при } \rho < a, \quad (13)$$

$$H(p, \vec{\rho}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(p) K_k\left(\frac{p}{c} \rho\right) e^{ik(\varphi - \varphi_{cs})}, \quad \text{при } \rho > a. \quad (14)$$

здесь  $I_k(\cdot)$ ,  $K_k(\cdot)$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Представление внешнего поля в виде функций  $K_k(\cdot)$  гарантирует выполнение ус-

ловия излучения на бесконечности. Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты  $A_k(p)$  и  $B_k(p)$ , применяем граничные условия, которые представляют собой непрерывность тангенциальных компонент поля на цилиндрической границе  $\rho = a$  и имеют следующий вид:

$$H(p, \rho = -a) = H(p, \rho = +a), \quad \frac{1}{n_d} \frac{\partial}{\partial \rho} H(p, \rho = -a) = \frac{\partial}{\partial \rho} H(p, \rho = +a). \quad (15)$$

Предполагая, что источник расположен снаружи ( $\rho_0 > a$ ), найдем неизвестные коэффициенты в виде

$$A_k = \frac{\varepsilon_0 c}{2\pi pa} \frac{n_d}{I'_k(n_d pa/c)K_k(pa/c) - n_d K'_k(pa/c)I_k(n_d pa/c)} K_k(p\rho_{cs}/c) pJ(p), \quad (16)$$

$$B_k = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \frac{n_d I'_k(pa/c)I_k(n_d pa/c) - I'_k(n_d pa/c)I_k(pa/c)}{I'_k(n_d pa/c)K_k(pa/c) - n_d K'_k(pa/c)I_k(n_d pa/c)} K_k(p\rho_{cs}/c) pJ(p). \quad (17)$$

Функции (16) и (17) имеют бесконечное число полюсов, которые соответствуют собственным значениям резонатора и определяются нулями знаменателя

$$I'_k(n_d pa/c)K_k(pa/c) - n_d K'_k(pa/c)I_k(n_d pa/c) = 0. \quad (18)$$

Кроме этих сингулярностей, есть еще особые точки, связанные с функцией источника  $J(p)$ . Все корни уравнения (18) расположены в комплексной  $p$ -плоскости слева от вертикальной прямой  $\text{Im}(p) = 0$ . Общий вид этих особых точек  $p = \omega'' \pm i\omega'$ , где  $\omega'' < 0$  определяет затухание, а  $\omega'$  – осцилляции.

Кроме полюсов, функции (16) и (17) имеют точку ветвления  $p=0$ . Следовательно, необходимо провести разрез комплексной плоскости, например вдоль отрицательной полупрямой оси  $\text{Re}(p) = 0$ . Следовательно, формула обращения в данном случае имеет вид

$$h(t, \vec{\rho}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} H(p, \vec{\rho}) e^{pt} dp = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \text{res}_{p=p_{km}} [H(p, \vec{\rho}) e^{pt}] - \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Branch cut}} H(p, \vec{\rho}) e^{pt} dp. \quad (19)$$

Каждый вычет в первом слагаемом представляет собой возбуждаемую моду резонатора. Индексы  $k$  и  $m$  определяют число угловых вариаций поля и число вариаций вдоль радиуса.

## Результаты и обсуждение

### Возбуждение поля гармоническим источником

Рассмотрим сначала возбуждение резонатора источником с зависимостью от времени  $j(t) = e^{i\omega_0 t} \Theta(t)$ . Вычисляя вычет только в точке  $p = i\omega_0$ , получим решение стационарной задачи возбуждения резонатора лучом с гармонической зависимостью от времени. На рис. 1, б представлено распределение магнитного поля (модуль действительной части) для случая, когда луч направлен по касательной к резонатору. Параметры луча:  $b/a = 2$ ,  $\beta = \pi/2$ ,  $x_0/a = -1.5$ ,  $y_0/a = 1.5$ ; длина волны  $\lambda = 1500$  нм является резонансной для волны шепчущей галереи  $H_{15,1}$  резонатора радиуса  $a = 1800$  нм, эффективный показатель преломления  $n_d = 2.63 - i \cdot 10^{-5}$ . Такой луч возбуждает волну, бегущую против хода часовой стрелки. Также наблюдается частичное преломление луча. Во всех дальнейших вычислениях используются именно эти значения параметров резонатора и луча.

### Возбуждение резонатора коротким импульсом

Далее рассмотрим источник с импульсной зависимостью от времени  $j(t) = e^{i\omega_0 t} (\Theta(t) - \Theta(t - \tau))$ . Длина волны падающего луча и параметры резонатора такие же, как указано выше. На рис. 2 представлены зависимости от времени действительной части (рис. 2, *a*) и модуля (рис. 2, *б*) магнитного поля  $h(t)$  для импульса длительностью 10 фемтосекунд ( $\phi c$ ), которые получены по формуле (19). Следует отметить, что интеграл вдоль разреза дает существенный вклад только в момент включения и выключения источника, на более поздних этапах его влиянием можно пренебречь и вычислять только вычеты. Расстояние между соседними пиками равняется времени обхода импульса вдоль границы резонатора. В данном случае эта величина примерно равняется  $85 \phi c$ . Импульс значительно короче времени одного обхода и со временем размывается вдоль границы. Это вызвано тем, что короткий импульс перекрывает несколько мод, которые возбуждаются одновременно и распространяются со слегка различающимися скоростями.

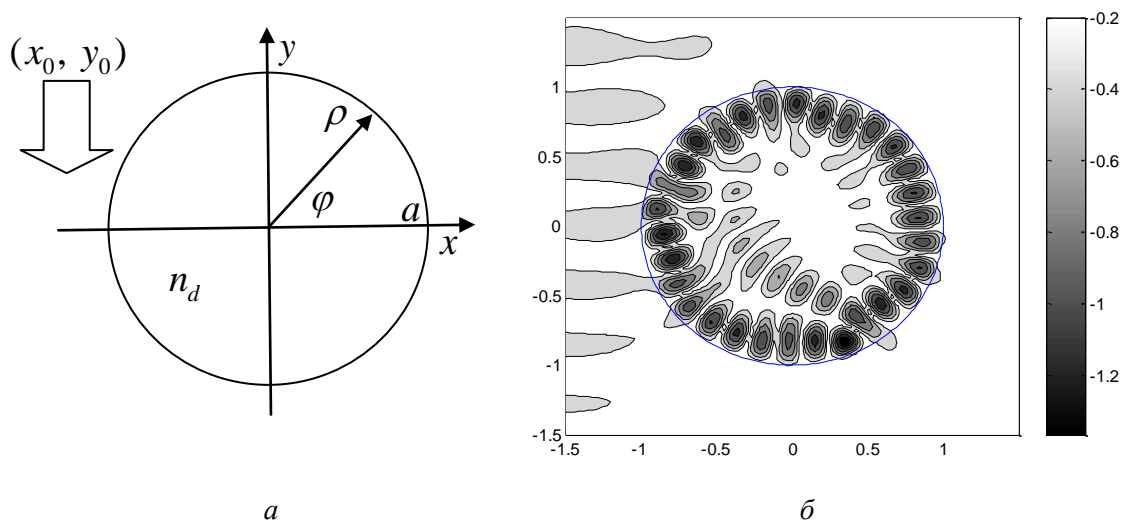


Рис. 1. *a* – схематическая диаграмма ; *б* -пространственное распределения поля при возбуждении резонатора гармоническим источником (длина волны падающего поля  $\lambda = 1500 \text{ нм}$ , радиус резонатора  $a = 1800 \text{ нм}$ ,  $n_d = 2.63 - i \cdot 10^{-5}$ )

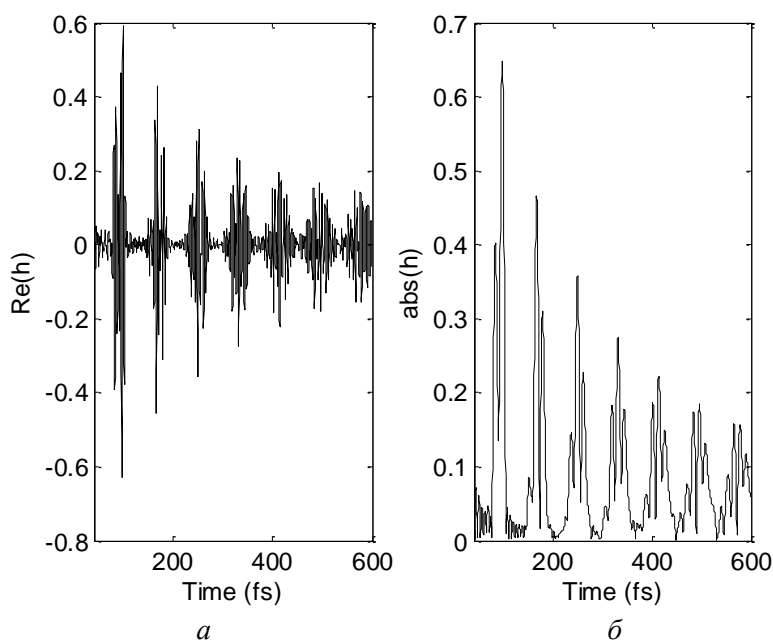


Рис. 2. Эволюция магнитного поля во времени: *a* – действительная часть, *б* – абсолютная величина поля. Длина волны падающего импульса  $\lambda = 1500 \text{ нм}$ ,  $\tau = 10 \text{ фс}$ , радиус резонатора  $a = 1800 \text{ нм}$

На рис. 3 представлены пространственные распределения (модуль действительной части) поля в различные моменты времени: 50, 300 и 600  $фс$ . Длина импульса  $\tau = 20 фс$ . На начальном промежутке времени нестационарный процесс сопровождается большими потерями (см. вертикальную шкалу). Далее, очевидно возбуждение нескольких мод с различными пространственными характеристиками, а именно,  $H_{11,2}$  ( $\lambda = 1540 нм$ ),  $H_{13,2}$  ( $\lambda = 1450 нм$ ),  $H_{9,3}$  ( $\lambda = 1473 нм$ ). Т.е., в первую очередь короткими импульсами возбуждаются низкодобротные колебания. Несмотря на то, что длина падающей волны является резонансной для  $H_{15,1}$ , возбуждение волны шепчущей галереи не наблюдается.

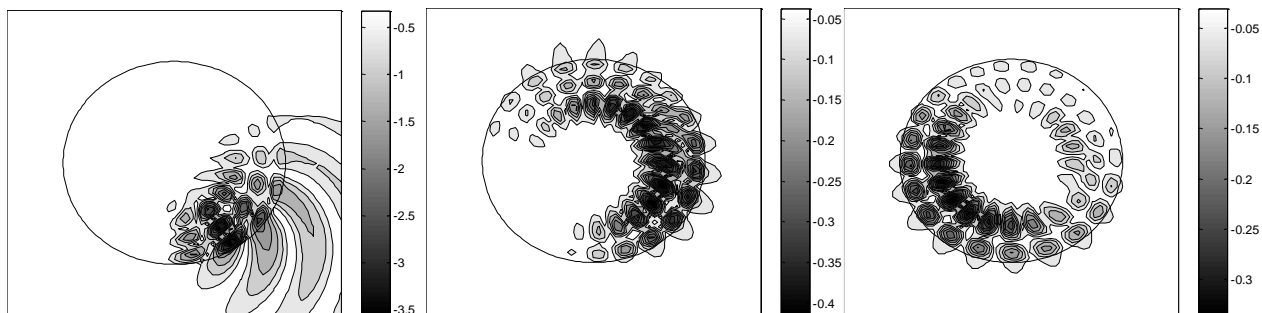


Рис. 3. Распределение поля в различные моменты времени: 50; 300; 600  $фс$ .  
Длина волны падающего импульса  $\lambda = 1500 нм$ ,  $\tau = 10 фс$ , радиус резонатора  $a = 1800 нм$

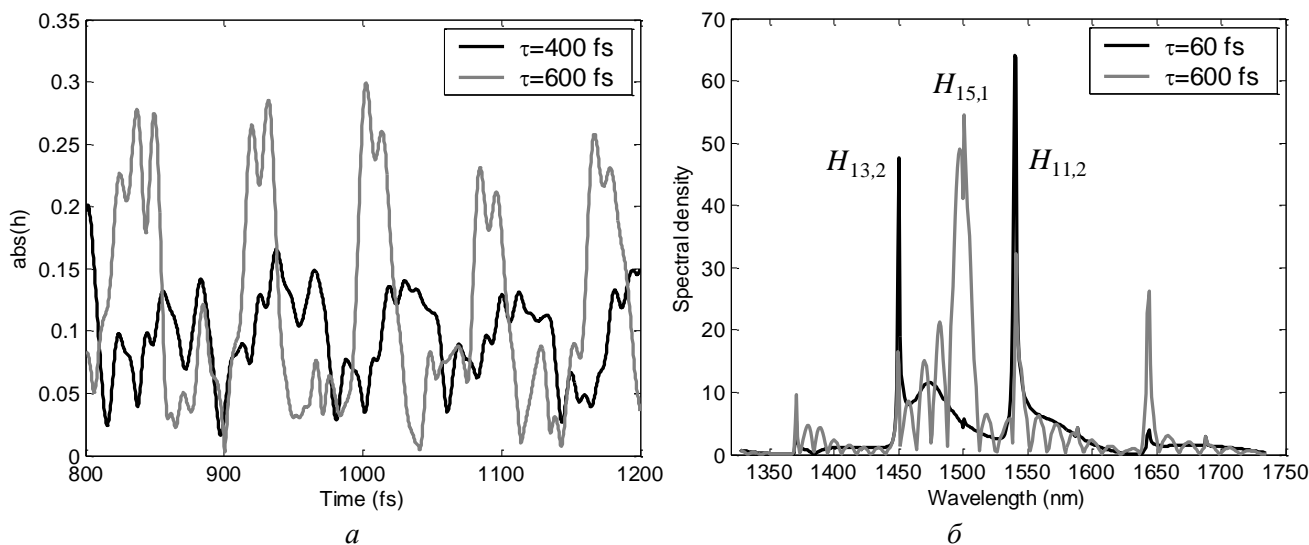


Рис. 4.  $a$  – зависимость модуля поля от времени во внутренней точке резонатора,  
 $b$  – спектральная плотность.

Для возбуждения более добротных колебаний нужны более длинные импульсы, равные нескольким обходам. На рис. 4,  $a$  представлена нестационарная динамика более продолжительных импульсов. При более длительных импульсах изменяется не только амплитуда возбуждаемых волн, но и спектральный состав (рис. 4,  $b$ ). В спектре короткого импульса ( $\tau = 60 фс$ ) нет пика на длине волны  $\lambda = 1500 нм$  (резонансной для  $H_{15,1}$ ), а происходит перераспределение энергии между менее добротными колебаниями. Для более продолжительного импульса ( $\tau = 600 фс$ ) абсолютный максимум соответствует именно волне шепчущей галереи.

## Выводы

Рассмотрена задача возбуждения резонатора ультракороткими фемтосекундными импульсами. Обнаружено, что при возбуждении короткими импульсами в первую очередь возбуждаются низкодобротные колебания. Также, со временем происходит размывание импульса вдоль границы. Для возбуждения более добротных колебаний нужны импульсы большей длительности, равные нескольким обходам. Для решения задачи использовался строгий математический метод, основанный на применении преобразования Лапласа к волновому уравнению, что позволило получить аналитическое представление решения задачи. Нахождение обратного преобразования основано на оценке вычетов в особых точках структуры, которые соответствуют собственным частотам резонатора.

**Список литературы:** 1. *Fujita, M., Sakai, A., Baba, T.* Ultrasmall and ultralow threshold GaInAsP-InP microdisk injection lasers: design, fabrication, lasing characteristics and spontaneous emission factor // IEEE J. Selected Topics Quantum Electronics. – 1999. – V. 32, No 9. – P. 1583-1587. 2. *Little, B.E., Chu, S.T., Haus, H.A., Foresi, J., Laine, J.P.* Microring resonator channel dropping filters // J. Lightwave Technol. 1995. V. 15. P. 998-1005. 3. *Djordjev, K., S.-June Choi, S.-Jun Choi, Dapkus, R.* Microdisk tunable resonant filters and switches // IEEE Phot. Technol. Lett. 2002. – V. 14. – P. 823-830. 4. *Lee, M. and Fauchet, Ph.* Nanoscale microcavity sensor for single particle detection // Opt. Lett. 2007. V. 32, N. 22. P. 3284–3286. 5. *Hill, M., Dorren, H., Vries, T., Leitjens, X., Besten, J., Smalbrugge, B., Oei, Y.-S., Binsma, H., Khoe, G.-D., Smit, M.* A fast low-power optical memory based upon coupled micro-ring lasers // Nature. – 2004. – V. 432. – P. 206-209. 6. *Baum, C.* On singularity expansion method for the solution of electromagnetic interaction problems // Interaction Notes. – 1971. – Note 88. 7. *Baum, C.* Discrimination of buried targets via the singularity expansion // Inverse Problems. – 1997. – V. 13. – P. 557-570. 8. *Sakhnenko, N., Nerukh, A.* Rigorous Analysis of Whispering Gallery Mode Frequency Conversion Due to Time Variation of Refractive Index in a Spherical Resonator // J. Opt. Soc. Am. A. – 2012. – V. 29, N. 1. – P. 99-104. 9. *Сахненко, Н.К., Нерух, А.Г., Ремаева, Н.Е.* Преобразование частоты в сферическом резонаторе при изменении во времени показателя преломления // Радиотехника. – 2011. – Вып. 165. – С. 190-196. 10. *Sakhnenko, N., Nerukh, A., Benson, T., Sewell, P.* Whispering Gallery Mode transformation in a switched micro-cavity with concentric ring geometry // Optical and Quantum Electronics. – 2008. – V. 40, N. 11-12. – P. 818-820. 11. *Felsen, L.* Complex-point source solutions of the field equations and their relation to the propagation and scattering of the Gaussian beams // Symp. Mathem. – 1975. – V. 18. – P. 39-56. 12. *Heyman, E., Felsen, L.* Complex-source pulsed beam fields // J. Opt. Soc. Am. A. – 1989. – V. 6, N. 6. – P. 806-817. 13. *Heyman, E., Felsen, L.* Gaussian beam and pulsed-beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – V. 18, N. 7. – P. 1588-1611. 14. *Felsen, L., Marcuvitz, N.* Radiation and scattering of waves, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973. 15. *Boriskin, A.V., Nosich, A.I.* Whispering-gallery and Luneburg-lens effects in a beam-fed circularly layered dielectric cylinder // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 2002. – V. 50, N. 9. – P. 1245-1249.

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 11.04.2012