

*В.Н. МИЗЕРНИК, Е.Н. ОДАРЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
А.А. ШМАТЬКО, д-р физ.-мат. наук.*

НОВЫЙ ПОДХОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВОДНОЙ ВОЛНОЙ ФЕРРИТОВОГО РЕЗОНАТОРА

Ферритовые резонаторы достаточно широко используются в различных пассивных и активных устройствах микроволнового и терагерцового диапазонов для электрического управления их выходными характеристиками. К числу базовых элементов устройств относится наиболее простая их разновидность – прямоугольный резонатор, помещенный в прямоугольный волновод. Решение таких задач электродинамики с целью теоретического исследования амплитудно-частотных характеристик связано с определенными трудностями. Хорошо известно [1, 2], что наличие анизотропной среды в волноводе приводит к тому, что поперечные собственные функции для прямых и обратных волн различаются. Между ними не наблюдаются условия ортогональности на выбранном интервале. В результате при решении различных задач электродинамики с участками анизотропных сред наблюдается преобразование волн. В этом случае приходится использовать весь спектр волноводных волн, что, в конечном виде, приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений с довольно сложными матричными элементами и недостаточно хорошей их сходимостью, особенно при отрицательных значениях эффективной магнитной проницаемости феррита. Вместе с тем, анализ вида матричных коэффициентов таких систем линейных алгебраических уравнений указал на возможность аналитического решения задачи, так как представленные функциональные ряды могут быть просуммированы в замкнутом виде. Такое представление рядов позволяет получить связанную систему из двух уравнений и записать ее решение в замкнутом аналитическом виде, что существенно упрощает проведение расчетов для любых соотношений между длиной волны и параметрами задачи.

Постановка и решение задачи

Рассмотрим задачу возбуждения H_{10} волноводной волной прямоугольного ферритового резонатора, помещенного в прямоугольный волновод (рис. 1). Определение коэффициентов прохождения и отражения волноводной волны, набегающей на неоднородность с исследуемой гиромагнитной средой, будем проводить в рамках двумерной модели ($\partial/\partial z = 0$). Магнитная проницаемость гиромагнитной среды резонатора описывается тензором стандартного вида $\vec{\mu}$ (рис. 1).

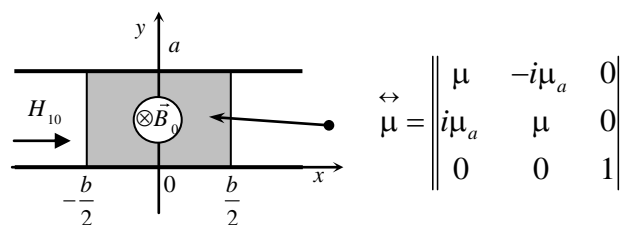


Рис. 1

Для нахождения коэффициентов прохождения и отражения волны необходимо решить уравнение Гельмгольца относительно E_z -компоненты электромагнитного поля с соответст-

вующими граничными условиями: непрерывность тангенциальных компонент поля на поверхностях раздела сред $x = \pm \frac{b}{2}$;

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k^2 \varepsilon \mu_{\perp} E_z = 0.$$

Для трех областей исследуемой структуры это решение имеет вид

$$\begin{aligned} E_z^1 &= \sin \frac{\pi p}{a} (y-a) e^{+i\gamma_p x} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-i\gamma_n x} \sin \frac{\pi n}{a} (y-a), \quad x < -\frac{b}{2}; \\ E_z^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n^+ e^{i\zeta_{na} x} + D_n^- e^{-i\zeta_{na} x} \right) \sin \frac{\pi n}{a} (y-a), \quad |x| < \frac{b}{2}; \\ E_z^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{i\gamma_n x} \sin \frac{\pi n}{a} (y-a), \quad x > \frac{b}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\gamma_n = \left(k^2 - (\pi n / a)^2 \right)^{1/2}, \quad \zeta_{na} = \left(k^2 \varepsilon \mu_{\perp} - (\pi n / a)^2 \right)^{1/2},$$

$\mu_{\perp} = \mu(1 - \mu_a^2 / \mu^2)$ – эффективная магнитная проницаемость феррита, R_n и T_n – коэффициенты преобразования волн в первой и третьей областях, D_n^+ и D_n^- – во второй области.

Составляющие напряженности магнитного поля H_y находятся из уравнений Максвелла через E_z составляющие согласно формуле

$$H_y = - \left(\frac{1}{ik\mu_{\perp}} \right) \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + i \frac{\mu_a}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right). \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_y^1 &= - \left(\frac{1}{ik} \right) \left[(i\gamma_n) \sin \frac{\pi p}{a} (y-a) e^{+i\gamma_p x} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n (-i\gamma_n) e^{-i\gamma_n x} \sin \frac{\pi n}{a} (y-a) \right], \\ H_y^2 &= - \left(\frac{1}{ik\mu_{\perp}} \right) \left\{ \left[\sum_{n=1}^{\infty} (i\zeta_{na}) \left(D_n^+ e^{i\zeta_{na} x} - D_n^- e^{-i\zeta_{na} x} \right) \sin \frac{\pi n}{a} (y-a) \right] + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\mu_a}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{a} \right) \left(D_n^+ e^{i\zeta_{na} x} + D_n^- e^{-i\zeta_{na} x} \right) \cos \frac{\pi n}{a} (y-a) \right\}, \\ H_y^3 &= - \left(\frac{1}{ik} \right) \left[\sum_{n=1}^{\infty} T_n (i\gamma_n) e^{i\gamma_n x} \sin \frac{\pi n}{a} (y-a) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
R_n &= (X_n^+ + X_n^-) e^{-i\gamma_n \frac{b}{2}} + \delta_n^p e^{-i\gamma_s b}, & T_n &= (X_n^+ - X_n^-) e^{-i\gamma_n \frac{b}{2}}, \\
2X_n^\pm &= \delta_n^p e^{-i\gamma_s \frac{b}{2}} + (R_n \pm T_n) e^{i\gamma_n \frac{b}{2}}, & L_{sn} &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{\pi s}{a} (y-a) \cos \frac{\pi n}{a} (y-a) dy.
\end{aligned} \tag{4}$$

Используя граничные условия

$$\begin{aligned}
E_z^1 &= E_z^2, \quad H_y^1 = H_y^2, & x &= -\frac{b}{2}, \\
E_z^2 &= E_z^3, \quad H_y^2 = H_y^3, & x &= \frac{b}{2},
\end{aligned} \tag{5}$$

и ортогональность собственных функций поперечного оператора Лапласа граничной задачи, получим две связанные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно введенных неизвестных коэффициентов X_n^\pm , а именно:

$$X_s^+ W_s^- + \left(\frac{\mu_a}{\mu} \right) \sum_{n=1} X_n^- L_{sn} \left(\frac{\pi n}{a} \right) = \delta_s^p e^{-i\gamma_s \frac{b}{2}} \frac{(W_s^+ + W_s^-)}{2}, \tag{6}$$

$$X_s^- V_s^+ + \left(\frac{\mu_a}{\mu} \right) \sum_{n=1} X_n^+ L_{sn} \left(\frac{\pi n}{a} \right) = \delta_s^p e^{-i\gamma_s \frac{b}{2}} \frac{(V_s^- + V_s^+)}{2}. \tag{7}$$

Здесь $W_s^\pm = \left[\mu_\perp \gamma_s \pm i \zeta_{sa} \operatorname{tg} \zeta_{sa} \frac{b}{2} \right]$, $V_s^\pm = \left[\mu_\perp \gamma_s \pm i \zeta_{sa} \operatorname{ctg} \zeta_{sa} \frac{b}{2} \right]$. Другие обозначения соответствуют принятым в работах [3, 4]. Связанные системы алгебраических уравнений (6), (7) можно свести к двум независимым СЛАУ второго рода относительно коэффициентов X_n^+ или X_n^- . До настоящего времени такие системы уравнений решались в основном численными методами ввиду того, что матричные коэффициенты являются невырожденными относительно целых индексов n и s . Анализ матричных коэффициентов в СЛАУ (6), (7) показывает их отличие от нуля только в случае, когда индексы поперечных волноводных мод n и s разной четности. Более того, определитель СЛАУ является симметричным даже при наличии гиротропии среды $\mu_\perp \neq 0$, что указывает на возможность получения аналитического решения в замкнутом виде. В работе [3] был впервые предложен метод аналитического решения СЛАУ на основе интерполяционной формулы Лагранжа и специального вида базисных функций. Поясним вкратце суть метода. Рассмотрим интеграл Коши следующего вида:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\sin \alpha \zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)}, \tag{8}$$

где C_n – окружность радиуса r_n с центром в начале координат. Окружим точки $z_n = n\Delta = \frac{\pi}{\alpha} n$, в которых задаются значения функции $f(z)$, маленькими кружками ρ_n , а точку z – кружком γ . Поскольку в точках $z_n = \frac{\pi}{\alpha} n$, ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$) функция $\sin \alpha z$ имеет простые нули, а функция $f(\zeta)$ регулярна по предположению на всей конечной плоскости, то на основании теоремы о вычетах имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\sin \alpha \zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)} = \sum_{\rho_n \in C_n} \underset{\gamma}{Res} + Res, \quad (9)$$

где сумма вычетов по ρ_n распространена на точки $z_n = \frac{\pi}{\alpha} n$, лежащие внутри окружностей C_n . Если точка z не совпадает с узловыми точками z_n , то вычет (Res) в этой точке равен

$$\frac{f(z)}{\sin \alpha z}, \text{ а в точках } z_n \text{ вычеты равны величине } \frac{f\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)}{\alpha \left(\frac{\pi n}{\alpha} - z\right) \cos \pi n}.$$

Таким образом, формула (9) принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\sin \alpha \zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)} = \sum_{\rho_n \in C_n} \frac{f\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)}{\alpha \left(\frac{\pi n}{\alpha} - z\right) \cos \pi n} + \frac{f(z)}{\sin \alpha z}, \quad (10)$$

Можно показать, что левая часть равенства (10) стремится к нулю при неограниченном возрастании n . Это означает, что и ряд, стоящий в правой части равенства (10), стремится к нулю [5]. Тогда из (10) следует интерполяционная формула Лагранжа [6] для функции $f(z)$, а именно:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n G(z)}{G'(z_n)(z - z_n)}, \quad (11)$$

где $G(z)$ – целая функция, имеющая в точках $\{z_n\}$ простые нули, которая не обращается в нуль при других значениях z , так что $G(z_n) = 0$, $G'(z_n) \neq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Существенным представляется то, что коэффициенты интерполяции в формуле Лагранжа (11) определяются в точности значениями искомой функции $f(z)$ в узловых точках интерполяции $z = z_n$, т. е.

$a_n = f(z_n)$. Применительно к данной задаче функция $G(z) = \sin \alpha z$, а $z_n = \frac{\pi n}{\alpha}$. Отметим, что выбор целых функций $G(z)$ зависит от вида матричных коэффициентов СЛАУ. В результате, в случае применения интерполяционной формулы Лагранжа (11) для вычисления функциональных рядов, СЛАУ сводится к системе двух связанных уравнений, которые имеют следующее аналитическое решение:

$$X_n^+ = \frac{\delta_n^p \left[V_n^+ (W_n^+ + W_n^-) - (-1)^n i \left(\frac{\mu a}{\mu} \right) \left(\pi \frac{n}{a} \right) (V_n^- + V_n^+) \right]}{2e^{i\gamma_n \frac{b}{2}} \left[W_n^- V_n^+ + \left(\frac{\mu a}{\mu} \right)^2 \left(\pi \frac{n}{a} \right)^2 \right]}, \quad (12)$$

$$X_n^- = \frac{\delta_n^p \left[W_n^- (V_n^- + V_n^+) - (-1)^n i \left(\frac{\mu a}{\mu} \right) \left(\pi \frac{n}{a} \right) (W_n^+ + W_n^-) \right]}{2e^{i\gamma_n \frac{b}{2}} \left[W_n^- V_n^+ + \left(\frac{\mu a}{\mu} \right)^2 \left(\pi \frac{n}{a} \right)^2 \right]} \quad (13)$$

Из этих выражений следует, что лишь коэффициенты отражения и прохождения волны через ферритовый резонатор отличны от нуля. Высшие коэффициенты преобразования волн равны нулю. Это подтверждает и численный анализ исходной СЛАУ (6), (7). Более того, четные и нечетные колебания в ферритовом резонаторе по продольной координате являются связанными за счет величины μ_a . Полученные прямые формулы для вычисления R_1 и T_1 (4) позволяют относительно просто проводить вычисление амплитудно-частотных характеристик без ограничения на геометрические размеры устройства и материальные параметры среды. В качестве примера на рис. 2 приведены результаты вычислений модулей коэффициентов R_1 и T_1 по полученным формулам (12), (13) для нескольких значений параметра μ_a . Сравнение результатов, полученных по аналитическим формулам и рассчитанных на основе СЛАУ, обнаруживает их полное соответствие.

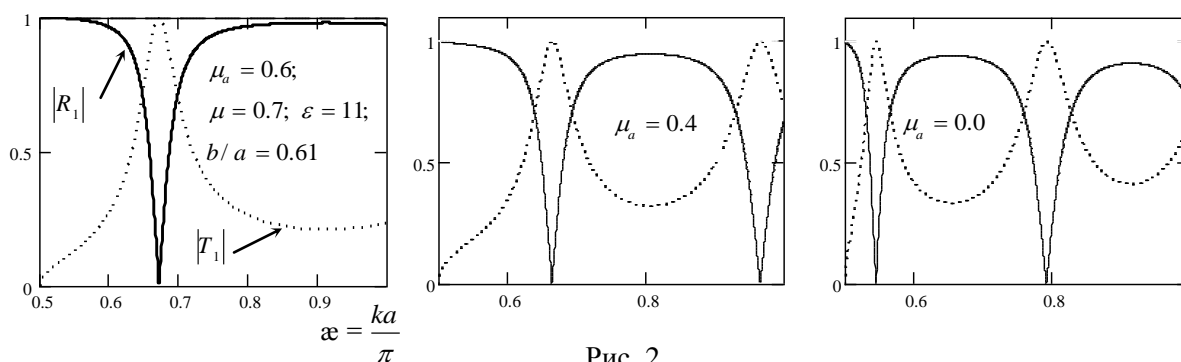


Рис. 2

Выводы

Предложен новый подход для аналитического решения задач дифракции волноводной волны на ферритовом резонаторе в плоскопараллельном волноводе с использованием интерполяционной формулы Лагранжа. Получено в замкнутом виде аналитическое решение задачи для произвольных соотношений между длиной волны, геометрическими размерами и материальными параметрами гиротропной среды.

Список литературы: 1. Эшптейн П. Теория распространения электромагнитных волн в гиромангнитной среде // УФН. – 1958. – Т. LXV. Вып. 2. – С. 283–311, (Rev. Mod. Phys. 28, 3, 1956). 2. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. – М.: Физматлит, 1994. – 464 с. 3. Мизерник В. Н., Шматько А. А. Возбуждение волноводной волной ферритового резонатора (аналитическое решение) // 22-я Междунар. Крым. конф. “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”. КрымМиКо’2012. Материалы конференции. 10-14 сентября. Севастополь, 2012. – С. 575–576. 4. Мизерник В. Н., Шматько А. А. Собственные колебания волноводных разветвлений с ферритовым слоем и резонатором // Вісник СумДУ. Серія. Фізика, математика, механіка. – 2006. – № 6. – С. 104–114. 5. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. – М.: Физматлит, 1962. – 220 с. 6. Привалов А. А. Теория интерполирования функций. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. – 230 с.

ХНТФЦ МОН Украины и НАН Украины,
Харьковский национальный
университет радиоэлектроники
Харьковский национальный
университет имени В.Н. Каразина

Поступила в редколлегию 10.10.2013