УДК 658.513.012.12

С.К. МЕЩАНИНОВ, *д-р техн. наук*

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ АДЕКВАТНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛА В ЭЛЕКТРОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Введение

Надежность и достоверность преобразования сигнала в электронно-измерительной системе (ЭИС) является важнейшим критерием, по которому можно сделать оценку целесообразности использования того или иного варианта использования комплекса такой аппаратуры в каждом конктерном случае с учетом требований точности, экономичности, безопасности, эргономических и экологических норм. Эффективность любого участка измерительного тракта на сегодняшний день, по нашему мнению, наиболее целесообразно рассматривать с использованием комплексного метода исследований, в основе которого должно находиться представление о рассматриваемом объекте (или его части) как сложной технической системе, подсистемы которой находятся в определенном взаимодействии.

Постановка задачи исследований

Рассмотрим задачу построения адекватного математического описания процесса преобразования сигнала в ЭИС на примере динамической системы с сосредоточенными параметрами, эволюция которой описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bz\,; \tag{1}$$

с уравнением наблюдения

$$y = Cx\,, \tag{2}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n_1}(t))^T$ – вектор-функция переменных состояния $((.)^T$ – знак транспонирования); $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{m_1}(t))^T$ – вектор-функция внешних воздействий; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{n_1}(t))^T$ – вектор-функция наблюдаемых в эксперименте переменных состояния [1, 2]. Под внешними воздействиями (возмущениями) будем понимать функции $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{m_1}(t)$, которые изменяются независимо от субъективных факторов или свойств и поведения исходной математической модели (1); $x \in X$, $z \in Z$, $y \in Y$; A, B, C – матрицы с постоянными коэффициентами, соответствующей размерности. Для простоты рассуждений будем полагать, что матрица C является единичной матрицей ($x(t) = y(t)$).

Цель работы – постановка задачи и математического описания процесса преобразования сигнала в ЭИС.

Основная часть

Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений, соответствующую системе (1):

$$\dot{x} = A\,x\,. \tag{3}$$

Введем матрицу $F[t,\ t_0] = F[t]F^{-1}[t_0]$, где

$$F[t] = \begin{bmatrix} f_1^{(1)}(t), & . & . & . & f_1^{(n)}(t) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ f_n^{(1)}(t) & . & . & . & f_n^{(n)}(t) \end{bmatrix},$$

$\{ f^{(k)}(t) \}$ – n линейно-независимых решений системы (3). Каждый из векторов $f^{(k)}(t)$ является вектором-столбцом с компонентами $f_1^{(k)}(t), f_2^{(k)}(t), \ldots, f_n^{(k)}(t)$. Матрицу $F[t,t_0]$ называют фундаментальной матрицей ЭИС (3) [1]. В дальнейшем будем полагать, что $t_0 = 0$.

Движение $x(t) = x(t, t_0, x^0) = x(t, x^0)$ системы (1), которое удовлетворяет начальному условию $x(0) = x^0$, определяется формулой Коши [3]:

$$x(t) = F[t]x^0 + \int_0^t F[t-\tau]Bz(\tau)d\tau = P(A,B,x^0,z), \tag{4}$$

где $P(A,B,x^0,z) = (p_1(A,B,x^0,z), \ldots, p_{n_1}(A,B,x^0,z))^T$ – вектор-функция, каждая компонента которой зависит от матриц A,B и от вектор-функции z и вектора-столбца x^0.

Предположим, что задана вектор-функция $x^g(t) = (x_1^g(t),\ldots,x_{n_1}^g(t))^T$. Как правило, эта вектор-функция представлена в виде графика (экспериментальные измерения). Пусть $\widetilde{x}(t) = (\widetilde{x}_1(t),\ldots\widetilde{x}_{n_1}(t))^T$ есть вектор-функция, которая используется в расчетах. Величина отклонения $\widetilde{x}(t)$ от $x^g(t)$ определяется точностью аппроксимации экспериментальных данных и задана априори:

$$\left\| \widetilde{x}(t) - x^g(t) \right\|_X \le \delta_1.$$

Будем полагать, что результаты математического моделирования адекватны экспериментальным измерениям, если выполняется неравенство

$$\rho_X(P(A,B,x^0,z),\widetilde{x}) \le \varepsilon, \tag{5}$$

где $\rho_X(P,y)$ – расстояние между вектор-функцией P и вектор-функцией $\widetilde{x}(t)$ в некотором метрическом пространстве X, ε – заданная величина (требуемая точность совпадения эксперимента с результатами математического моделирования).

Одним из возможных вариантов неравенства (5) может быть следующий:

$$\left\| P(A,B,x^0,z) - \widetilde{x} \right\|_X \le \varepsilon, \tag{6}$$

где $\|.\|_X$ – норма в функциональном пространстве X.

Величина ε задается априори и характеризует желаемое качество математического моделирования (степень адекватности результатов математического моделирования).

Очевидно, что при выполнении неравенства (5) матрицы A,B и вектор-функция z оказываются связанными. Нетрудно показать, что при фиксированных матрицах A,B в (6) существует бесконечно много различных между собой вектор-функций z, которые будут удовлетворять неравенству (6) [3]. И, наоборот, при фиксированной вектор-функции z существует бесконечно много различных матриц A,B, для которых выполняется условие (6) [3].

В практике математического моделирования проверка неравенства (6), как правило, не осуществляется, но его выполнение подразумевается. В величину ε входит обязательным слагаемым погрешность аппроксимации δ_1 и, поэтому, всегда выполняется неравенство $\delta_1 \le \varepsilon$. Это происходит по той причине, что точность проведения экспериментальных измерений, как правило, на порядок выше требуемой точности моделирования. Часто довольствуются лишь качественным совпадением результатов математического моделирования с данными измерений.

Таким образом, для открытых динамических систем критерию адекватности результатов математического моделирования могут удовлетворять совершенно различные системы (различные матрицы A,B) с различными вектор-функциями $z(t)$.

Если ЭИС замкнута, тогда вектор-функция $P(A,B,x^0,z)$ будет зависеть только от матрицы A и вектора x^0: $P(A,B,x^0,z)=P(A,x^0)$.

Неравенство (6) в этом случае также будет определять бесконечное множество различных матриц A. То есть и в этом случае критерия выбора одной «хорошей» математической модели не существует.

Таким образом, задачу синтеза адекватного математического описания процесса преобразования сигнала в ЭИС можно сформулировать следующим образом: по заданным матрицам A,B необходимо построить модель внешнего воздействия, с использованием которой результаты математического моделирования будут совпадать с определенной точностью с результатами измерений. Другими словами, необходимо построить такую модель внешнего воздействия, которая будут давать адекватные результаты математического моделирования при использовании ранее выбранного математического описания (матрицы A,B). Такой подход для построения пары (математическое описание + модель внешнего воздействия) не является единственным. Возможно также вначале фиксировать модель внешнего воздействия (с некоторой погрешностью), а затем выбирать математическое описание, которое удовлетворяло бы условиям адекватности (6).

Рассмотрим теперь возможности первого алгоритма на примере ЭИС с сосредоточенными параметрами.

Пусть ход некоторого физического процесса хорошо описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1) с уравнением наблюдения (2).

Математическое описание (1) с переменными состояния $x(t)$ можно представить в виде совокупности взаимодействующих отдельных элементарных звеньев с выходными переменными $x_1(t),x_2(t),..,x_{n_1}(t)$. Взаимодействие отдельных звеньев происходит посредством переменных состояния (внутренних взаимодействий). Если экспериментальным путем определить, например переменную состояния $x_k(t)$, тогда исходную систему можно представить одной или двумя более простыми подсистемами, приложив дополнительные внешние воздействия $d_k x_k(t)$ и $-d_k x_k(t)$ к соответствующим частям (d_k – const). Назовем такое преобразование «*k*-м сечением» исходной системы [3]. Результатом такого сечения можно получить ряд более простых подсистем исходной системы.

Будем предполагать, что с помощью ряда «сечений» указанного типа выделена подсистема исходной ЭИС, у которой известны все внешние воздействия (часть из которых получена из переменных состояния) кроме одного искомого воздействия $z_i(t)$, и известна одна из переменных состояния подсистемы, например, $x_j(t)$.

Пусть движение полученной подсистемы движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}=A_1x+B_1z, \tag{7}$$

с уравнением наблюдения

$$y=C_1x+D_1z, \tag{8}$$

где $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))^T$, $z(t)=(z_1(t),\dots,z_m(t))^T$, $y(t)=(y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t))^T$; A_1,B_1,C_1,D_1 – матрицы с постоянными коэффициентам, соответствующей размерности; D_1 – диагональная матрица с первым нулевым диагональным элементом; матрица C_1 имеет только один ненулевой элемент в первой строке, например первый c_1.

Движение подсистемы (7) $x(t)=x(t,x^0)$ системы (1), которое удовлетворяет начальному условию $x(0)=x^0$, определяется формулой Коши.

Из уравнения наблюдения имеем

$$x_1(t)=y_1(t)=\Phi[t]\,x^0+\int_0^t \Phi[t-\tau]B\;z(\tau)d\tau\ ,$$

$$x_2(t)=y_2(t)=d_2\,z_2(t),\quad x_n(t)=y_n(t)=d_n\,z_n(t)\,, \tag{9}$$

где $\Phi_1[t]$ – фундаментальная матрица однородной системы (7) с компонентами $\phi_k^{(i)}$.

Первое уравнение системы (9) дает

$$x_1(t)=y_1(t)=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t)x_i^0\\ \cdot\\ \dots\dots\\ \cdot\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\phi_n^{(i)}(t)x_i^0\end{bmatrix}+\int_0^t \Phi[t-\tau]B\;z(\tau)d\tau\ , \tag{10}$$

$$x_1(t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t-\tau)\,x_i^0+\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t-\tau)\sum_{k=1}^{m}b_{ik}z_k(\tau)d\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t-\tau)\,x_i^0+\int_0^t z_1(\tau)\sum_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t-\tau)\,b_{i1}z_k(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t[z_2(\tau)\sum_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t-\tau)\,b_{i2}\ +.+\ z_m(\tau)\sum_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t-\tau)\,b_{im}]\,d\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t-\tau)x_i^0+\int_0^t K_1(t-\tau)z_1(\tau)d\tau+\sum_{j=2}^{n}\int_0^t K_j(t-\tau)z_j(\tau)d\tau\,.$$

Здесь приняты обозначения:

$$K_1(t-\tau)=\sum_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t-\tau)b_{i1},$$

$$K_j(t-\tau)=\sum_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t-\tau)b_{ij},\ j=2,3,..,m\,.$$

Из системы (9) имеем

$$x_1(t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_1^{(i)}(t-\tau)\,x_i^0+\int_0^t K_1(t-\tau)z_1(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{d_j}\int_0^t K_j(t-\tau)x_j(\tau)d\tau,$$

или

$$\int_0^t K_1(t-\tau)z_1(\tau)d\tau=E(\mathrm{t})\,, \tag{11}$$

где $E(t)=x_1(t)-\sum\limits_{i=1}^{n}f_1^{(i)}(t-\tau)\,x_i^0\ -\sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{1}{d_j}\int\limits_0^t K_j(t-\tau)\,y_j(\tau)d\tau$ – известная функция.

Перепишем (11) в виде

$$A\;z=u_{\delta_1}=B\;\widetilde{x}, \tag{12}$$

где A есть линейный вполне непрерывный оператор $A:Z\to U$, $z\in Z$, $u_{\delta_1}\in U$, $\widetilde{x}\in X$, $B:X\to U$ – линейный оператор, $\widetilde{x}=(\widetilde{x}_1(t),z_1(t),z_2(t),...,z_r(t))^T$ – исходные экспериментальные данные; z – искомая функция, (Z, U, X – банаховые функциональные пространства).

Постановка задачи синтеза внешнего воздействия

Пусть искомое внешнее воздействие z и заданный отклик математической модели $\widetilde{x}\in X$ связаны зависимостью (12).

В дальнейшем будем полагать, что элемент $\widetilde{x} \in X$ отличается от вектор-функции x^g, заданной в виде экспериментальной зависимости, на величину δ_1:

$$\left\| x^g - \widetilde{x} \right\|_X \le \delta_1 , \qquad (13)$$

где x^g – заданный отклик системы, δ_1 – const, $\delta_1 > 0$.

Обозначим через Q_{δ_1} множество возможных решений обратной задачи идентификации модели внешнего воздействия (12) при фиксированных операторах *A*, *B*:

$$Q_{\delta_1} = \{z : \left\| A z - B \widetilde{x} \right\|_U \le \delta_1 \left\| B \right\| = \delta_0 \} .$$

Любая функция *z* из множества Q_{δ_1} является хорошей моделью внешнего воздействия, так как функция Az совпадает с $B\widetilde{x}$ с точностью измерения. Множество Q_{δ_1} является неограниченным при любом δ_1 (некорректная задача), так как оператор A является вполне непрерывным в подавляющем большинстве случаев [4]. Задача нахождения $z \in Q_{\delta_1}$ названа *задачей синтеза модели внешнего воздействия* методом идентификации [1 – 3]. Для отбора наилучшей модели внешнего воздействия из бесконечного множества различных «хороших» моделей в работах [1 – 3] предлагается использовать некоторый непрерывный функционал $\Omega[z]$ со специальными свойствами, определенный на Z_1 (Z_1 есть некоторое подмножество Z) [4]. За *решение задачи синтеза модели внешнего воздействия* можно принимать элемент $z_{\delta_1} \in Q_{\delta_1}$, для которого выполняется равенство:

$$\Omega[z_{\delta_1}] = \inf_{z \in Q_{\delta_1} \cap Z_1} \Omega[z] . \qquad (14)$$

При этом нет оснований полагать, что функция z_{δ_1} будет близка к реальному (точному) внешнему воздействию z_T.

Решение экстремальной задачи (12) (элемент z_{δ_1}) на множестве Q_{δ_1} существует [4]. Этот элемент устойчив к малым изменениям исходных данных. Решение задачи (12) может быть неединственно. Для целей математического моделирования подходит любое такое решение.

Функцию $z_{\delta_1} \in Q_{\delta_1}$ можно интерпретировать также как наиболее стабильную часть модели внешнего воздействия. Известно из теории информации, что высокочастотная часть сигнала более чувствительна к изменению внешних факторов и параметров. В работе В.Я. Виленкина [5] было показано, что функция z_{δ_1} представляет собой результат фильтрации высокочастотных составляющих. Следовательно, функцию z_{δ_1} можно трактовать как самую устойчивую к изменению неучтенных факторов и параметров составляющую внешнего воздействия, которая вызывает отклик подсистемы, совпадающий с точностью δ_0 с экспериментально измеренным $B x = u_{\delta_1}$. За решение задачи синтеза модели внешнего воздействия будем принимать *наиболее устойчивый к изменению неучтенных факторов элемент* $z_{\delta_1} \in Q_{\delta_1}$ (решение экстремальной задачи (12)). Указанное свойство является важным с точки зрения дальнейшего использования полученного решения при математическом моделировании физических процессов.

При исследовании конкретных динамических систем структура математического описания, как правило, является фиксированной. Исходя из конструктивных особенностей конкретных систем или устройств можно достаточно точно определить параметры математического описания (параметры матриц A, B). Однако эти параметры следует полагать заданными приближенно. Погрешность определения параметров зависит от способа приведения динамических систем к более простым системам [6], от различного рода предположений и допущений [7], от учета тех или иных факторов [6]. Эта погрешность может быть оценена сверху и, как правило, она не превосходит 10 %.

При получении конкретной математической модели реального объекта приходиться использовать разнообразные методы упрощения, учета тех или иных сил, степени их влияния на движение системы и т.д. Это приводит к тому, что у разных исследователей получаются различные математические описания (с разными параметрами) реальной системы, даже если структуры математических описаний (моделей) совпадают. Обозначим через $p \in R^n$ вектор параметров математического описания физического процесса. Будем полагать, что вектор параметров математической модели p не определен точно и может принимать значения в некоторой замкнутой области $D \subset R^n$, то есть $p \in D$. Каждому вектору параметров $p \in D$ соответствуют определенные операторы A_p, B_p в уравнении (11) и эти операторы образуют два класса операторов $K_A = \{A_p\}$, $K_B = \{B_p\}$ при изменении p внутри D. Будем полагать для простоты, что все операторы A_p вполне непрерывные, а операторы B_p – линейные и необратимые. Обозначим через h_1 и d_1 величины максимального отклонения операторов A_p из K_A и операторов B_p из K_B соответственно:

$$\sup_{p_\alpha, p_\beta \in D} \left\| A_{p_\alpha} - A_{p_\beta} \right\|_{Z \to U} \le h_1, \ \sup_{p_\gamma, p_\lambda \in D} \left\| B_{p_\gamma} - B_{p_\lambda} \right\|_{X \to U} \le d_1. \qquad (15)$$

Рассмотрим обратную задачу синтеза «хорошей» модели внешнего воздействия для классов операторов (моделей) K_A, K_B [1, 2]. Тогда множество возможных решений с учетом погрешности операторов A_p, B_p расширится до множества

$$Q_{h_1, d_1, \delta_1} = \{z : \left\| A_p z - B_p x_\delta \right\|_U \le \delta_1 b_0 + d_1 \left\| x_\delta \right\| + h_1 \left\| z \right\|_Z \}, \qquad (16)$$

где $b_0 = \sup_{p \in D} \left\| B_p \right\|_{X \to U}$.

Любая функция из Q_{h_1, d_1, δ_1} вызывает отклик математической модели, который совпадает с откликом реального объекта с погрешностью, учитывающей погрешность экспериментальных измерений и погрешность возможного отклонения параметров вектора $p \in D$. Задача нахождения $z \in Q_{h_1, d_1, \delta_1}$ названа по аналогии с предыдущей задачей *задачей синтеза для класса операторов (моделей)* [1 – 3].

Отметим, что в множестве решений обратной задачи синтеза при фиксированном операторе A_p из K_A содержатся элементы с неограниченной нормой (некорректная задача), поэтому величина $h_1 \left\| z \right\|_Z$ может быть бесконечно большой. Формально такая ситуация неприемлема, так как она означает, что погрешность математического моделирования равна бесконечности, если в качестве моделей использовать произвольную функцию из Q_{h_1, d_1, δ_1}. Следовательно, не все функции из Q_{h_1, d_1, δ_1} будут являться «хорошими» моделями внешнего воздействия.

Введем в рассмотрение множества $Q_{\varepsilon, p}$:

$$Q_{\varepsilon, p} = \{z : \left\| A_p z - B_p \widetilde{x} \right\|_U \le \varepsilon \left\| B_p \right\| \}. \qquad (17)$$

В дальнейшем будем полагать, что величина $\left\| u_{\delta_1} \right\|_U$ превышает величину ε, т.е. $\varepsilon < \left\| u_{\delta_1} \right\|_U$. В противном случае в множество $Q_{\varepsilon, p}$ при любом операторе $A_p \in K_A$, для которого $A_p(0) = 0$, будет входить нулевой элемент пространства Z (функция тождественно равная нулю). Этот случай не представляет практического интереса, так как отклик u_{δ_1} можно получить с тривиальной моделью внешнего воздействия.

Пусть теперь $\delta_1 < \| u_{\delta_1} \|_U < \varepsilon$. Тогда в $Q_{\varepsilon,p}$ обязательно будет входить нулевой элемент при условии, что $A_p(0) = 0$. Однако в множество Q_{h_1, d_1, δ_1} нулевой элемент не входит. Иначе из неравенства $\| A_p(0) - u_{\delta_1} \|_U = \| u_{\delta_1} \|_U \le \delta_1$ получаем противоречие с неравенством $\delta_1 < \| u_{\delta_1} \|_U$.

При $\varepsilon < \| u_{\delta_1} \|_U$ нулевой элемент не входит ни в Q_{h_1, d_1, δ_1}, ни в $Q_{\varepsilon,p}$ для линейных операторов $A_p \in K_A$. Далее будем считать, что последнее неравенство всегда выполняется.

Таким образом, если учитывать погрешность оператора A_p в неравенстве (5), то необходимо величину ε в общем случае полагать равной бесконечности. Другими словами, неравенство (5) для случая $\delta_1 < \varepsilon$ нельзя обосновать погрешностью оператора A_p.

Поскольку все модели $A_p \in K_A$ и $B_p \in K_B$ можно считать эквивалентными, тогда представляет интерес рассмотреть задачу синтеза единой модели внешнего воздействия для всех описаний (моделей) из K_A и K_B [1, 3]. Постановка задач синтеза адекватного математического описания в случае неточных операторов $A_p \in K_A$, $B_p \in K_B$ может найти применение при математическом моделировании в случаях, когда адекватное математическое описание удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, например условию минимизации затрат управления. Одним из возможных вариантов постановки такой задачи может быть задача построения *наиболее устойчивого решения* на множестве Q_{h_1, d_1, δ_1}:

$$\Omega[z^0] = \inf_{z \in Q_{h_1, d_1, \delta_1} \cap Z_1} \Omega[z]. \tag{18}$$

Расчеты ряда практических задач показали, что множество Q_{h_1, d_1, δ_1} является слишком широким множеством, в которое попадает, как правило, тривиальная функция. Для устранения этого недостатка в работах [7, 8] предложен метод специального оператора, который озволяет повысить точность приближенного решения.

Выводы

В работе сформулирована постановка задачи синтеза адекватного математического описания процессов преобразования сигнала в ЭИС, которые хорошо описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассмотрены особенности задачи и предложен метод нахождения устойчивого решения. Впервые сформулирована задача синтеза для класса операторов.

Список литературы: 1. *Меньшиков, Ю. Л.* Вестник ХГТУ. – Херсон, 2002. – № 2 (15). – С. 326–329. 2. *Меньшиков, Ю. Л.* Вістник КНУ, Математика. – Київ, 2004. – Вип.2. – С.310–315. 3. *Меньшиков, Ю. Л.*, *Поляков, Н. В.* Идентификация моделей внешних воздействий. – Дніпропетровськ : Наука та освіта, 2009. – 188 с. 4. *Тихонов, А. Н.*, *Арсенин, В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1979. – 287 с. 5. *Виленкин, С.Я.* Автоматика и телемеханика. – 1968. – № 2. – С. 52–55. 6. *Меньшиков, Ю. Л.* Динамика и прочность тяжелых машин / Днепропетр. ун-т. – 1985. – Вып.9. – С. 89–91. 7. *Меньшиков, Ю. Л.* Обратная задача синтеза модели внешнего воздействия // Вестник нац. техн. ун-та ХПИ. – 2002. – Т.8. – С. 132–136. 8. *Меньшиков, Ю. Л.*, Наконечный, А. Г. Proc. of Problems of Decision making under Uncertainties (PDMU–2003)”. Int. Conf, September 8–12, – 2003, Kiev–Alushta. Ukraine. 2003. – С. 80–82.

Днепродзержинский государственный технический университет

Поступила в редколлегию 09.02.2014