

К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ РАЗНОСТИ ФАЗ МЕЖДУ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИГНАЛАМИ

Введение

В радиотехнике достаточно часто возникает задача измерения разности фаз между сигналами на выходе двух приемников. Известно, что при детерминированном сигнале, наблюдаемом в аддитивной смеси с белым нормальным шумом, нижняя граница дисперсии ошибок измерения начальной фазы [1]

$$\sigma^2 = \frac{1}{2Mq}, \quad (1)$$

где q – отношение сигнал/шум (ОСШ), M – число отсчетов в выборке.

Нетрудно показать, что если в таких же условиях имеются два приемника с взаимно некоррелированными шумами, то дисперсия ошибки измерения разности начальных фаз

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \frac{1}{2M} \left[\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right], \quad (2)$$

где $q_{1,2}$ – ОСШ на выходе приемников.

Однако в ряде ситуаций и, в частности, при поляризационных измерениях в радарах некогерентного рассеяния, сигналы являются стохастическими. В соответствии с работой [2] при стохастических сигналах и $q_1 = q_2 = q$ дисперсия ошибок измерения разности фаз определяется формулой

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \frac{1}{8M\rho^2q^2} (1 + 4q), \quad (3)$$

где ρ – коэффициент взаимной корреляции сигналов.

Из (3) следует, что при $q \rightarrow \infty$ получаем $\sigma^2 \rightarrow 0$. Однако при стохастических сигналах дисперсия ошибок измерения их параметров не может быть равной нулю даже при полном отсутствии шумов приемника.

Поэтому желательно получить формулу для указанной дисперсии, более точно отражающую особенности измерений при стохастических сигналах, чем выражение (3).

Ниже представлена полученная авторами статьи формула для границы Крамера – Рао при измерении разности фаз между стохастическими сигналами с кратким ее выводом и анализом.

1. Граница Крамера – Рао при измерении разности фаз между стохастическими сигналами

В рассматриваемой здесь, а также в работе [2] задаче, наблюдаемые процессы на выходе приемников имеют вид

$$y_1(t) = s_1(t) + n_1(t), \quad y_2(t) = s_2(t) + n_2(t), \quad (4)$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – нормальные «белые» шумы с взаимно некоррелированными квадратурными составляющими и мощностями P_{n1} и P_{n2} соответственно, а стохастические сигналы

$$s_1(t) = U(t) \cos \left(\omega t + u(t) + \frac{\Delta}{2} \right), \quad s_2(t) = V(t) \cos \left(\omega t + v(t) - \frac{\Delta}{2} \right) \quad (5)$$

имеют постоянную во времени разность фаз Δ и, соответственно, мощности P_1 и P_2 .

Квадратурные составляющие сигнала (5) при $\Delta = 0$, то есть процессы

$$\begin{aligned}x_{c1}(t) &= U(t) \cos u(t), & x_{s1}(t) &= U(t) \sin u(t), \\x_{c2}(t) &= V(t) \cos v(t), & x_{s2}(t) &= V(t) \sin v(t)\end{aligned}\tag{6}$$

являются нормальными и имеют нулевые средние значения.

Мощности и взаимные ковариации процессов (6) имеют вид

$$\langle x_{c1}^2(t) \rangle = \langle x_{s1}^2(t) \rangle = \frac{\langle U^2(t) \rangle}{2} = \frac{1}{2} P_1,$$

$$\langle x_{c2}^2(t) \rangle = \langle x_{s2}^2(t) \rangle = \frac{\langle V^2(t) \rangle}{2} = \frac{1}{2} P_2,\tag{7}$$

$$\langle x_{c1}(t)x_{c2}(t) \rangle = \langle x_{s1}(t)x_{s2}(t) \rangle = \langle x_{c1}(t)x_{s2}(t) \rangle = \langle x_{s1}(t)x_{c2}(t) \rangle = \frac{1}{2} \rho \sqrt{P_1 P_2},$$

$$\langle x_{c1}(t)x_{s1}(t) \rangle = \langle x_{s2}(t)x_{s2}(t) \rangle = 0,$$

где $\rho \leq 1$ – коэффициент взаимной корреляции.

После выделения квадратурных составляющих наблюдаемых процессов (4) и их дискретизации наблюдаются случайные выборки вида

$$c1y_k = c1 x_k \cos \frac{\Delta}{2} - s1 x_k \sin \frac{\Delta}{2} + n_{1k}$$

$$c2y_k = c2 x_k \cos \frac{\Delta}{2} + s2 x_k \sin \frac{\Delta}{2} + n_{2k}$$

$$s1y_k = -s1 x_k \cos \frac{\Delta}{2} - c1 x_k \sin \frac{\Delta}{2} + n_{1k}$$

$$s2y_k = -s2 x_k \cos \frac{\Delta}{2} + c2 x_k \sin \frac{\Delta}{2} + n_{2k}$$

где $k = 1, 2, \dots, M$.

При этом ковариационная матрица вектора $\mathbf{y}_k = \{\tilde{n}_1 y_k, \tilde{n}_2 y_k, s1 y_k, s2 y_k\}$ имеет вид

$$\mathbf{R}(\Delta) = \begin{bmatrix} A & C \cos \Delta & 0 & -C \sin \Delta \\ C \cos \Delta & B & C \sin \Delta & 0 \\ 0 & C \sin \Delta & A & C \cos \Delta \\ -C \sin \Delta & 0 & C \cos \Delta & B \end{bmatrix},\tag{8}$$

где $A = 0,5P_1 + 0,5P_{n1}$, $B = 0,5P_2 + 0,5P_{n2}$, $C = 0,5\rho\sqrt{P_1 P_2}$,

Полагаем, что отсчеты в разные моменты времени некоррелированные. Тогда логарифм функции правдоподобия имеет вид

$$L = -2M \ln(2\pi) - 2M \ln(\det \mathbf{R}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \mathbf{Y}_k \mathbf{R}^{-1}(\Delta) \mathbf{Y}_k^T,\tag{9}$$

При этом можно показать, что

$$\mathbf{R}^{-1}(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{R}}} \begin{bmatrix} B & -C \cos \Delta & 0 & C \sin \Delta \\ -C \cos \Delta & A & -C \sin \Delta & 0 \\ 0 & -C \sin \Delta & B & -C \cos \Delta \\ C \sin \Delta & 0 & -C \cos \Delta & A \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{R} = (0,5)^4 \left[P_1 P_2 (1 - \rho^2) + P_{n1} P_2 + P_1 P_{n2} + P_{n1} P_{n2} \right]^2.$$

Дифференцируя (9), получаем

$$\frac{dL}{d\Delta} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \mathbf{Y}_k \frac{d\mathbf{R}^{-1}(\Delta)}{d\Delta} \mathbf{Y}_k^T$$

где

$$\frac{d\mathbf{R}^{-1}(\Delta)}{d\Delta} = \frac{\tilde{N}}{\sqrt{\det \mathbf{R}}} \begin{bmatrix} 0 & \sin \Delta & 0 & \cos \Delta \\ \sin \Delta & 0 & -\cos \Delta & 0 \\ 0 & -\cos \Delta & 0 & \sin \Delta \\ \cos \Delta & 0 & \sin \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

так, что

$$\frac{dL}{d\Delta} = \frac{C}{\sqrt{\det \mathbf{R}}} \left\{ \sin \Delta \sum_k (c_2 y_{kc1} y_k + s_2 y_{ks1} y_k) + \cos \Delta \sum_k (s_2 y_{kc1} y_k - s_1 y_{kc2} y_k) \right\}, \quad (10)$$

Из (10) можно получить алгоритм формирования оценки максимального правдоподобия

$$\hat{\Delta} = \text{arctg} \frac{\sum_{k=1}^M (s_2 y_{kc1} y_k - s_1 y_{kc2} y_k)}{\sum_{k=1}^M (c_2 y_{kc1} y_k + s_2 y_{ks1} y_k)}. \quad (11)$$

Отметим, что результат (11) впервые опубликован в работе [2].

После дифференцирования выражения (10) и усреднения, с учетом (7), получим

$$\left\langle \frac{d^2 L}{d\Delta^2} \right\rangle = \frac{2MC^2}{\sqrt{\det \mathbf{R}}} \quad (12)$$

Искомая нижняя граница дисперсии ошибок измерения находится из (12) с использованием известного соотношения [1]

$$\sigma_{\hat{\Delta}}^2 = \left\langle \frac{d^2 L}{d\Delta^2} \right\rangle^{-1} = \frac{\sqrt{\det \mathbf{R}}}{2MC^2} = \frac{1}{2M\rho^2 q_1 q_2} \left[1 + q_1 + q_2 + (1 - \rho^2) q_1 q_2 \right], \quad (13)$$

где $q_{1,2} = \frac{P_{1,2}}{P_{n_{1,2}}}$ – ОСШ на выходе приемников.

2. Сравнительный анализ формул для дисперсии ошибок измерения разности фаз

Отметим, что в задачах фазовых измерений осуществляются нелинейные преобразования. Поэтому все приведенные формулы для дисперсии следует считать приближенными, причем точность их возрастает с увеличением ОСШ.

При $\rho = 1$ и $q_1 \gg 1$, $q_2 \gg 1$ из (13) получаем результат (2), то есть

$$\sigma_{\hat{\Delta}}^2 \approx \frac{1}{2M} \left[\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right] = \sigma_{\hat{\Delta}\hat{\Delta}}^2. \quad (14)$$

Как видно из (14) и (2), при полной взаимной корреляции стохастических сигналов нижняя граница дисперсии для стохастических сигналов приближается к нижней границе для детерминированных сигналов с увеличением ОСШ. Это же видно по кривой 1 на рис.1, которая представляет отношение (13) к (2), то есть функцию $\gamma(q) = \frac{\sigma_{\tilde{n}\delta}^2(q)}{\sigma_{\tilde{u}\delta}^2(q)}$ при $\rho = 1$ и

$q_1 = q_2 = q$,

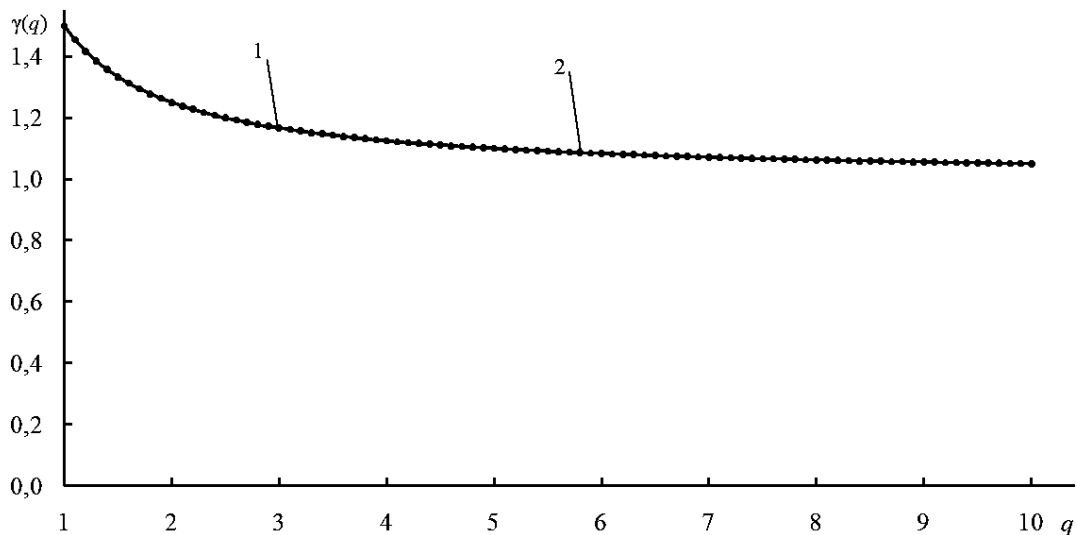


Рис. 1

В то же время из сравнения (3) и (2) видно, что дисперсия, определяемая по (3), оказывается вдвое ниже, чем в случае детерминированного сигнала, что, по мнению авторов, в реальности невозможно. По-видимому, в работе [2] ОСШ вводится не так, как в [1] и в данной работе. Поэтому мы полагаем данное несоответствие непринципиальным и отмечаем, что если произвести в (3) замену $q \rightarrow \frac{q}{2}$, то описанное несоответствие устраняется. С учетом указанной замены (3) принимает вид

$$\sigma_{\tilde{n}\delta 1}^2 = \frac{1}{2M\rho^2q^2}(1+2q). \quad (15)$$

При этом если $\rho = 1$ и $q_1 = q_2 \gg 1$, то (15) дает результат близкий к (2). Это видно из кривой 2 на рис.1, которая представляет отношение (15) к (2), то есть $\gamma_1(q) = \frac{\sigma_{\tilde{n}\delta 1}^2(q)}{\sigma_{\tilde{u}\delta}^2(q)}$ при $\rho = 1$.

Принципиальным отличием (13) от (15) является то, что при отсутствии шумов, то есть при $q_1 = \infty, q_2 = \infty$ из (13) получаем дисперсию

$$\sigma_{\tilde{n}\delta \infty}^2 = \frac{1-\rho^2}{2M\rho^2}, \quad (16)$$

которая определяет предел точности измерений при стохастическом сигнале и может быть равной нулю только при $\rho = 1$, то есть при полной взаимной корреляции сигналов.

Зависимость (13) при $q_1 = q_2 = q$, то есть функция $\sigma_{cm}^2(q)$ для $\rho = 0,5$ представлена кривой 1 на рис.2. Там же прямая 2 отображает предел точности (16). Из рисунка видно, что при $q \geq 5$ точность больше определяется ошибками, порождаемыми стохастичностью сигнала, чем шумовыми ошибками, а при $q \geq 10$ точность в основном определяется стохастичностью сигнала. Кривая 3 представляет зависимость (15), то есть $\sigma_{cm1}^2(q)$ для того же значения

ρ . Как видно, кривая 3 при увеличении ОСШ стремится к нулю, опускаясь значительно ниже предела точности измерений для стохастических сигналов.

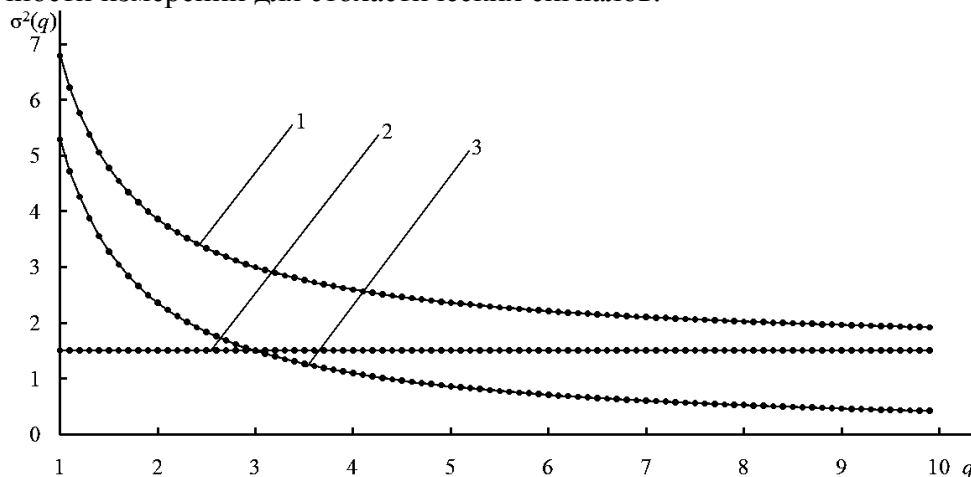


Рис. 2

На рис. 3 изображено то же, что и на рис. 2, однако для $\rho = 1$. Как видно, при полной взаимной корреляции сигналов результаты вычислений по формулам (13) и (15) практически совпадают.

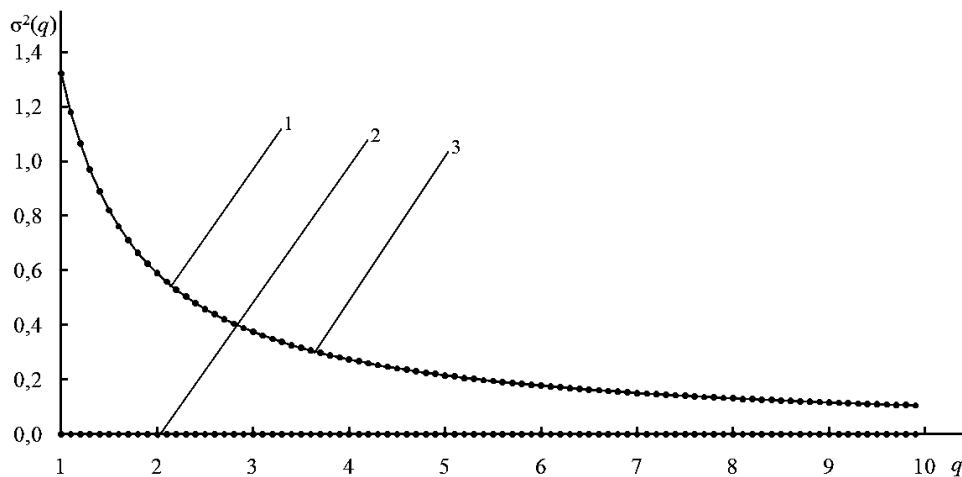


Рис. 3

Таким образом, принципиальным отличием формулы (13) от формулы (3), а также (15), является то, что (13) более точно учитывает стохастический характер полезного сигнала. При этом погрешность вычисления по ранее известной формуле (15) существенно возрастает с уменьшением взаимной корреляции сигналов и с ростом ОСШ.

Заключение

Получена формула, позволяющая оценить потенциальную точность измерения разности фаз на выходе двух приемников при стохастических сигналах. Показано, что полученная формула является более точной, чем ранее известная формула.

Принципиальным отличием формул является то, что с увеличением отношения сигнал/шум дисперсия, определяемая по ранее известной формуле, стремится к нулю, а дисперсия, определяемая по полученной формуле, стремится к пределу, зависящему от коэффициента взаимной корреляции сигналов.

Список литературы: 1. *Фалькович, С.Е., Хомяков, Э.Н.* Статистическая теория измерительных систем. – М.: Радио и связь, 1981. – 288 с. 2. *Ткачев, Г.Н., Карлов, В.Д.* Измерение разности фаз между обыкновенными и необыкновенными компонентами сигнала, рассеянного на тепловых флуктуациях электронной концентрации ионосферы // *Вестн. Харьк. политехн. ин-та. Исследование ионосферы методом некогерентного рассеяния.* – 1981. – Вып. 3, №183. – С. 18–27.