УДК 517.958:537.8

*В.А. ДОРОШЕНКО, д-р физ.-мат. наук, А.М. ТИТАРЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
А.А. СТРЕЛЬНИЦКИЙ*

ПОЛУПРОЗРАЧНЫЙ КОНУС С ПРОДОЛЬНОЙ ЩЕЛЬЮ В ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАДИАЛЬНОГО ДИПОЛЯ

Введение

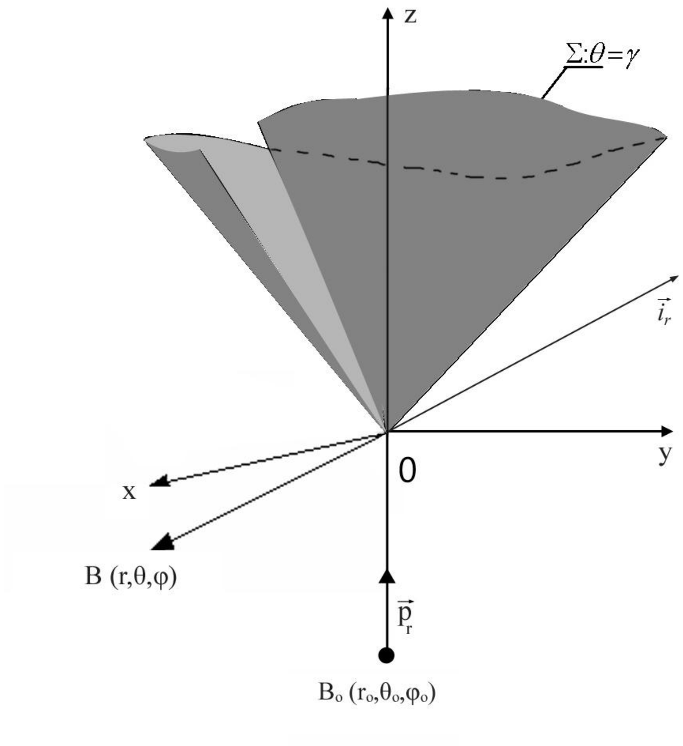
Интерес к изучению электродинамических свойств импедансных, в том числе и полупрозрачных, структур обусловлен их широким применением в антенной технике и технике СВЧ [1]. Построение адекватных физических и математических моделей процессов взаимодействия электромагнитных полей с такими структурами позволяет качественно и количественно проанализировать их электродинамические свойства и характеристики. В работах [2 – 5] приведены результаты теоретического исследования задач дифракции электромагнитных волн на на импедансных плоских, цилиндрических, сферических экранах. Авторами работы [6] предложен поход к решению задачи дифракции волн на сплошном неограниченном импедансном конусе и получено решение в случаи постоянного поверхностного импеданса. Одна из сложностей решения краевых электродинамических задач для конической структуры заключается в том, что на ее поверхности есть сингулярная точка – вершина, вблизи которой решение имеет интегрируемую особенность [7]. Наличие поверхностных неоднородностей в виде щелей на конусе с одной стороны значительно усложняют решение соответствующей краевой электродинамической задачи, а с другой существенно расширяет диапазон использования такой геометрии в практических приложениях. Из имеющихся литературных источников неизвестны решения задачи рассеяния электромагнитных волн на полупрозрачном конусе с продольной щелью. Поэтому целью данной работы является исследование задачи возбуждения электрическим радиальным диполем полубесконечного кругового полупрозрачного конуса с прорезанной вдоль образующей продольной щелью.

Постановка задачи

Полубесконечный круговой полупрозрачный конус Σ с прорезанной от вершины вдоль образующей щелью и углом раствора 2γ находится в электромагнитном поле электрического радиального диполя с моментом

$$\vec{P}_r\left(\vec{r},t\right)=\vec{i}_r\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)e^{-i\omega t},$$

где $\vec{i}_r=\dfrac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}$, расположенного вне и на оси конуса в точке $B_0\left(\vec{r}_0\right)$ (рисунок 1). Угловая ширина щели d по величине равна величине двугранного угла, который образован плоскостями, проведенными через ось конуса и кромки щели. Во введенной сферической системе координат r,θ,φ с началом в вершине конуса ($r=0$) полупрозрачная коническая структура определяется уравнением $\theta=\gamma$. Рассматриваемая полупрозрачная коническая поверхность с параметром прозрачности $W>0$ обладает свойством пропускать и отражать падающее на нее поле источника $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ и задача заключается в нахождении поля $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$, обусловленного присутствием рассеивающей поверхности Σ.



Полное поле

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \ \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 \tag{1}$$

удовлетворяет:

1) уравнениям Максвелла вне полупрозрачного конуса и источника;
2) краевым условиям на поверхности конуса:

$$\vec{n} \times \left\{ \vec{n} \times \left[\vec{E}^+ + \vec{E}^- \right] \right\} = 2R \ \vec{n} \times L^{(1)} \left[\vec{H}^+ - \vec{H}^- \right], \tag{2}$$

$$\vec{n} \times \vec{E}^+ = \vec{n} \times \vec{E}^-, \tag{3}$$

где $\vec{E}^{\pm} = \vec{E}\,|_{\theta=\gamma\pm 0}$; $R = \dfrac{w}{q} W \sin\gamma$, $q = -ik$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, $w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ – волновое сопротивление среды, ε и μ – проницаемости среды, в которую помещен незамкнутый полупрозрачный конус, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности конуса Σ, $L^{(1)}$ – дифференциальный оператор 2-го порядка по радиальной координате;

3) условию на бесконечности в пространстве;
4) условию ограниченности энергии.

Условия (1) – (4) определяют единственность решения поставленной краевой электродинамической задачи. При решении краевых задач с конической геометрией удобно использовать потенциал Дебая υ [8], вследствие чего исходная электродинамическая задача сводится к третьей краевой задаче [9] для потенциала υ, который соответствует полю $\vec{E}$, $\vec{H}$ и удовлетворяет уравнению Гельмгольца всюду вне незамкнутой полупрозрачной конической поверхности и источника, краевым условиям на конусе, соответствующим (2), (3):

$$\upsilon\big|_{\Sigma} - rW\sin\gamma\left[\left[\frac{\partial}{\partial n}\upsilon\right]\right]_{\Sigma} = 0, \tag{4}$$

$$[\upsilon]\big|_{\Sigma} = 0, \tag{5}$$

где

$$[f]\big|_{\Sigma} = f\big|_{\Sigma^+} - f\big|_{\Sigma^-},\ \Sigma^{\pm}: \theta = \gamma\ \pm 0;$$

принципу предельного поглощения, условию ограниченности энергии.

В соответствии со структурой полного поля (1), потенциал Дебая υ для полного поля представляется в виде

$$\upsilon = \upsilon_0 + \upsilon_1 .$$

где υ_0 – потенциал поля источника, а υ_1 – потенциал рассеянного конусом поля.

Метод решения

Для решения смешанной краевой задачи воспользуемся интегральными преобразованиями Конторовича – Лебедева [10] и запишем искомый потенциал υ_1 так

$$\upsilon_1 = \frac{\hat{p}}{2\pi^2 r_0}\int_0^{\infty}\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau\,\frac{K_{i\tau}(qr_0)}{\sqrt{r_0}}\frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}}P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma)\hat{U}_{i\tau}(\theta,\varphi)d\tau,$$

где $K_{i\tau}(qr)$ – функция Макдональда, $P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma)$ – функция Лежандра 1-го рода,

$$\hat{U}_{i\tau}(\theta,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \frac{P^n_{-1/2+i\tau}(\pm\cos\theta)}{P^n_{-1/2+i\tau}(\pm\cos\gamma)}e^{in\varphi},\ \hat{p} = \frac{M_r}{\varepsilon}, \tag{6}$$

где x_n – неизвестные коэффициенты разложения. Знак «+» в (6), (7) соответствует области $0<\theta<\gamma$, а «-» – области $\gamma<\theta<\pi$. Для нахождения воспользуемся краевыми условиями (4), (5), условиями непрерывности поля в щели, а также математическим аппаратом рядов Фурье, получим систему линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа (СЛАУ-2) относительно искомых коэффициентов:

$$x_p = \frac{1}{2W\varpi_p + B_{p,p}(\delta)}\left[B_{0,p}(\delta) - \sum_{n\neq p}^{+\infty} B_{n,p}(\delta)x_n\right],\ p = 0,\pm1,\pm2... \tag{7}$$

$$\varpi_p = |n|(1-\varepsilon_p) = \frac{(-1)^p\mathrm{ch}\pi\tau}{\pi}\frac{\Gamma(1/2+i\tau+p)}{\Gamma(1/2+i\tau-p)}\frac{1}{P^p_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma)P^p_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma)},$$

$$B_{n,p}(\delta) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin(n-p)\delta}{n-p}, n\neq p, \\ \dfrac{1}{\pi}(\pi-\delta), n=p; \end{cases},\ \delta = d/2,\ 0\leq\delta<\pi,$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. В предельном случае исчезновения щели ($d=0$) из (7) следует с точностью до $O\left(W^{-2}\right)$, что

$$x_0 = \frac{1}{2W\varpi_0+1},\ x_p = 0 \text{ для } p\neq 0 \tag{8}$$

Коэффициенты Фурье (8) соответствуют коэффициентам при возбуждении сплошного полупрозрачного конуса [10].

Аналитическое решение для незамкнутого полупрозрачного конуса с большим уровнем поверхностной прозрачности

В силу свойства СЛАУ-2 (7) ее оператор является сжимающим в случае большого параметра прозрачности ($W >> 1$), что позволяет использовать для решения (7) метод последовательных приближений и найти аналитическое решение задачи. Ограничиваясь первым приближением, получаем такое представление для потенциала υ_1 вдали от щели:

$$\upsilon_1 = -\frac{2}{\pi^2}\frac{\beta^*}{2W}\int_0^{+\infty}\frac{\tau\operatorname{sh}\pi\tau c_{0\tau}}{1\big/D_{i\tau}^{(0)}+\beta^*\big/2W}\frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}}\frac{P_{-1/2+i\tau}(\pm\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}(\pm\cos\gamma)}d\tau + \tag{9}$$

$$+\frac{2}{\pi^3}\frac{\beta^*}{W}\sum_{n=1}^{+\infty}\cos n\varphi\int_0^{+\infty}\frac{\tau\operatorname{sh}\pi\tau c_{0\tau}}{1\big/D_{i\tau}^{(-pN)}+\beta^*\big/2W}\frac{\sin n\delta}{n}\frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}}\frac{P_{-1/2+i\tau}^{-n}(\pm\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{-n}(\pm\cos\gamma)}d\tau + O\left(W^{-2}\right),$$

$$c_{0\tau} = -\frac{\hat{p}}{4\operatorname{ch}\pi\tau}\frac{K_{i\tau}(qr_0)}{\sqrt{r_0}}P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma),\ D_{i\tau}^{(M)} = 1/\varpi_M,\ \beta^* = 1-\frac{\delta}{\pi},\ 0<\beta^*\le 1.$$

Верхние знаки у функции Лежандра в подынтегральных выражениях (9) соответствуют области $0<\theta<\gamma$, а нижние знаки – области $\gamma<\theta<\pi$. Осуществляя в (9) формальный переход к пределу $W\to+\infty$ или $\beta^*\to 0$, что соответствует исчезновению полупрозрачной конической поверхности, получаем предельное нулевое значение для потенциала Дебая $\upsilon_1^{(1)}$ для рассеянного поля. Преобразовав интегралы в (9) и замкнув контур интегрирования, а также используя теорему Коши о вычетах, можно получить представление для υ_1 в виде ряда по полюсам подынтегральной функции, которая является мероморфной. Множество полюсов подынтегральных функций в (9) образуют спектр рассматриваемой краевой задачи. Используя выражения составляющих электромагнитного поля через потенциалы Дебая, можно записать представление составляющих в виде ряда, члены которого являются модами соответствующих полей. Такое представление удобно при определении поведения поля вблизи вершины конуса и в случае близкого расположения источника к вершине.

В соответствии с (9) спектр краевой задачи для незамкнутого полупрозрачного конуса с большим параметром прозрачности ($W >> 1$) определяется корнями таких уравнений

$$\frac{\cos\pi\varsigma}{\pi}\frac{1}{P_{-1/2+\varsigma}(\cos\gamma)P_{-1/2+\varsigma}(-\cos\gamma)}+\left(1-\delta/\pi\right)/2W = 0\ `, \tag{10}$$

и

$$(-1)^p\frac{\cos\pi\varsigma}{\pi}\frac{\Gamma(1/2+\varsigma-p)}{\Gamma(1/2+\varsigma+p)}\frac{1}{P_{-1/2+\varsigma}^{-p}(\cos\gamma)P_{-1/2+\varsigma}^{-p}(-\cos\gamma)}+$$

$$+\left(1-\delta/\pi\right)/2W = 0,\ p=1,2... \tag{11}$$

При $W \gg 1$ корни уравнения (10) находятся вблизи нулей функции $\cos\pi\varsigma$:

$$\tilde{\varsigma}_s^{(1)*} = \frac{1}{2}+s+\frac{1-\delta/\pi}{2W}\left[P_s(\cos\gamma)\right]^2+O\left(W^{-2}\right),\ s=0,1,2...,\tag{12}$$

а уравнения (11) – вблизи нулей функции $\Gamma(1/2+\varsigma-p)\cos\pi\varsigma$.

Наименьшее из собственных значений рассматриваемой краевой задачи при $W>>1$ совпадает с наименьшим значением (12)

$$\tilde{\varsigma}_0^{(1)*} = \frac{1}{2}+\frac{1-\delta/\pi}{2W}+O\left(W^{-2}\right),\tag{13}$$

которое и определяет поведение поля у вершины незамкнутого полупрозрачного конуса. Собственные значения (12) для полупрозрачного конуса ($W >> 1$) с продольной щелью представляют собой собственные значения, возмущенные фактом наличия щели,

$$\varsigma_s = \frac{1}{2} + s + \frac{1}{2W}\left[P_s(\cos\gamma)\right]^2 + O\left(W^{-2}\right)$$

для сплошного полупрозрачного конуса при таком же способе возбуждения:

$$\tilde{\varsigma}_s^{(1)*} \approx \varsigma_s - \frac{\delta/\pi}{2W}\left[P_s(\cos\gamma)\right]^2,$$

а собственное значение (13) можно записать так:

$$\tilde{\varsigma}_0^{(1)*} \approx \varsigma_0 - \frac{\delta/\pi}{2W},$$

причем $\tilde{\varsigma}_s^{(1)*} \le \varsigma_s$, $s = 0,1,2...$ Электромагнитное поле вблизи вершины ($qr << 1$) полупрозрачного конуса ($W >> 1$) с продольной щелью ведет себя как

$$\left|\vec{E}\right| \sim \left|qr\right|^{-1+1/2W-\delta/2\pi W},\ \left|\vec{H}\right| \sim \left|qr\right|^{1/2W-\delta/2\pi W}. \tag{14}$$

Из (14) следует, что наличие продольной щели на поверхности конуса усиливает особенность электрического поля у вершины, а магнитное убывает по мере приближения к вершине не так быстро, как у сплошного полупрозрачного конуса. Такой же вывод был сделан и для случая возбуждения идеально проводящего конуса с продольной щелью электрическим радиальным диполем [10].

Заключение

Впервые проведено теоретическое исследование в строгой постановке краевой задачи рассеяния электромагнитных волн на полубесконечном круговом полупрозрачном конусе с продольной щелью. Метод ее решения основан на применения потенциалов Дебая, интегральных преобразований Конторовича – Лебедва и аппарата рядов Фурье, вследствие чего исходная задача сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа. В частном случае незамкнутой конической поверхности с высокой степенью прозрачности найдено аналитическое решение, что позволило качественно изучить структуру рассеянного конусом поля и его поведение вблизи вершины конуса. Полученные результаты могут быть, в частности, использованы на стадии проектирования широкополосных и сверхширокополосных щелевых антенн с прозрачными стенками.

Список литературы: 1. *Кравченко В. Ф.* Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. – М. : Физматлит, 2006. – 280с. 2. *Бравер И.М., Гарб Х.Л., Фридберг П.Ш. и др.* Явление аномально слабого затухания мощности в волноводе с полубесконечной резистивной пленкой // Радиотехника и электроника. – 1987. – Т.32, №2. – С.264-269. 3. *Lindel I.V., Shihvola A.H.* Electromagnetic boundary conditions defined in terms of normal field components // IEEE Trans. on Antennas & Propagat. Mag . – 2010. – V.58, № 4. – P. 1128-1135. 4. *Звездина М.Ю.* Рассеяние электромагнитного поля импедансной цилиндрической поверхностью произвольного сечения // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2003. – Т.6, №4. – С.38-40. 5. *Ерофеенко В.Т., Кравченко В.Ф.* Об импедансных граничных условиях, учитывающих кривизну поверхности // ДАН РАН. – 2000. – Т.45. №11. – С.1-7. 6 *Bernard J.M.L., Lyalinov M.A.* Electromagnetic scattering by a smooth convex impedance cone // J. of Appl. Math. – 2004. – V.69. – P.285-333. 7 *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн : пер. с англ. ; под ред. М.Л. Левина. – М. : Мир, 1978. – Т.1,2; Т1. – 552с., Т2. – 558с. 8. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. – М. : Высш. шк., 1991. – 224с. 9. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М. : Наука, 1973. – 470с. 10. *Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф.* Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых конических структурах. – М. : Физматлит, 2009. – 272с.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 11.05.2013