УДК 621.391.001

Ю.Г. ЛЕГА, д-р техн. наук

ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ М-ПОЗИЦІЙНОГО АВТОКОРЕЛЯЦІЙНОГО ПРИЙМАЧА ШУМОВИХ СИГНАЛІВ В ГАУССОВОМУ КАНАЛІ

Вступ

В останні роки значно зросла зацікавленість фахівців до використання у телекомунікаційних системах шумоподібних (хаотичних) та шумових сигналів з розширеним спектром. Ця зацікавленість обумовлена можливістю передачі інформації з високими швидкостями та створенням мереж зв'язку з великою просторовою щільністю трафіку [1, 2]. Зростання вимог до захищеності інформації, обмеженості частотного ресурсу, розвиток елементної бази радіосистем з використанням досягнень мікроелектроніки та технологій цифрової обробки сигналів, дають змогу по новому підійти до проблем розробки ефективних систем зв'язку з шумовою носійною.

Постановка задачи

В [3] проаналізовано схему, що забезпечує підвищення швидкості передачі завдяки використання багатопозиційних шумових сигналів. Схема пристрою цієї системи зображена на рис. 1, де використані наступні позначення: Г – генератор шуму, τ – лінія затримки на час τ, $U_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, – система псевдошумових ортогональних послідовностей, I_i – інтегратори.

Прикладом псевдошумової ортогональної системи $U_i(t)$, може слугувати послідовність Уолша, що для випадку, коли m =4, подана матрицею:

$$U = \|U_i(t)\| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

де тактовий (системний) інтервал *T* розбитий на підінтервали довжиною $\Delta t = T/m$.

На виході передавача на одному тактовому інтервалі *T* сигнал має вигляд:

$$x(t) = \xi(t) + U_i(t)\xi(t-\tau), \qquad (1)$$

де $i=\overline{1,m}$, – переданий інформаційний i -й символ m - позиційного коду.

На вході приймача спостерігається сигнал виду

$$y(t) = \xi(t) + U_i(t)\xi(t-\tau) + \eta(t), \qquad (2)$$

де $\eta(t)$ – адитивна завада, яка додається в каналі зв'язку.

В схемі наведеного пристрою можна відмітити його апаратурну складність, що пов'язана з використанням m генераторів функцій $U_i(t)$ у передавальному та приймальному пристроях. Простішим структурним варіантом побудови m – позиційної системи є схема, що наведена на рис.2. В цій схемі використовуються m ліній затримки на інтервал часу τ_i, $i=\overline{1,m}$. Шумова складова сигналу $\xi(t-\tau_i)$ комутується комутатором по значенню символу α_i m -позиційного інформаційного коду, що сформований джерелом повідомлень.

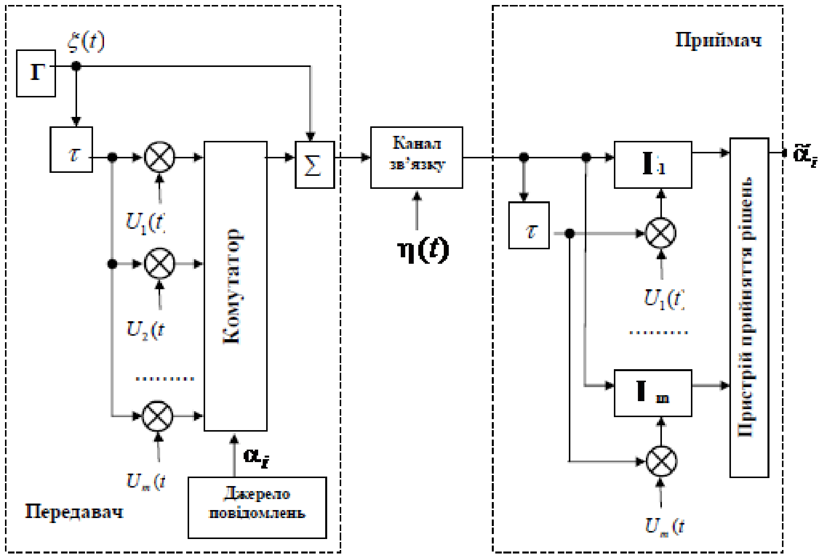

Рис.1

Метою даної роботи є теоретичний аналіз завадостійкості системи з m-позиційними шумовими сигналами, що зображена на рис. 2, при роботі по каналу з постійними параметрами в якому діє адитивна завада типу білого гауссового шуму.

Вирішення задачі

Результуючий сигнал передавача разом з завадою каналу зв'язку в цій системі має вигляд

$$y(t) = \xi(t) + \xi(t - \tau_i) + \eta(t), \quad i = \overline{1, m}. \tag{3}$$

Значення сигналу на k-у кореляційному пристрої, що спостерігається на виході інтегратору I_k при передачі сигналу по i-ї позиції, визначається величиною

$$\vartheta_k = \int_0^T (\xi(t) + \xi(t - \tau_i) + \eta(t))(\xi(t - \tau_k) + \xi(t - \tau_i - \tau_k) + \eta(t - \tau_k))dt. \tag{4}$$

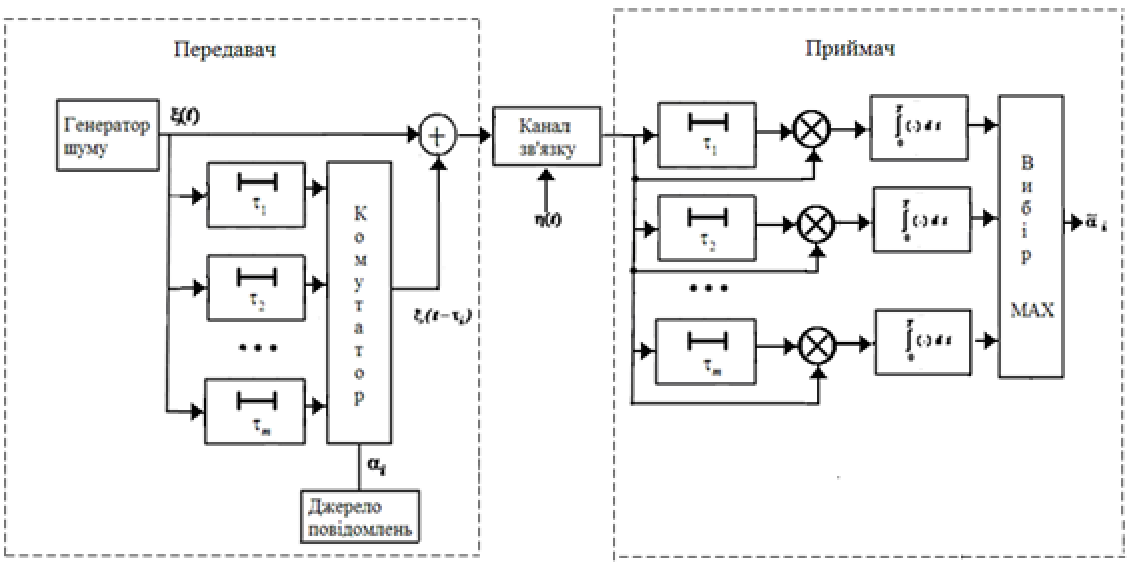

Рис. 2

Схема вибору максимального значення у приймачі фіксує прийнятий сигнал $\tilde{\alpha}_k$ при виконанні умови

$$\vartheta_k = \max_i \vartheta_i . \tag{5}$$

Приймач фіксує вірне рішення про прийом символу $\tilde{\alpha}_k$ у випадку, коли номер *k*-го кореляційного пристрою, співпадає зі значенням *i*-ї позиції сигналу α_i , що поступив для передачі. Як бачимо з (4), інтеграл від добутку $\xi(t-\tau_i)\xi(t-\tau_k)$ при значенні $k=i$ визначає складову у ϑ_i, що пропорційна енергії інформаційної складової сигналу, яка передана по каналу зв'язку. Всі інші складові характеризують додатки, що виникають за рахунок як дії адитивної завади у каналі зв'язку, так і обумовлені корисним сигналом, що створюють системну помилку.

Визначення ймовірності вірного прийому сигналу знайдемо з умовної сумісної щільності ймовірностей випадкових величин ϑ_k, $k=\overline{1,m}$ при передачі сигналу α_i . Для цього спочатку слід знайти значення початкових моментів випадкових величин ϑ_k, $k=\overline{1,m}$, заданих виразом (4).

Як математичну модель виходу генератора шуму $\xi(t)$ оберемо стаціонарний гауссовий дельта корельований центрований випадковий процес (гауссовий білий шум). Щільність розподілу одновимірного часового перерізу такого процесу має вигляд

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2D_\xi}\right), \tag{6}$$

де $D_\xi = \sigma_\xi^2$ – дисперсія шуму $\xi(t)$.

Розкриваючи дужки у виразі (4), можна виділити наступні доданки

$$\begin{aligned} \vartheta_k = {} & \varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_k) + \varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_i-\tau_k) + \varphi_{\xi,\eta}(t,t-\tau_k) + \\ & + \varphi_{\xi,\xi}(t-\tau_i,t-\tau_k) + \varphi_{\xi,\xi}(t-\tau_i,t-\tau_i-\tau_k) + \varphi_{\xi,\eta}(t-\tau_i,t-\tau_k) + \\ & + \varphi_{\eta,\xi}(t,t-\tau_k) + \varphi_{\eta,\xi}(t,t-\tau_i-\tau_k) + \varphi_{\eta,\eta}(t,t-\tau_k), \end{aligned} \tag{7}$$

де введено позначення $\varphi_{x,z}(a,b) = \int_0^T x(a)z(b)dt,\ x,z \in \{\xi,\eta\}$ – скалярний добуток процесів $x(a)$ та $z(b)$.

Обчислюючи значення початкових моментів випадкових величин, що присутні в (7), будемо вважати заваду $\eta(t)$ центрованою (з нульовим значенням моменту першого порядку), а випадкові $\xi(t)$ і $\eta(t)$ стаціонарними та стаціонарно пов'язаними. При цих припущеннях, враховуючи лінійну властивість операції математичного сподівання та дельта корельованість випадкових процесів що розглядаються, маємо

$$m_1^{\varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_k)} = M\int_0^T \xi(t)\xi(t-\tau_k)dt = \int_0^T M\{\xi(t)\}M\{\xi(t-\tau_k)\}dt = 0.$$

Відповідно можна визначити величини:

$$\begin{aligned} & m_1^{\varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_i-\tau_k)} = m_1^{\varphi_{\xi,\eta}(t,t-\tau_k)} = m_1^{\varphi_{\xi,\xi}(t-\tau_i,t-\tau_i-\tau_k)} = m_1^{\varphi_{\xi,\eta}(t-\tau_i,t-\tau_k)} = \\ & = m_1^{\varphi_{\eta,\xi}(t,t-\tau_k)} = m_1^{\varphi_{\eta,\xi}(t,t-\tau_i-\tau_k)} = m_1^{\varphi_{\eta,\eta}(t,t-\tau_k)} = 0; \end{aligned} \tag{8}$$

$$m_1^{\varphi_{\xi,\xi}(t-\tau_i,t-\tau_k)} = \int_0^T M\{\xi(t-\tau_i)\xi(t-\tau_k)\}dt = \tag{9}$$
$$= \int_0^T \sigma_\xi^2 \delta(\tau_i - \tau_k)dt = \begin{cases} \sigma_\xi^2 T, & k = i \\ 0, & k \neq i, \end{cases}$$

де $\delta(\tau)$ – дельта-функція Дірака.

Узагальнюючи величини, представлені у виразах (8), (9), в (7) маємо

$$m_1^{\vartheta_k} = M\{\vartheta_k\} = \begin{cases} \gamma\sigma_\xi^2 T, & k = i, \\ 0, \quad k \neq i, & i = \overline{1,m}. \end{cases} . \tag{10}$$

Обчислення другого початкового моменту $m_2^{\vartheta_k}$, $k = \overline{1,m}$, пов'язане з визначенням значення

$$m_2^{\vartheta_k} = M\{\vartheta_k^2\} = M\{[\varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_k) + \varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_i-\tau_k) + \varphi_{\xi,\eta}(t,t-\tau_k) +$$
$$+ \varphi_{\xi,\xi}(t-\tau_i,t-\tau_k) + \varphi_{\xi,\xi}(t-\tau_i,t-\tau_i-\tau_k) + \varphi_{\xi,\eta}(t-\tau_i,t-\tau_k) + \tag{11}$$
$$+ \varphi_{\eta,\xi}(t,t-\tau_k) + \varphi_{\eta,\xi}(t,t-\tau_i-\tau_k) + \varphi_{\eta,\eta}(t,t-\tau_k)]^2\}.$$

Визначаючи величини даних доданків вважаємо, що завада каналу зв’язку $\eta(t)$ має дисперсію σ_η^2. Обчислення доданків в (11) потребує розгляду інтегралів типу

$$m_2^{\varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_k)} = M\{\varphi_{\xi,\xi}^2(t,t-\tau_k)\} = M\{[\int_0^T \xi(t)\xi(t-\tau_k)dt]^2\} =$$
$$= M\{\int_0^T \xi(t)\xi(t-\tau_k)dt \int_0^T \xi(x)\xi(x-\tau_k)dx\} = \int_0^T \int_0^T M\{\xi(t)\xi(t-\tau_k)\xi(x)\xi(x-\tau_k)\}dxdt. \tag{12}$$

Момент четвертого порядку спільно гауссових центрованих випадкових величин $\xi(t), \xi(t-\tau_k), \xi(x), \xi(x-\tau_k)$ визначається наступною формулою [4]

$$M\{\xi(t)\xi(t-\tau_k)\xi(x)\xi(x-\tau_k)\} = M\{\xi(t)\xi(t-\tau_k)\}M\{\xi(x)\xi(x-\tau_k)\} +$$
$$+ M\{\xi(t)\xi(x)\}M\{\xi(t-\tau_k)\xi(x-\tau_k)\} + M\{\xi(t)\xi(x-\tau_k)\}M\{\xi(t-\tau_k)\xi(x)\}. \tag{13}$$

Користуючись співвідношенням (13), з (12) одержимо

$$m_2^{\varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_k)} = \sigma_\xi^2 \int_0^T \int_0^T M\{\xi(t)\xi(t-\tau_k)\}\delta(\tau_k)\}dxdt +$$
$$+ \sigma_\xi^2 \int_0^T \int_0^T M\{\xi(t)\xi(x)\}\delta(t-x)dxdt +$$
$$+ \sigma_\xi^2 \int_0^T \int_0^T M\{\xi(t)\xi(t-\tau_k)\}\delta(t-x-\tau_k)dxdt.$$

Використовуючи фільтруючу властивість дельта-функції, отримаємо кінцеве значення

$$m_2^{\varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_k)} = \sigma_\xi^4 T\,. \tag{14}$$

Враховуючи незалежність випадкових величин $\eta(t)$, $\xi(x)$ і фільтруючу властивість дельта-функції, можна знайти значення

$$m_2^{\varphi_{\xi,\eta}(t,t-\tau_k)}=\int_0^T\int_0^T M\{\eta(t)\eta(x)\}\sigma_\xi^2\delta(t-x)dxdt=\sigma_\eta^2\sigma_\xi^2 T\,. \qquad (15)$$

Подібним чином з (11) визначаємо наступні моменти

$$m_2^{\varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_i-\tau_k)}=m_2^{\varphi_{\xi,\xi}(t-\tau_i,t-\tau_i-\tau_k)}=\sigma_\xi^4 T;\;\; m_2^{\varphi_{\eta,\eta}(t,t-\tau_k)]}=\sigma_\eta^4 T;$$

$$m_2^{\varphi_{\xi,\eta}(t-\tau_i,t-\tau_k)}=m_2^{\varphi_{\eta,\xi}(t,t-\tau_k)}=m_2^{\varphi_{\eta,\xi}(t,t-\tau_i-\tau_k)}=\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 T\,. \qquad (16)$$

Значення величини

$$m_2^{\varphi_{\xi,\xi}(t-\tau_i,t-\tau_k)}=\begin{cases}\sigma_\xi^4(2T+T^2), & k=i,\\ \sigma_\xi^4 T, & k\neq i.\end{cases} \qquad (17)$$

Обчислення моментів подвоєних парних добутків елементів записаних у квадратних дужках виразу (11) приводить до наступного:

$$M\{2\varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_k)\varphi_{\xi,\xi}(t,t-\tau_i-\tau_k)\}=2\int_0^T\int_0^T M\{\xi(t)\xi(t-\tau_k)\xi(x)\xi(x-\tau_i-\tau_k)\}dtdx=0.$$

Нульові значення мають і моменти всіх інших парних добутків доданків у виразі (11). Таким чином, узагальнюючи наведені вище результати у відповідних доданках в (11), можна записати

$$m_2^{\vartheta_k}=M\{\vartheta_k^2\}=\begin{cases}[4\sigma_\xi^4+4\sigma_\xi^2\sigma_\mu^2+\sigma_\eta^4)]T, & k\neq i, \quad i=\overline{1,m};\\ [\sigma_\xi^4(5+T)+4\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2+\sigma_\eta^4)]T, & k=i.\end{cases} \qquad (18)$$

Знаючи значення початкових моментів випадкових величин ϑ_i, $i=\overline{1,m}$, з (18) та (10) визначимо їх дисперсію

$$D_2^{\vartheta_k}=m_2^{\vartheta_k}-\left(m_1^{\vartheta_k}\right)^2=\begin{cases}[4\sigma_\xi^4+4\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2+\sigma_\eta^4]T, & k\neq i, \quad i=\overline{1,m};\\ [5\sigma_\xi^4+4\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2+\sigma_\eta^4]T, & k=i.\end{cases}. \qquad (19)$$

Звернемо увагу на загальні властивості випадкових величин ϑ_k, $k=\overline{1,m}$, що випливають з аналізу їх складових. Як можна відмітити з розгляду схеми рис.2, кожна величина ϑ_k при значенні номеру субканалу приймача, що не співпадає з номером переданої позиції сигналу α_i, є інтегрований на інтервалі часу *T* добуток від незалежних перерізів в часі гауссових випадкових процесів. Тому такі випадкові величини ϑ_k залишаються гауссовими. Негауссовою є лише одна з величин ϑ_k, номер якої співпадає на даному тактовому інтервалі *T* з номером переданої позиції *i*. Закон щільності розподілу величини ϑ_i, яку можна розглядати як суму (що є наближенням інтегралу) квадратів гауссових випадкових величин (кожна складова підкоряється розподілу χ^2), при великій кількості складових в сумі наближається до гауссового. Тому, обмежуючись гауссовою апроксимацією і для складової ϑ_i, будемо в подальшому вважати, що кожна з величин ϑ_i, $i=\overline{1,m}$, має гауссовий розподіл.

Обчислення спільних моментів другого порядку випадкових величин ϑ_i, $i=\overline{1,m}$, можна виконати по розглянутій вище методиці. При цьому одержуємо наступні значення

$$M\{\vartheta_k\vartheta_i\}=0, \quad k\neq i, \quad i=\overline{1,m}\,. \qquad (20)$$

Взаємна некорельованість гауссових випадкових величин ϑ_i, та ϑ_k, $k,i=\overline{1,m}$, $k\neq i$, вказує й на їх взаємну незалежність, що значно спрощує обчислення ймовірності помилки в розглянутій системі. Визначення ймовірності помилки виконаємо для випадку, коли сигнали передані по кожній з $\boldsymbol{m}$ позицій мають рівну дисперсію (потужність) й передаються з однаковою апріорною ймовірністю. Для цього скористаємося значенням умовної спільної щільності ймовірності $\omega(\vartheta_1,\vartheta_2,...\vartheta_m/\alpha_i)$ незалежних гауссових випадкових величин ϑ_i, $i=\overline{1,m}$, що має вигляд

$$\omega(\vartheta_1,\vartheta_2,...\vartheta_m/\alpha_i)=\prod_{k=1}^{m}\omega(\vartheta_k/\alpha_i), \tag{21}$$

де $\omega(\vartheta_k/\alpha_i)$ – умовна щільність імовірності випадкової величини ϑ_k при передачі сигналу i -ї позиції

$$\omega(\vartheta_k/\alpha_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_2^{\vartheta k}}}\exp\left(-\frac{(\vartheta_k-m_1^{\vartheta k})^2}{2D_2^{\vartheta k}}\right). \tag{22}$$

З урахуванням моментів і дисперсій, знайдених по виразам (10) і (19), одержимо

$$\omega(\vartheta_1,\vartheta_2,..\vartheta_m/\alpha_i)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m(D_2^{\vartheta_k})^{m-1}D_2^{\vartheta_i}}}\exp\left(-\frac{(\vartheta_i-m_1^{\vartheta_i})^2}{2D_2^{\vartheta_i}}-\frac{\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{m}(\vartheta_k)^2}{2D_2^{\vartheta_k}}\right). \tag{23}$$

Знаючи умовну щільність розподілу $\omega(\vartheta_1,\vartheta_2,...\vartheta_m/\alpha_i)$, можна знайти ймовірність правильного рішення при прийомі сигналу i -ї позиції:

$$P_{i,i}=\int_{-\infty}^{\infty}d\vartheta_i\int_{-\infty}^{\vartheta_i}...\int\omega(\vartheta_1,\vartheta_2,...\vartheta_m/\alpha_i)d\vartheta_1...d\vartheta_{i-1}d\vartheta_{i+1}...d\vartheta_m. \tag{24}$$

Результат інтегрування виразу (24) з підстановкою (23) запишемо як

$$P_{i,i}=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_2^{\vartheta i}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-m_1^{\vartheta i})^2}{2D_2^{\vartheta i}}\right)\hat{O}^{m-1}\left(x/\sqrt{D_2^{\vartheta k}}\right)dx, \tag{25}$$

де $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp(-x^2/2)dx$ – інтеграл імовірності.

Отриманий вираз заміною змінною інтегрування може бути представлений у більш зручному для обчислень вигляду

$$P_{i,i}=\frac{1}{\sqrt{2\pi Q}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(z-G)^2}{2Q}\right)\hat{O}^{m-1}(z)dz, \tag{26}$$

де введені позначення: $G=m_1^{\vartheta i}/\sqrt{D_2^{\vartheta k}}$; $Q=D_2^{\vartheta i}/D_2^{\vartheta k}$.

Для апріорно рівно ймовірних сигналів повну ймовірність помилки, що визначає завадостійкість системи, визначимо зі співвідношення

$$P_{пом}=\sum_{i=1}^{m}(1-P_{i,i})p_i=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}(1-P_{i,i})=1-P_{i,i}, \tag{27}$$

де p_i – апріорна ймовірність передачі сигналу i-ї позиції.

Як видно з формул (27), (26), імовірність помилки в системі залежить від величини

$$G = m_1^{\text{э}i} / \sqrt{D_2^{\text{э}k}} = \sigma_\xi^2 \sqrt{T} / \sqrt{[4\sigma_\xi^4 + 4\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 + \sigma_\eta^4]} = \\ = \sqrt{qT/[4(1+q)+1/q]}, \quad (28)$$

де введене позначення $q = \sigma_\xi^2 / \sigma_\eta^2$ – перевищення дисперсії шумової складової сигналу над дисперсією завади каналу зв'язку.

Враховуючи введене позначення q, величина Q з (26) визначиться як

$$Q = \frac{5\sigma_\xi^4 + 4\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 + \sigma_\eta^4}{4\sigma_\xi^4 + 4\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 + \sigma_\eta^4} = 1 + (q/(1+2q))^2 . \quad (29)$$

З (29) відмітимо, що величина Q при варіації значення q змінюється мало і знаходиться в межах від 1 (при $q << 1$) до 1,25 (коли $q >> 1$). Тому завадостійкість системи від параметра q залежить не дуже сильно. Це проілюстровано на рис. 3, де представлена залежність $P_{пом}$ як функція від значення величини G, розрахована по (26) для різних значень q при кількості позицій ***m***=2 та 8 (з позначеннями: —— – ***m*** =2, q=10; ···· - ***m*** =2, q=1; ‒ ‒ ‒ - ***m*** =2, q=0,1; ‒·‒ - ***m*** =8, q=1).

Залежність завадостійкості ***m*** – позиційної системи від величини G при різних значеннях кількості позицій ***m*** та при q=1, представлена на рис.4 (з позначеннями на рисунку: —— – ***m*** =2; ···· - ***m*** =8; ‒ ‒ ‒ - ***m*** =16; ‒·‒ - ***m*** =32).

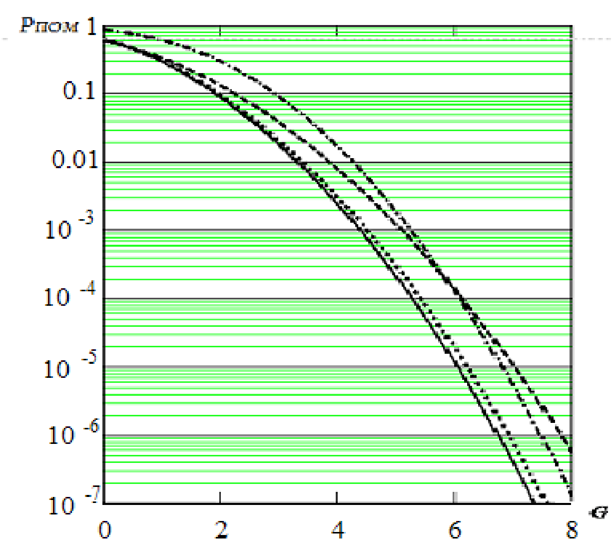

Рис. 3

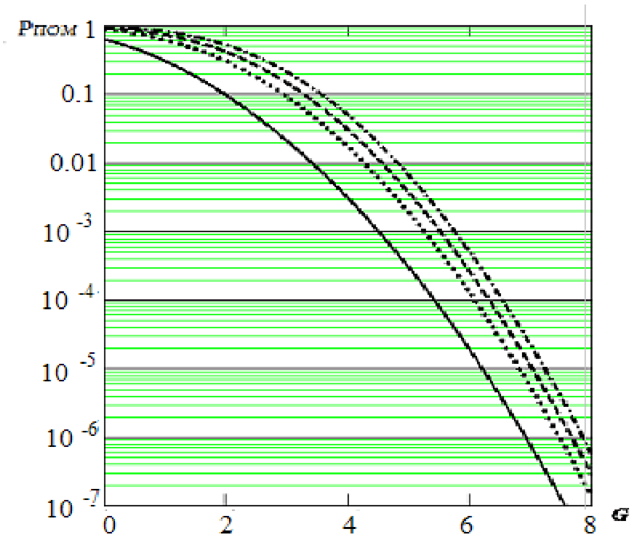

Рис. 4

Висновки

З даних, які наведені на рис. 3, можна заключити, що збільшення значення дісперсії шумової складової сигналу по відношенню до дисперсії завади каналу зв'язку (при сталому значенню G) покращує завадостійкість системи в діапазоні значень $q < 1$. При зростанні параметру $q > 1$ завадостійкість системи змінюється мало.

Збільшення числа позицій сигналу ***m*** веде до зниження завадостійкості системи (зростає ймовірність $P_{пом}$, рис.4). Але водночас зі зростанням значення ***m*** збільшується кількість інформації ($\log_2 m$ біт – інформаційна ємність сигналу), що переноситься $\boldsymbol{m}$ – позиційним сигналом. Тому не значне погіршення завадостійкості системи при зростанні $\boldsymbol{m}$, як видно з рис. 4, вказує на перспективність застосування систем з великою кількістю позицій шумового сигналу.

Список літератури: 1. *Лега, Ю.Г.* Системное проектирование средств связи с шумовыми сигналами. – К. : Наук. думка, 2000. – 304 с. 2. *Борисов,В.И., Зинчук, В.М., Лимарев, А.И. и др.* Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов модуляцией несущей псевдослучайной последовательностью. – М. : Радио и связь, 2003. – 640 с. 3. *Лега, Ю.Г., Первунінський, С.М., Гузнін,С.С.* Дослідження завадостійкості m-позиційного автокореляційного приймача шумових сигналів в каналі з адитивним білим гауссовим шумом // Вісник нац. універ. Львівська політехніка, серія «Радіоелектроніка та телекомунікації». – 2009. – № 645. – С. 167 – 173.

Черкаський державний технологичний університет

Надійшла до редколегії 17.09.2012