

ДИФРАКЦІЯ ЕЛЕКТРОНІВ ПРИ ПОХИЛОМУ ПАДІННІ НА ГРАТКУ НЕСКІНЧЕННО ТОНКИХ МЕТАЛЕВИХ СТРІЧОК

Вступ

В роботі [1] розглянуто задачу про дифракцію монохроматичного пучка електронів на металевій ґратці, що утворена нескінченною послідовністю нескінченно тонких металевих стрічок при нормальному падінні електронів до площини, в якій розташована ґратка.

В даній роботі квантово-механічний підхід до проблеми застосовано для випадку похилого падіння електронів на металеву ґратку.

Постановка задачі

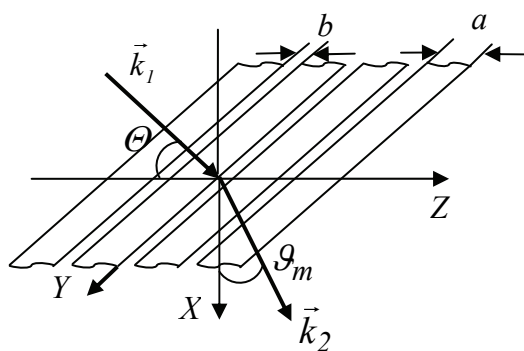


Рис. 1

Нехай в нескінченно тонкому, безмежному в площині YOZ металевому екрані прорізані вузькі щілини паралельні осі OY (рис. 1). Ширину щілини позначимо – b , ширину стрічки – a , таким чином період ґратки $d = a + b$.

З боку негативних значень осі Z на ґратку падає монохроматичний пучок електронів під кутом ковзання θ до осі Z .

Проблема полягає в знаходженні кутів дифракції \mathcal{S} під якими розсіюються вторинні електрони після взаємодії з ґраткою.

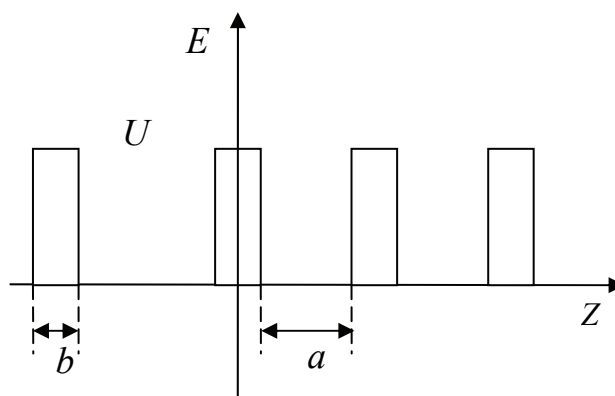


Рис. 2

Розв'язання задачі

При розв'язанні задачі будемо базуватись на наступній моделі ґратки.

ґратка являє собою нескінченну послідовність потенціальних ям і бар'єрів з нескінченно високими стінками. Така модель зі стінками скінченної висоти представлена на рис.2. При цьому щілині відповідає бар'єр шириною b , ямі відповідає металева стрічка шириною a . В подальшому будемо вважати щілини вузькими, такими, що $b \ll a$, отже, покладемо $d \approx a$.

Будемо також вважати, що при проходженні електрона пучка через щілину, між електроном пучка і електроном стрічки відбувається пружна взаємодія, внаслідок якої електрон пучка відхиляється від первинного напрямку руху на деякий кут дифракції \mathcal{G} і застосуємо для розрахунків закони збереження імпульсу та енергії взаємодіючих частинок.

Як відомо в класичній фізиці, "зрозуміти" означає скласти наочне уявлення про об'єкт або явище. Існує така думка, що взагалі квантову фізику не можна розуміти у такому сенсі. Будь-яка наочна модель неминуче буде діяти за законами класичної фізики і тому начебто неприйнятна для описання квантових процесів. Однак пояснення таких явищ, як, наприклад, фотоэффект, ефект Комптона, базується на наочних уявленнях класичної механіки – законах збереження енергії та імпульсу і приводить до пояснення явищ з точки зору квантових уявлень. Доречно також привести міркування, висловлені в [2]: "зазвичай більш загальна теорія може бути сформульована логічно замкнуто незалежно від менш загальної, яка є граничним випадком... формулювання ж основних положень квантової механіки принципово неможливе без залучення класичної механіки".

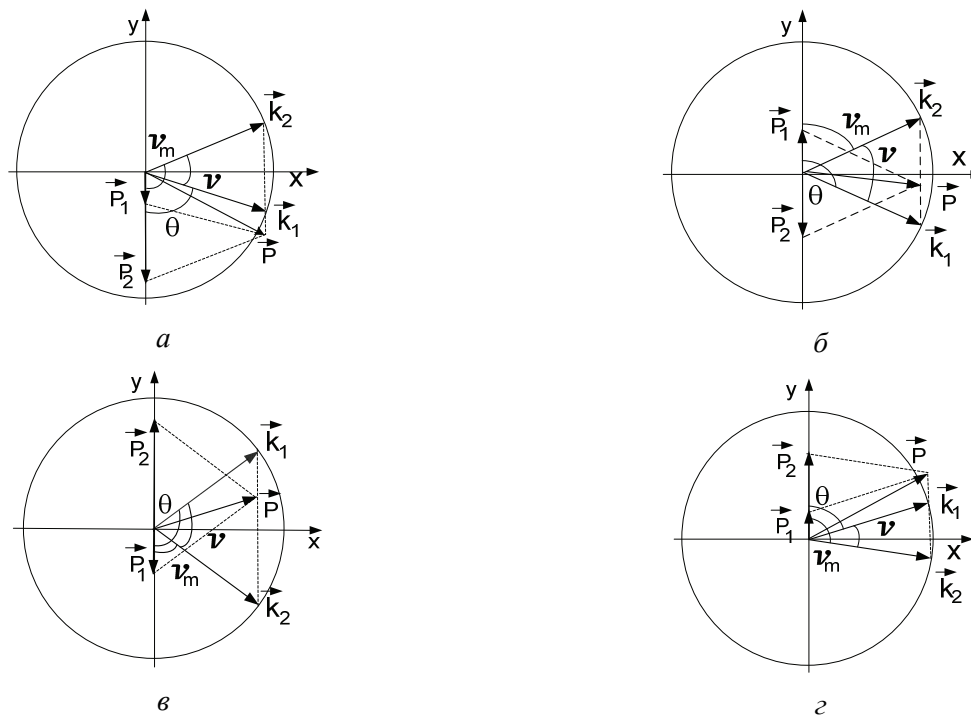


Рис. 3

Зіткнення електронів будемо представляти за допомогою діаграми імпульсів (рис. 3). На діаграмах представлено чотири можливих варіанти співвідношень між напрямками векторів імпульсів взаємодіючих частинок. При побудові діаграм вже враховано також, що величина первинного імпульсу електрона k_1 та вторинного імпульсу k_2 , приймаються однаковою $k_1 \approx k_2$.

Кут θ – кут ковзання визначає кут між вектором імпульсу первинного електрона пучка \vec{k}_1 і вектором імпульсу електрона стрічки \vec{p}_1 . Кут \mathcal{G}_m – кут між вектором імпульсу розсія-

ного електрона \vec{k}_2 та вектором первинного імпульсу електрона стрічки \vec{p}_1 . Кут ϑ – кут між векторами \vec{k}_1 та \vec{k}_2 – кут дифракції.

Із закону збереження імпульсу механічної системи випливає

$$\vec{p}_1 + \vec{k}_1 = \vec{p}_2 + \vec{k}_2. \quad (1)$$

Перенесемо \vec{p}_2 в ліву частину, \vec{p}_1, \vec{k}_2 – в праву частину, та зведемо обидві частини отриманого рівняння в квадрат. Тоді отримаємо

$$p_2^2 = p_1^2 + k_1^2 + k_2^2 + 2\vec{p}_1\vec{k}_1 - 2\vec{p}_1\vec{k}_2 - 2\vec{k}_1\vec{k}_2,$$

або

$$p_2^2 = p_1^2 + k_1^2 + k_2^2 + 2p_1k_1 \cos \Theta - 2p_1k_2 \cos \vartheta_m - 2k_1k_2 \cos \vartheta. \quad (2)$$

При визначенні основних співвідношень, що характеризують взаємодію електрона пучка з електроном стрічки треба враховувати, що взаємодіючі частинки мають електричний заряд, і існує електростатична взаємодія, енергія якої

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (3)$$

де e – заряд електрона, r – відстань між частинками, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Якщо за мінімальну відстань, на яку наближаються електрони при взаємодії, прийняти навіть $r \sim 10^{-10}$ м (звичайно, r насправді буде більше) (а це відбувається тоді, коли електрон пучка проходить через щілину), то

$$E_e = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-12} \cdot 8,85} \cong 2 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

Між електронами буде також виникати магнітна взаємодія. Але, якщо покласти швидкість взаємодіючих частинок порядку $v \sim 10^8$ м/с, то і в цьому випадку відповідні розрахунки дають для енергії взаємодії величину $E_h \sim 10^{-21}$ Дж.

Імпульс, механічна енергія та маса частинок пов'язані між собою відомою релятивістською формулою

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (4)$$

Оцінімо вклад в повну енергію взаємодіючих частинок повної механічної енергії E . Розрахунки показують, що порядок величини енергії спокою

$E \approx m_0 c^2 = 8 \cdot 10^{-15}$ Дж таким чином $E \gg E_e$, $E \gg E_h$ і енергією електростатичної та магнітної взаємодії можна знехтувати. Тоді закон збереження енергії буде мати вигляд

$$\sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} + \sqrt{k_1^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4} + \sqrt{k_2^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (5)$$

Перенесемо підкореневий вираз в рівнянні (5), що містить імпульс p_2 в ліву частину, всі інші складові в праву та зведемо обидві частини рівняння в квадрат, тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
p_2^2 c^2 + m^2 c^4 &= p_1^2 c^2 + m^2 c^4 + k_1^2 c^2 + m^2 c^4 + k_2^2 c^2 + m^2 c^4 + \\
&+ 2\sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} \cdot \sqrt{k_1^2 c^2 + m^2 c^4} - 2\sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} \sqrt{k_2^2 c^2 + m^2 c^4} - \\
&- 2\sqrt{k_1^2 c^2 + m^2 c^4} \cdot \sqrt{k_2^2 c^2 + m^2 c^4}
\end{aligned} \quad (6)$$

Виключимо із рівнянь (2) та (6) невідомий імпульс p_2 . Поділимо рівняння (6) на c^2 та прирівняємо праві частини отриманого виразу і рівняння (2), тоді будемо мати

$$\begin{aligned}
p_1^2 + k_1^2 + k_2^2 + 2p_1 k_1 \cos \vartheta - 2p_1 k_2 \cos \vartheta_m - 2k_1 k_2 \cos \vartheta &= \\
= p_1^2 + k_1^2 + k_2^2 + 2m^2 c^2 + \frac{2}{c^2} \sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} \cdot \sqrt{k_1^2 c^2 + m^2 c^4} - \\
- \frac{2}{c^2} \sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} \sqrt{k_2^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{2}{c^2} \sqrt{k_1^2 c^2 + m^2 c^4} \cdot \sqrt{k_2^2 c^2 + m^2 c^4}
\end{aligned} \quad (7)$$

Покладемо, як і в роботі [1], в (7) $k_1 = k_2$, тоді отримаємо

$$p_1 k_1 \cos \Theta - p_1 k_2 \cos \vartheta_m - k_1 k_2 \cos \vartheta = m^2 c^2 - \frac{I}{c^2} (k_1^2 c^2 + m^2 c^4).$$

Або

$$\frac{\cos \vartheta_m - \cos \Theta}{1 - \cos \vartheta} = \frac{k_1}{p_1}. \quad (8)$$

Згідно з [2] власні значення імпульсу в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками визначаються співвідношенням

$$p_1 = \frac{\pi \hbar}{d}, \quad (9)$$

де $\hbar = h/2\pi$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж с – стала Планка, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ Згідно з гіпотезою де-Бройля імпульс електрона пучка

$$k_1 = \frac{2\pi \hbar}{\lambda}, \quad (10)$$

де λ – довжина хвилі де-Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi \hbar}{m v_1}, \quad (11)$$

v_1 – швидкість первинного електрона.

Підставляючи вирази (9), (10) в співвідношення (8), отримаємо

$$\frac{\cos \vartheta_m - \cos \Theta}{1 - \cos \vartheta} = \frac{2d}{n\lambda}. \quad (12)$$

Після незначних тригонометричних перетворень рівняння (12) набуває вигляду

$$\cos \vartheta_m - \cos \Theta = \frac{n\lambda}{d} \sin^2 \frac{\vartheta_m + \Theta}{2} = \frac{n\lambda}{d} \sin^2 \left(\Theta + \frac{\vartheta}{2} \right). \quad (13)$$

У випадку великих значень кутів ковзання θ та незначних кутах дифракції ϑ рівняння (13) переходить у відоме співвідношення [3] для похилого падіння світла на дифракційну ґратку

$$d(\cos \vartheta_m - \cos \Theta) = n\lambda. \quad (14)$$

Як показують експерименти з дифракції електронів на ґратці металевих стрічок [4], якщо поставити екран на шляху розсіяного пучка електронів, то можна виявити дифракційну картину розподілу інтенсивності пучка, аналогічну дифракції світла. Оскільки маємо справу в цьому випадку з частинками, то міркування про інтерференцію є безпідставними. Для частинок явища інтерференції не існує, і можна говорити тільки про явище дифракції частинок. В точки, де розташовані максимуми інтенсивності в дифракційній картині, приходять електрони, в точки, де розташовані мінімуми електрони не попадають, і це визначається дискретними значеннями кутів дифракції.

Висновки

У роботі використано квантовомеханічний підхід до проблеми. Виходячи з припущення про те, що електрони пучка, проходячи через щілину, взаємодіють з електронами речовини, показано, що дифракційна картина у вигляді послідовності максимумів та мінімумів, яка спостерігається на екрані, визначається, врешті решт, дискретним спектром імпульсів електронів речовини, з якого виготовлені пластини, що утворюють ґратку.

Отримано рівняння, що визначає положення максимумів дифракції яке при малих кутах дифракції збігається з відомим в хвильовій теорії дифракції світла рівнянням дифракційної ґратки.

Список літератури. 1. Безуглий, Є.А., Безуглий, А.В., Петченко, О.М. Дифракція електронів на ґратці нескінченно тонких металевих стрічок // Вісник Харк. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. – 2012. – № 1020, сер. "Фізика". – Вип. 17. – С. 74 – 77. 2. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М. Теоретическая физика. – М., 1963. – Т. 3. – С. 15, 61 – 65, 87 – 89. 3. Борн, М., Вольф, Э. Основы оптики. – М. : Наука, 1973. – С. 371. 4. Jonsson C.Zs. Phis. 1961, p. 454 – 474.

Харківський національний університет
міського господарства ім. О.М. Бекетова

Надійшла до редколегії 15.01.2014