

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ  
В ПЛОСКОСТИ АПЕРТУРЫ КОАКСИАЛЬНОГО СЕНСОРА

## Введение

Необходимость в создании новых средств контроля объектов окружающей среды и выпускаемой продукции постоянно возрастает. Если от эталонных средств требуется, как правило, повышение точности, то рабочие средства измерений, кроме этого, должны обладать рядом достоинств, такими как возможность работы в условиях производства или естественной природы, оперативность, исключение необходимости препарировать объекты контроля и так далее. Часть этих задач, в частности обратных задач, связанных с выделением измерительной информации, решает современная микроэлектронная и микроконтроллерная техника. Поэтому возрастает актуальность дальнейших исследований в направлении создания новых и расширения возможностей известных методов преобразования физических параметров в электрические сигналы.

Сенсор в виде открытого конца коаксиальной линии представляет интерес как первичный преобразователь рабочих средств измерений параметров материалов со сложной структурой и химическим составом. Это используется в медицине, биологии, сельском хозяйстве [1]. Такой сенсор привлекателен простотой, технологичностью, возможностью работать в широком диапазоне частот, локальностью поля. Сравнительно просто изменить его конструкцию, например с помощью прокладок, штырей, изменения соотношения размеров, формы конца центрального стержня и внешнего цилиндрического проводника, экрана и прочие (рисунок, а, б, в). Эти изменения открывают возможности по варьированию параметров такого сенсора [2].

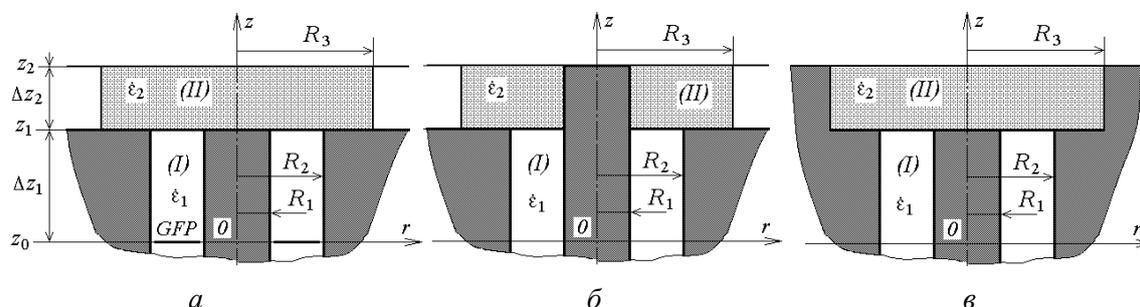


Рис. 1. Варианты геометрических схем открытых коаксиальных сенсоров

Численные методы и современное ПО дают возможность точного расчета его характеристик. Численные решения удобны в инженерной практике. Аналитические методы ориентированы на решение научных задач – определение взаимосвязей на качественном уровне. Однако громоздкость аналитических выражений, сложность выкладок часто не дают возможность получить строгие конечные результаты. Тем не менее, при создании реальных конструкций результаты аналитического этапа позволяют существенно упростить последующие.

Несмотря на простоту конструкции открытого коаксиального сенсора, его математическое описание сложно и громоздко. Поэтому в работе ограничимся обоснованием методики определения параметров одного из важнейших его элементов – распределения поля в плоскости апертуры коаксиального сенсора. Важность его оценки состоит в том, что оно представляет собой источник, возбуждающий поле в исследуемом образце.

## Постановка задачи

В качестве первичной модели устройства возьмем простейшую форму открытого коаксиального сенсора (ОКС) в виде выхода коаксиальной линии в плоском экране (рисунок, *a*). Будем считать, что образец однородный и бесконечный ( $R_3 \rightarrow \infty$  и  $\Delta z_2 \rightarrow \infty$ ).

Размеры апертуры ОКС совпадают с сечением линии. В зависимости от соотношения длины волны и радиусов линии ОКС может работать в режиме ближнего поля и в режиме излучения. В практически важных случаях используется режим ближнего поля и апертура малых размеров. Это позволяет локализовать поле, исследовать пространственную структуру образца, уменьшить его объем. Малая апертура может работать в очень широком диапазоне частот, что на практике может быть использовано для увеличения количества получаемой информации. Поэтому далее будем рассматривать ОКС, у которых апертура меньше половины длины волны ( $2R_2 < \lambda/2$ ). В этом случае коаксиальная линия будет запредельной для всех высших типов волн, и в дальнейшем анализе можно ограничиться случаем ее возбуждения на ТЕМ моде.

Открытую апертуру можно использовать в волноводных или резонаторных измерителях. Но резонаторные измерители имеют более высокую чувствительность, а при использовании четвертьволнового резонатора не исключается возможность создания измерителя, работающего в широком диапазоне частот [3]. Поэтому далее будем подразумевать, что ОКС работает в составе четвертьволнового резонатора. В простейшей конструкции такого измерителя в сечении  $z=0$  расположена закорачивающая стенка. Но в практических конструкциях измерителей сечение нижней, индуктивной части резонатора может быть больше, чем  $R_2$ . В этой части могут размещаться элементы связи, возможно поршень для изменения рабочей частоты и так далее. Поэтому, как и в предыдущих работах, воспользуемся приближением заданного поля (ПЗП) [4], тем более, что последующие выкладки можно легко интерпретировать и для строгого решения при простейшей конструкции сенсора.

В качестве источника поля в ОКС можно взять распределение радиальной компоненты электрического поля в глубине линии –  $E_r(z_0, r)$ , и задать его в виде  $E_r(z_0, r) = U_0 r^{-1}$ , где  $U_0$  – произвольное напряжение (рисунок, *a*). Плоскость заданного поля (Given Field Plane – GFP) совместим с началом координат  $z_0 = 0$ . Высшие моды в выбранной линии ( $2R_2 < \lambda/2$ ) испытывают существенное затухание уже при  $\Delta z_1 = R_2/2$  [5]. Далее будем рассматривать результаты при  $\Delta z_1 > R_2/2$ .

## Основные соотношения

В цилиндрической системе координат при  $R_3 \rightarrow \infty$  и  $\Delta z_2 \rightarrow \infty$  и при отсутствии вариаций поля по азимуту для заданной круговой частоты  $\omega$  связь между радиальной компонентой электрического поля и магнитным полем выражается соотношением [6, 7]

$$H_\varphi(r, z) = -j\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_2 \int_{z'_1}^{z'_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} (\chi_\infty(r)) \frac{\partial}{\partial r'} (\chi_\infty(r'))}{\eta_\infty k_\infty^2} g(z, z') E_r(z', r') r' dk dr' d\varphi' dz' , \quad (1)$$

где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная;  $\dot{\varepsilon}_2$  – комплексное значение относительной диэлектрической проницаемости открытой области (II на рисунок, *a*),  $\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon'_2(1 - j \operatorname{tg} \delta_2)$ ;  $k_\infty = \kappa$ ;  $\eta_\infty = \frac{2\pi}{\kappa}$ ;  $\chi_\infty(r) = J_0(\kappa r)$ .

Продольная компонента функции источника  $g(z, z')$  в (1) выражается как:

$$g(z, z') = \frac{1}{\gamma_{i,\infty} \operatorname{sh} \gamma_{i,\infty} \Delta z_i} \begin{cases} \operatorname{ch} \gamma_{i,\infty} z \operatorname{ch} \gamma_{i,\infty} (\Delta z_i - z') & \text{при } z < z' \\ \operatorname{ch} \gamma_{i,\infty} z' \operatorname{ch} \gamma_{i,\infty} (\Delta z_i - z) & \text{при } z > z' \end{cases} . \quad (2)$$

где  $\gamma_{i,\infty} = \sqrt{\kappa^2 - \dot{\varepsilon}_i k_0^2}$  – постоянная распространения в области;  $k_0$  – постоянная распространения в вакууме.

Для сокращения записи здесь и далее будут удаляться все незначащие индексы и избыточные знаки. Для обозначения гиперболических и других функций также выбраны наиболее краткие записи.

Если энергия электромагнитного поля проникает в образец через апертуру, то для магнитной компоненты в образце имеем

$$H_\varphi(r, z) = -j\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_2 \int_{R_1}^{R_2} E_r(z_1, r') \left[ \int_0^\infty J_1(\kappa r) J_1(\kappa r') \frac{\kappa \cdot \exp(-\gamma_2(z-z_1))}{\gamma_2} d\kappa \right] r' dr' . \quad (3)$$

Магнитное поле в коаксиальной области (верхний индекс  $c$ ) выразится через радиальные компоненты электрического поля на ее нижней ( $E_r(z_0, r)$ ) и верхней границах ( $E_r(z_1, r)$ ) следующим образом:

$$H_\varphi(r, z) = -j\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_1 \int_{R_1}^{R_2} \sum_n \frac{2\pi}{\eta_n^c (k_n^c)^2} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_n^c(r)) \frac{\partial}{\partial r'} (\chi_n^c(r')) \frac{r'}{\gamma_n^c \operatorname{sh} \gamma_n^c \Delta z_1} \times \\ \times [E_r(z_0, r') \operatorname{ch}(\gamma_n^c (\Delta z_1 - z)) - E_r(z_1, r') \operatorname{ch}(\gamma_n^c z)] dr' . \quad (4)$$

где  $k_n^c$  – при  $n = 1, 2 \dots$   $n$ -й корень уравнения:

$$Y_0(k_n^c R_2) \cdot J_0(k_n^c R_1) - Y_0(k_n^c R_1) \cdot J_0(k_n^c R_2) = 0;$$

$$\chi_n^c(r) = Y_0(k_n^c R_1) \cdot J_0(k_n^c r) - Y_0(k_n^c r) \cdot J_0(k_n^c R_1);$$

$$\eta_n^c = \frac{2\pi}{v_0} \left[ 0,5 \cdot R_2^2 \cdot [Y_0(k_n^c R_1) \cdot J_1(k_n^c R_2) - Y_1(k_n^c R_2) \cdot J_0(k_n^c R_1)]^2 - \right. \\ \left. - 0,5 \cdot R_1^2 \cdot [Y_0(k_n^c R_1) \cdot J_1(k_n^c R_1) - Y_1(k_n^c R_1) \cdot J_0(k_n^c R_1)]^2 \right];$$

$v_0$  – коэффициент ряда Фурье азимутальных компонент,  $v_m = 1$  при  $m = 0$  и  $v_m = 2$  при  $m > 1$ ;  $\gamma_n^c = \sqrt{(k_n^c)^2 - \dot{\varepsilon}_1 k_0^2}$ ; при  $n = 0$ :  $\chi_0^c(r) = \ln(k_0 r)$ ,  $\gamma_0^c = \sqrt{-\dot{\varepsilon}_1 k_0^2}$ ,  $\eta_0^c = \frac{2\pi}{v_0} \ln(R_2/R_1)$ .

Коэффициент  $2\pi$  при  $\eta_n^c$  здесь восстановлен, поскольку речь идет о норме всей поперечной функции, включая азимутальную составляющую.

### Особенности интегрального уравнения

В соответствии с граничными условиями можно приравнять тангенциальные компоненты  $H_\varphi(r, z)$  над и под границей  $z = z_1$ . Опуская несложные преобразования, на основании (1) и (2), непосредственно над границей имеем

$$H_\varphi(r, z_1 + 0) = -j\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_2 \int_{R_1}^{R_2} E_r(r', z_1) \left[ \int_0^\infty J_1(\kappa r) J_1(\kappa r') \frac{\kappa}{\gamma_2(\kappa)} d\kappa \right] r' dr' . \quad (5)$$

На основании (4) получаем выражение для магнитного поля непосредственно под границей:

$$H_\varphi(r, z_1 - 0) = -j\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_1 \int_{R_1}^{R_2} \sum_n \frac{2\pi}{\eta_n^c (k_n^c)^2} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_n^c(r)) \frac{\partial}{\partial r'} (\chi_n^c(r')) \frac{r'}{\gamma_{0,n}^c} \times$$

$$\times \left[ E_r(r', z_0) \operatorname{csh}(\gamma_n^c \Delta z_1) - E_r(r', z_1) \operatorname{cth}(\gamma_n^c \Delta z_1) \right] dr'. \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) позволяют составить интегральное уравнение для источника  $E_r(r, z_1)$ :

$$\int_{R_1}^{R_2} E_r(z_1, r') \left[ \dot{\varepsilon}_2 \dot{S}_3(r, r') + \dot{\varepsilon}_1 \dot{S}_2(r, r') \right] r' dr' = \dot{\varepsilon}_1 \int_{R_1}^{R_2} E_r(z_0, r') \dot{S}_1(r, r') r' dr', \quad (7)$$

$$\text{где } \dot{S}_1(r, r') = \sum_n \frac{2\pi r' E_r(r', z_0) \operatorname{csh}(\gamma_n^c \Delta z_1)}{\eta_n^c (k_n^c)^2 \gamma_n^c} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_n^c(r)) \frac{\partial}{\partial r'} (\chi_n^c(r'));$$

$$\dot{S}_2(r, r') = \sum_n \frac{2\pi r' E_r(r', z_0) \operatorname{cth}(\gamma_n^c \Delta z_1)}{\eta_n^c (k_n^c)^2 \gamma_n^c} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_n^c(r)) \frac{\partial}{\partial r'} (\chi_n^c(r'));$$

$$\dot{S}_3(r, r') = \int_0^\infty J_1(\kappa r) J_1(\kappa r') \frac{\kappa}{\gamma_2(\kappa)} d\kappa.$$

При решении этого уравнения степень приближения конечных результатов будет определяться только эвристическим заданием распределения  $E_r(z_0, r')$ . Для получения точного решения необходимо продолжить процедуру «сшивания» полей на границах изменения сечений резонатора ниже плоскости заданного поля (рисунок, *a*). Как указано выше, наибольшую практическую ценность представляют сенсоры с малой апертурой  $R_2 \ll \lambda$ , поэтому уравнения (7) будет достаточно для описания характеристик большинства конструкций. Тем не менее, рассмотрим в общих чертах подходы к строгому решению.

Пусть ниже  $z_0$  будет расположена индуктивная часть длиной  $\Delta z_L$ , у которой сечение и заполнение будет такое же, как и на участке  $\Delta z_1$  (рисунок, *a*), и которая заканчивается плоской проводящей стенкой. Тогда магнитные компоненты над и под сечением  $z = z_0$  будут определяться как

$$H_\varphi(r, z_0 + 0) = -j\omega \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_1 \int_{R_1}^{R_2} \sum_n \frac{2\pi}{\eta_n^c (k_n^c)^2} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_n^c(r)) \frac{\partial}{\partial r'} (\chi_n^c(r')) \frac{r'}{\gamma_{0,n}^c} \times \\ \times \left[ E_r(r', z_0) \operatorname{cth}(\gamma_n^c \Delta z_1) - E_r(r', z_1) \operatorname{csh}(\gamma_n^c \Delta z_1) \right] dr'. \quad (8)$$

$$H_\varphi(r, z_0 - 0) = -j\omega \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_1 \int_{R_1}^{R_2} \sum_n \frac{2\pi}{\eta_n^c (k_n^c)^2} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_n^c(r)) \frac{\partial}{\partial r'} (\chi_n^c(r')) \frac{r'}{\gamma_{0,n}^c} \times \\ \times \left[ 0 - E_r(r', z_0) \operatorname{cth}(\gamma_n^c \Delta z_L) \right] dr'. \quad (9)$$

Приравнявая (8) и (9) и используя (7) получим строгое уравнение для  $E_r(z_1, r')$ :

$$\int_{R_1}^{R_2} E_r(z_1, r') \left[ \dot{\varepsilon}_2 \dot{S}_3(r, r') + \dot{\varepsilon}_1 \dot{S}_2(r, r') - 0,5 \cdot \dot{\varepsilon}_1 \operatorname{sch}(\gamma_n^c \Delta z_1) \dot{S}_1(r, r') \right] r' dr' = 0. \quad (10)$$

Нетривиальное решение даст выражение распределения  $E_r(z_1, r')$  для заданной частоты  $\omega$ . Однако такой подход будет неудобен. При расчете реальных измерителей требуется конкретно задать все элементы конструкции. А с другой стороны, он будет избыточен, так как для резонаторного измерителя при расчете параметров ОКС с  $R_2 \ll \lambda$ , в широком диапазоне частот достаточно знать эквивалентную емкость апертуры. Поэтому далее воспользуемся

выражением (7), и при дальнейших исследованиях будем пользоваться приближением заданного поля.

### Решение интегрально уравнения

Алгебраизацию (7) можно провести путем представления  $E_r(z_1, r')$  в виде разложения по ортонормированному базису функций  $\frac{\partial}{\partial r}(\chi_n^c(r))(\eta_n^c)^{-\frac{1}{2}}$  с коэффициентами  $e_n$ . В этой же системе необходимо представить и  $\dot{S}_3(r, r')$ , где каждый из ее аргументов  $r$  и  $r'$  изменяются в интервалах  $[R_1, R_2]$ . Результат вычислений представлен матрицей коэффициентов  $a_{m,n}$ . В данном случае нумерация коэффициентов  $a_{m,n}$  соответствует нумерации функций базиса. На физическом уровне этот процесс соответствует трансформации гармоник поля в коаксиальной линии в волны свободного пространства. Суммы  $\dot{S}_1(r, r')$  и  $\dot{S}_2(r, r')$  в (7) изначально представлены функциями базиса. Поэтому определение коэффициентов для них дополнительных вычислений не потребует. Сумма  $\dot{S}_1(r, r')$  в системе алгебраических уравнений трансформируется в матрицу-столбец  $d_m$ . Сумма  $\dot{S}_2(r, r')$  – в диагональную матрицу  $b_{m,n}$ . В ней в случае  $n \neq m$  коэффициенты равны нулю в силу ортогональности функций базиса.

Таким образом, после подстановок и интегрирования в (7) получаем систему алгебраических уравнений относительно  $e_n$  вида

$$e_n(a_{m,n} + b_{m,n}) = u_m d_m, \quad (11)$$

где  $u_m$  – коэффициенты разложения  $E_r(z_0, r')$  по базису цилиндрических функций.

Так как выше было принято, что  $E_r(z_0, r) = U_0 r^{-1}$ , то в свободном столбце будет иметь ненулевое значение только первый элемент.

Расчет значений  $e_n$  на основании (11) даст распределение составляющих источника  $E_r(z_1, r')$  в плоскости апертуры.

### Выводы

Аналитическое описание позволяет на качественном уровне оценить вклад физических факторов, обосновать поведение результирующих характеристик, построить систему критериев оценки качества, оптимизировать конструкции сенсоров.

Относительно методик расчета можно сказать следующее. Строгое решение для реальных конструкций потребует существенного усложнения аналитической процедуры. Но для расчета конкретных конструкций более эффективно использовать современное ПО, основанное на численных методах. Для исследования и оценки параметров сенсора в первом приближении необходимо тщательно выбирать распределение поля исходного источника, в частности поля ТЕМ моды в бесконечной коаксиальной линии. Причем этот расчет можно сделать достаточно точным, если задание поля сделать в плоскости, расположенной в глубине коаксиальной линии. Но это потребует тщательного анализа свойств ядра интегрального уравнения, оценки вклада высших гармоник исходного и результирующих полей, ряда других факторов.

*Данная работа выполнена благодаря поддержке со стороны проектов No. XDB2014-18 и No. NDJY15Z13 Хэйлунцзянского Бауи аграрного университета (КНР).*

**Список литературы:** 1. Щеголева, Т.Ю. Исследование биологических объектов в миллиметровом диапазоне радиоволн / Т.Ю. Щеголева. – К. : Наук. думка, 1996. – 182 с. 2. Гордиенко, Ю. Е. Свойства четвертьволнового коаксиального СВЧ измерительного преобразователя для диагностики материалов

/ Ю.Е. Гордиенко, В.В. Петров, Д.А. Полетаев. // Радиотехника. – 2008. – № 154. – С. 61 – 66. 3. *Слипченко, Н.И.* Чувствительность СВЧ резонаторных измерительных преобразователей для микроволновой микроскопии / Н.И. Слипченко, Ю.Е. Гордиенко, В.В. Петров // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 3. – С. 24-27. 4. *Гордиенко, Ю.Е.* Приближение заданного поля в задачах определения характеристик резонаторных СВЧ-датчиков апертурного типа / Ю.Е. Гордиенко, А.Ю. Панченко, Р.С. Фар // Радиотехника. – 1998.– Вып. 107. – С. 93-103. 5. *Никольский, В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.– 544 с. 6. *Панченко, Б.А.* Тензорные функции Грина уравнений Максвелла для цилиндрических областей / Б.А. Панченко // Радиотехника. – 1970. – Вып. 15. – С. 82–91. 7. *Tai, C.T.* Dyadic Green's functions for a coaxial line / С. Т. Tai. // IEEE Trans. of Antennas and Propagation. – 1983. – Vol. 48, N 2. – P. 355–358.

*Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники*

*Поступила в редколлегию 11.10.2015*