

*В.А. ДОРОШЕНКО, д-р физ.-мат. наук, С.Н. ИЕВЛЕВА, канд. техн. наук,
Н.П. КЛИМОВА, канд. техн. наук, А.С. НЕЧИПОРЕНКО, канд. техн. наук,
А.А. СТРЕЛЬНИЦКИЙ*

РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ НАГРУЖЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ЩЕЛЕВОЙ АНТЕННЫ МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Одной из важных компонент научно-технического прогресса является исследование процессов взаимодействия полей с объектами различной физической природы. Электромагнитные волны находят свое наиболее широкое применение, что объясняется интенсивным развитием антенной техники, радиолокации, средств радиоэлектронной борьбы и мониторинга пространства, радиоуправлением и т.д. [1 – 3]. Широкополосные и сверхширокополосные антенны занимают особое место в мире современных антенн в силу их обширного применения в разных областях науки и техники. К таким антеннам относятся и те, поверхности которых имеют характерные угловые геометрические параметры (конусы, биконусы, клинья, плоские угловые секторы и т.д.). В работах [4 – 6] рассмотрены модельные задачи дифракции волн на сплошных идеально проводящих или импедансных конусах. Задачи дифракции волн на биконусах и конусах с поперечными щелями исследовались в [7, 8]. Математические модели дифракции волн на плоском угловом секторе предложены в [9].

Цель работы – исследование модельной задачи возбуждения нагруженной конической щелевой антенны, построение математической модели и решение соответствующей краевой задачи для конической структуры с периодически прорезанными вдоль образующих щелями методом сингулярных интегральных уравнений (СИУ). Метод СИУ [10, 11] обладает более широким спектром применения для решения модельных задач дифракции волн на периодических структурах по сравнению с методом сопряжения. Другие методы решения модельных задач дифракции на периодических решетках проигрывают методу сопряжения. Однако при исследовании задач дифракции на многоэлементных периодических решетках возникают существенные трудности с использованием метода сопряжения, а метод СИУ в этом случае имеет определенные преимущества и достоинства. Поэтому развитие метода СИУ для решения модельных задач электродинамики является актуальным, в частности для решения модельной задачи возбуждения нагруженной щелевой конической антенны.

Математическая модель возбуждения конической щелевой антенны

Известно, что для решения краевых или начально-краевых модельных электродинамических задач с конической или сферической геометрией удобно использовать скалярные функции (потенциалы Дебая), через которые выражаются составляющие искомого электромагнитного поля [12]. Вследствие введения потенциалов Дебая и математическая задача сводится к нахождению потенциала u , который является решением краевой или начально-краевой задачи математической физики для волнового уравнения [13]. Рассматриваемая коническая структура Σ представляет собой полубесконечный круговой конус с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями ($C\Sigma$), поверхностные свойства которого определяются скалярными параметрами ξ_1, ζ_1 . Эти параметры могут зависеть как от пространственных координат введенной системы координат, так и от времени. Для определенности считаем, что участвующие в процессе электромагнитные поля меняются во времени по гар-

моническому закону, а параметры ξ_1, ζ_1 не зависят от времени. Через 2γ обозначим угол раскрыва конуса Σ , d ширину щелей, $l = 2\pi/N$ период конической структуры (рис. 1). Ширина щелей d и период l являются угловыми величинами, равными величинам соответствующих двугранных углов, образованных плоскостями, которые проведены через ось конуса и ребра соседних конических секторов. Поскольку конус является координатной поверхностью сферической системы координат, введем эту систему координат r, θ, φ с началом в вершине конуса ($r=0$), в которой конус определяется уравнением $\theta = \gamma$. Точечный источник поля помещен в точку $B_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Математическая задача заключается в нахождении потенциала $u(\vec{r}), \vec{r} = (r, \theta, \varphi), u$ удовлетворяющего:

1) уравнению Гельмгольца всюду вне поверхности конуса Σ и источника –

$$\Delta u - q^2 u = 0, \quad q - \text{волновой параметр};$$

2) краевому условию на поверхности конуса Σ :

$$\xi \left(\frac{\partial \chi^{-1} u}{\partial n \chi^{-1}} \Big|_{\Sigma^+} - \alpha \frac{\partial \chi^{-1} u}{\partial n \chi^{-1}} \Big|_{\Sigma^-} \right) + \zeta_1 \left(\frac{\partial^{2-\chi} u}{\partial n^{2-\chi}} \Big|_{\Sigma^+} - \beta \frac{\partial^{2-\chi} u}{\partial n^{2-\chi}} \Big|_{\Sigma^-} \right) = g, \quad (1)$$

$$\text{где } \Sigma = \{ (r, \theta, \varphi) \in R^3 : r \in [0, +\infty), \theta = \gamma, \varphi \in L \},$$

$$\Sigma^+ = \{ (r, \theta, \varphi) \in R^3 : r \in [0, +\infty), \theta = \gamma + 0, \varphi \in L \},$$

$$\Sigma^- = \{ (r, \theta, \varphi) \in R^3 : r \in [0, +\infty), \theta = \gamma - 0, \varphi \in L \},$$

$$L = \bigcup_{s=1}^N L_s, L_s = ((s-1)l + d/2, sl - d/2), \chi = 1; 2, \quad \xi = \xi(r, \varphi), \quad \zeta_1 = \zeta_1(r, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial n} - \text{производная}$$

потенциала $u(\vec{r})$ в направлении внешней нормали \vec{n} к поверхности конуса Σ (нормальная производная), $g(\vec{r})$ – известная функция и $\alpha, \beta \in R$;

3) условию ограниченности энергии (поскольку коническая поверхность имеет вершину и кромки щелей) $\int_D (|u|^2 + |\nabla u|^2) dV < \infty$;

4) условию на бесконечности.

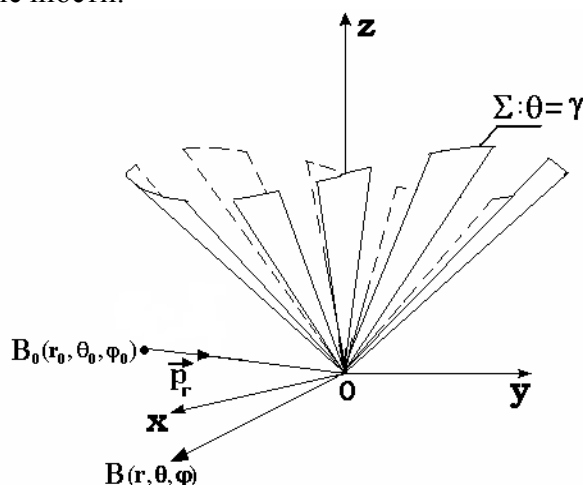


Рис. 1

Краевая задача математической физики в такой постановке имеет единственное решение [14]. Следует отметить, что интересными для практических приложений являются математические модели с такими частными случаями краевого условия (1):

$$1) \left. \frac{\partial^{\chi-1} u}{\partial n^{\chi-1}} \right|_{\Sigma} = 0 \text{ – краевое условие модельной задачи возбуждения конической щелевой}$$

антенны, стенки которой изготовлены из материала с высокой степенью проводимости;

$$2) \left. \frac{\partial^{\chi-1} u}{\partial n^{\chi-1}} + \zeta_1 \frac{\partial^{2-\chi} u}{\partial n^{2-\chi}} \right|_{\Sigma} = 0 \text{ – краевое условие модельной задачи возбуждения кониче-}$$

ской щелевой антенны, стенки которой изготовлены из материала с высокой степенью проводимости и покрыты изнутри и извне пленкой одной природы;

$$3) \left. \frac{\partial^{\chi-1} u}{\partial n^{\chi-1}} + \zeta_1 \frac{\partial^{2-\chi} u}{\partial n^{2-\chi}} \right|_{\Sigma^+} = 0, \left. \frac{\partial^{\chi-1} u}{\partial n^{\chi-1}} + \zeta_2 \frac{\partial^{2-\chi} u}{\partial n^{2-\chi}} \right|_{\Sigma^-} = 0 \text{ – краевые условия модельной}$$

задачи возбуждения конической щелевой антенны, стенки которой изготовлены из материала с высокой степенью проводимости и покрыты изнутри и извне пленкой разной природы;

$$4) \left. \frac{\partial^{\chi-1} u}{\partial n^{\chi-1}} + \zeta_3 \left(\left. \frac{\partial^{2-\chi} u}{\partial n^{2-\chi}} \right|_{\Sigma^+} - \left. \frac{\partial^{2-\chi} u}{\partial n^{2-\chi}} \right|_{\Sigma^-} \right) \right|_{\Sigma} = 0, \left. \frac{\partial^{\chi-1} u}{\partial n^{\chi-1}} - \frac{\partial^{2-\chi} u}{\partial n^{2-\chi}} \right|_{\Sigma^-} = 0 \text{ – краевые условия}$$

модельной задачи возбуждения конической щелевой антенны, стенки которой изготовлены из полупрозрачной или резистивной тонкой пленки. Полупрозрачная пленка – предельный случай густой решетки [15] с характерным, имеющим действительные значения параметром прозрачности, а резистивная пленка характеризуется импедансным комплексным параметром.

Искомый потенциал u представим в виде

$$u = u_0 + u_1,$$

где

$$u_0 = \exp(-q|r - r_0|) / 4\pi r_0 |r - r_0|$$

соответствует полю источника (первичное поле), а потенциал u_1 обусловлен наличием конуса и соответствует вторичному полю. Для решения сформулированной краевой задачи используем интегральные преобразования Конторовича – Лебедева [16], краевое условие (1) и условия непрерывности потенциала и его частных производных в щелях ($\varphi \in C\Sigma$). Представим искомый потенциал u_1 в виде

$$u_1 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{m\tau} U_{m\tau}^{(1)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (2)$$

$$U_{m,i\tau}^{(\chi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n+m_0}^{(\chi)}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \theta)}{\frac{d\chi^{-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \gamma)} e^{i(nN+m)\varphi}, \quad (3)$$

где $K_{i\tau}(qr)$ – функция Макдональда, $P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \theta)$ – функция Лежандра 1-го рода, $b_{m\tau}$ – известные, а $x_{m,n+m_0}$ – неизвестные коэффициенты; $m/N = m_0 + \nu$, m_0 – ближайшее к m/N целое число, $-1/2 \leq \nu < 1/2$. Верхние знаки у аргументов функция Лежандра соответствуют области $0 < \theta < \gamma$, а нижние – $\gamma < \theta < \pi$.

Сингулярные интегральные уравнения

Получим сингулярные интегральные уравнения для определения коэффициентов $x_{m,n+m_0}$ в частном случае – тонких конических секторов с высокой степенью проводимости (идеально проводящие секторы) и тонких конических секторов из полупрозрачной пленки.

Первое краевое условие на конических секторах ($\chi = 1$). В этом случае для идеально проводящего конуса краевое условие имеет вид

$$u|_{\Sigma} = 0. \quad (4)$$

Использование краевого условия (4) и условия непрерывности частных производных потенциала (2) в щелях приводит к системе функциональных уравнений относительно $x_{m,n}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad S: \pi d/l < |N\varphi| \leq \pi, \quad (5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) x_{m,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = 0, \quad CS: |N\varphi| < \frac{\pi d}{l}. \quad (6)$$

$$(N(n+\nu)) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_n^{(1)}) = \frac{(-1)^{(n+\nu)N} ch\pi\tau}{\pi} \frac{\Gamma(1/2 + i\tau + (n+\nu)N)}{\Gamma(1/2 + i\tau - (n+\nu)N)} \times \\ \times \frac{1}{P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos\gamma) P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos\gamma)}.$$

Введем коэффициенты $y_{m,n}$, связанные с искомыми коэффициентами $x_{m,n}$:

$$y_{m,n}^{(1)} = N(n+\nu) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) x_{m,n}^{(1)}. \quad (7)$$

Тогда система уравнений (5), (6) запишется в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1 - \delta_{m,n}^{(1)}) y_{m,n}^{(1)} e^{in\psi} = e^{im_0\psi}, \quad S: \pi d/l < |\psi| \leq \pi, \quad (8)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_{m,n}^{(1)} e^{in\psi} = 0, \quad CS: |\psi| < \frac{\pi d}{l}, \quad (9)$$

здесь $\psi = N\varphi$, $\delta_{m,n}^{(1)} = -\frac{\varepsilon_{m,n}^{(1)}}{1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}}$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_{m,n}^{(1)} e^{in\psi}, \quad \psi \in [-\pi, \pi], \quad (10)$$

Неизвестные коэффициенты $y_{m,n}^{(1)}$ (7) являются коэффициентами Фурье функции $\Phi_1(\psi)$ (10) и определяются по формуле

$$y_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(\psi) e^{-in\psi} d\psi. \quad (11)$$

Следовательно, решение исходной первой краевой задачи сводится к задаче о нахождении функции $\Phi_1(\psi)$. Найдем уравнение, которому удовлетворяет искомая функция $\Phi_1(\psi)$.

Для этой цели воспользуемся уравнением (8), подставив в него интегральное представление для $y_{m,n}$ (11), и получим

$$y_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_S \Phi_1(\psi) e^{-in\psi} d\psi,$$

учитывая, что $\Phi_1(\psi) = 0$, $\psi \in CS$ в соответствии с (9). В результате приходим к сингулярному интегральному уравнению для Φ_1 :

$$\frac{1}{2\pi} \int_S F(\psi - \alpha) \Phi_1(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S \left[A_{m\tau}^{(1)} - K(\psi - \alpha) \right] \Phi_1(\alpha) d\alpha = e^{im_0\psi}, \psi \in S, \quad (12)$$

где

$$F(\psi - \alpha) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{N(n + \nu)} \frac{|n|}{n} e^{in(\psi - \alpha)}, \quad (13)$$

$$K(\psi - \alpha) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{N(n + \nu)} \frac{|n|}{n} \delta_{m,n}^{(1)} e^{in(\psi - \alpha)}, \quad (14)$$

$$A_{m\tau}^{(1)} = \frac{1}{N(n + \nu)} \frac{|n|}{n} \left(1 - \delta_{m,n}^{(1)} \right) \Big|_{n=0}.$$

Функция $F(\psi - \alpha)$ (13) определяет сингулярную часть интегрального уравнения (12), а $K(\psi - \alpha)$ (14) является ядром регулярной части этого уравнения.

В частном случае, когда $\nu = 0$, СИУ (12) имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \ln \left| 2 \sin \frac{\psi - \alpha}{2} \right| \Phi_1(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S \hat{K}_{m\tau}(\psi - \alpha) \Phi_1(\alpha) d\alpha = -e^{im_0\psi}, \psi \in S, \quad (15)$$

$$\hat{K}_{m\tau}(\psi - \alpha) = K(\psi - \alpha) - A_{m\tau}^{(1)}.$$

Сингулярные интегральные уравнения (14), (15) определены на лентах конуса, а функция Φ_1 определяет плотность поверхностного тока, наведенного на конических секторах.

Смешанное краевое условие на конических секторах ($\chi = 1$). Пусть на лентах решетки заданы такие краевые условия

$$u|_{\Sigma} + \zeta_1 \left[\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma^+} - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma^-} \right] = 0, \quad (16)$$

$$u|_{\Sigma^+} = u|_{\Sigma^-}. \quad (17)$$

Полагая в (16) $\zeta_1 = 0$, приходим к первому краевому условию (4). Во введенной сферической системе координат краевое условие (16) записывается так

$$u|_{\theta=\gamma} + \zeta \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma+0} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma-0} \right] = 0, \quad (18)$$

где $\zeta_1 = r\zeta$. В результате использования краевых условий (17), (18) получаем систему функциональных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - \frac{2\zeta}{\sin \gamma} N(n + \nu) \frac{|n|}{n} \left(1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)} \right) \right\} \hat{x}_{m,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad S: \pi d/l < |N\varphi| \leq \pi, \quad (19)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} N(n + \nu) \frac{|n|}{n} \left(1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)} \right) \hat{x}_{m,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = 0, \quad CS: |N\varphi| < \frac{\pi d}{l}. \quad (20)$$

Введение коэффициентов $\hat{y}_{m,n}^{(1)}$ по формуле

$$\hat{y}_{m,n}^{(1)} = N(n + \nu) \frac{|n|}{n} \left(1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}\right) \hat{x}_{m,n}^{(1)} \quad (21)$$

приводит (19), (20) к виду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N(n + \nu)} \frac{|n|}{n} \left(1 - \delta_{m,n}^{(1)}\right) \hat{y}_{m,n}^{(1)} e^{in\psi} - \frac{2\zeta}{\sin \gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{m,n}^{(1)} e^{in\psi} = e^{im_0\psi}, \quad S: \pi d/l < |\psi| \leq \pi,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{m,n}^{(1)} e^{in\psi} = 0, \quad CS: |\psi| < \frac{\pi d}{l},$$

После введения функции

$$\Phi^{(1)}(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{m,n}^{(1)} e^{in\psi}, \quad \psi \in [-\pi, \pi] \quad (22)$$

и использования алгоритма сведения функциональных уравнений к СИУ, приведенного в случае первого краевого условия, получаем СИУ в случае смешанного краевого условия (16)

для искомой функции $\Phi^{(1)}(\psi)$ (22), связанной с коэффициентами $\hat{y}_{m,n}^{(1)}$ (21):

$$\frac{1}{2\pi} \int_S F(\psi - \alpha) \Phi^{(1)}(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S \left[A_{m\tau}^{(1)} - K(\psi - \alpha) \right] \Phi^{(1)}(\alpha) d\alpha -$$

$$- \frac{2\zeta}{\sin \gamma} \Phi^{(1)}(\psi) = e^{im_0\psi}, \quad \psi \in S, \quad (23)$$

где $F(\psi - \alpha)$ и $K(\psi - \alpha)$ определены в (13), (14). При $\nu = 0$ СИУ (23) приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \ln \left| 2 \sin \frac{\psi - \alpha}{2} \right| \Phi^{(1)}(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S \hat{K}_{m\tau}(\psi - \alpha) \Phi^{(1)}(\alpha) d\alpha +$$

$$+ \frac{2\zeta}{\sin \gamma} \Phi^{(1)}(\psi) = -e^{im_0\psi}, \quad \psi \in S \quad (24)$$

Полагая в (23) $\zeta = 0$, получаем СИУ (12) в частном случае первого краевого условия на лентках конуса (4). Процедура численной реализации решения СИУ (12), (15), (23), (24) может быть проведена на основе использования, например, метода дискретных особенностей [11].

Возбуждение сосредоточенным источником полупрозрачного конуса с продольными щелями

Рассмотрим модельную задачу осесимметричного возбуждения электрическим радиальным диполем с моментом $\vec{P}_r(\vec{r}, t) = \vec{i}_r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) e^{-i\omega t}$ для полубесконечного кругового конуса с периодическими продольными щелями (рис.1), где $\vec{i}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$. Точечный источник электромагнитного поля находится вне и на оси конуса ($\theta_0 = \pi$).

Данная полупрозрачная коническая поверхность с параметром прозрачности $W > 0$ обладает свойством пропускать и отражать падающее на нее поле источника \vec{E}_0, \vec{H}_0 . Задача заключается в нахождении поля \vec{E}_1, \vec{H}_1 , обусловленного присутствием конуса с продольными щелями Σ . Полное поле

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1$$

удовлетворяет:

- 1) уравнениям Максвелла вне полупрозрачного конуса и источника;
- 2) краевым условиям на поверхности конуса:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \left(\hat{n} \times \left(\hat{E}^+ + \hat{E}^- \right) \right) &= Z \hat{n} \times L \left(\hat{H}^+ - \hat{H}^- \right), \\ \hat{n} \times \hat{E}^+ &= \hat{n} \times \hat{E}^-, \end{aligned}$$

где $\hat{E}^\pm = \hat{E}|_{\theta=\gamma \pm 0}$, $Z = \frac{2w}{q} W \sin \gamma$, $q = -ik$, $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$, $w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ – волновое сопротивление среды, ε и μ – проницаемости среды, в которую помещен незамкнутый полупрозрачный конус, \hat{n} – внешняя нормаль к поверхности конуса Σ , $L V = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) (rV)$;

- 3) условию на бесконечности в пространстве;
- 4) условию ограниченности энергии.

Краевая электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение [14]. Использование потенциала Дебая u , через который по известным формулам выражаются составляющие электромагнитного поля, сводит решение поставленной краевой электродинамической задачи к решению смешанной краевой задачи математической физики 1) – 4) для потенциала u с такими краевыми условиями:

$$u|_{\theta=\gamma} - W \sin \gamma \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma+0} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma-0} \right] = 0, \quad (25)$$

$$u|_{\theta=\gamma+0} = u|_{\theta=\gamma-0}. \quad (26)$$

Полагая в (25) $(-W \sin \gamma) = \zeta$, получаем краевое условие (18), а условие (26) совпадает с (17). Таким образом, принимая во внимание представления (2), (3) и учитывая расположение источника на оси конуса ($m=0, \nu=0$), для нахождения

$$\Phi^{(1)}(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{0,n}^{(1)} e^{in\psi}, \quad \psi \in [-\pi, \pi]$$

имеем СИУ вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_S \ln \left| 2 \sin \frac{\psi - \alpha}{2} \right| \Phi^{(1)}(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S \hat{K}_{0\tau}(\psi - \alpha) \Phi^{(1)}(\alpha) d\alpha - \\ - 2W \Phi^{(1)}(\psi) = -1, \quad \psi \in S \\ \hat{y}_{0,n}^{(1)} = N |n| \left(1 - \varepsilon_{0,n}^{(1)} \right) \hat{x}_{0,n}^{(1)}, \\ u_1 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{0\tau} U_{0\tau}^{(1)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \\ U_{0,i\tau}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{0,n}^{(1)}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\pm \cos \gamma)} e^{inN\varphi}. \end{aligned} \quad (27)$$

Интерес представляет выяснение влияния щелей на электродинамические характеристики рассматриваемой модели конической антенны. Для решения соответствующей краевой задачи проведен численный эксперимент и найдено численное решение СИУ (27) методом дискретных особенностей [11, 17, 18]. На основе полученного численного решения СИУ изучено распределение рассеянного конусом с продольными щелями поля в волновой зоне ($qr \gg 1$). Составляющие рассеянного конусом электрического поля в волновой зоне определяются так (приведены главные члены асимптотического разложения составляющих электрического поля при $qr \gg 1$):

$$\hat{E}_\theta^{(1)} = \frac{e^{qr}}{r} F_\theta(\theta, \varphi, \gamma, d), \quad \hat{E}_\varphi^{(1)} = \frac{e^{qr}}{r} F_\varphi(\theta, \varphi, \gamma, d),$$

где $F_\theta(\theta, \varphi, \gamma, d)$, $F_\varphi(\theta, \varphi, \gamma, d)$ – функции, описывающие поле в волновой зоне, равные соответственно

$$F_\theta(\theta, \varphi, \gamma, d) = \text{Const} \frac{e^{qr}}{r} \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{\frac{\pi \tau}{2}} K_{i\tau}(qr_0) \times$$

$$\times P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{(1)}(\tau) \frac{d}{d\theta} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{-Nn}(-\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{-Nn}(-\cos \gamma)} 2 \cos Nn\varphi + x_0^{(1)}(\tau) \frac{-P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma)} \right) d\tau,$$

$$F_\varphi(\theta, \varphi, \gamma, d) = \text{Const} \frac{e^{qr}}{r} \frac{1}{\sin \theta} \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{\frac{\pi \tau}{2}} K_{i\tau}(qr_0) \times$$

$$\times P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \sum_{n=1}^{+\infty} n x_n^{(1)}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{-Nn}(-\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{-Nn}(-\cos \gamma)} \sin Nn\varphi d\tau.$$

На рис. 2 приведены диаграммы нормированного распределения поля для разного количества числа щелей в азимутальной плоскости.

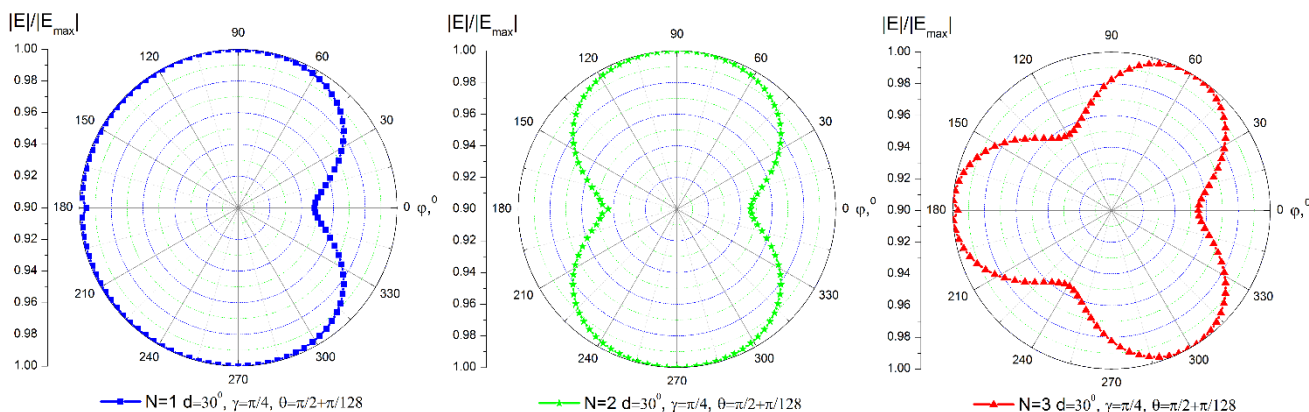


Рис. 2

Для конуса с одной продольной щелью ($N=1$) диаграмма имеет форму кардиоиды, а середина впадины диаграммы приходится на середину щели. При увеличении числа щелей диаграмма приобретает многолепестковый характер ($N=2$, $N=3$).

Заключение

Предложена математическая модель процесса возбуждения конической нагруженной щелевой антенны. Математическая задача является краевой задачей математической физики для уравнения Гельмгольца относительно скалярного потенциала со смешанными краевыми условиями для конической поверхности с периодическими продольными щелями. Использование аппарата интегральных преобразований Конторовича – Лебедева позволило свести модельную краевую задачу к сингулярному интегральному уравнению, определенному на конических секторах. В случае первого краевого условия (для идеально проводящего конуса с продольными щелями), а также при осесимметричном расположении источника поля ядро СИУ является логарифмом. Рассмотрена модельная задача осесимметричного возбуждения полубесконечного кругового конуса с продольными периодическими щелями радиальным электрическим диполем, которая является эквивалентной СИУ с логарифмическим ядром.

На основании численного решения СИУ, полученного методом дискретных особенностей, изучено пространственное распределение электрического поля для разного числа щелей. На основании данных диаграмм пространственного распределения поля можно судить о рассеивающих и фокусирующих свойствах конуса с продольными щелями. В случае возбуждения конуса с одной продольной щелью диаграмма рассеяния в азимутальной плоскости имеет форму кардиоиды, что представляет особенный интерес для практических приложений при создании современных радиотехнических устройств. Полученные результаты могут быть эффективно использованы при построении математических моделей взаимодействия электромагнитных полей с объектами различной природы, в современной теории антенн, радиолокации, спутниковой связи, в теории электромагнитной совместимости, метаматериалах, при проектировании измерительных приборов и приборов электромагнитной диагностики и контроля.

Список литературы: 1. *Balanis C.A. Antenna Theory: Analysis and Design/ Constantine A. Balanis // 4th Edition. Wiley. 2016. – 1096p.* 2. *Weston D. Electromagnetic Compatibility: Principles and Applications/ CRC Press. – 2001. – 864p.* 3. *Перунов Ю.М. Радиозлектронное подавление информационных каналов систем управления оружием / Ю.М. Перунов, К.И. Фомичев, Л.М. Юдин. – М. : Радиотехника, 2003. – 416 с.* 4. *Shanin A. V. Asymptotics of waves diffracted by a cone and diffraction series on a sphere // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol.185, Issue 4. – pp 644-657.* 5. *Lyalinov M.A. Acoustic scattering of a plane wave by a circular penetrable cone // WaveMotion, vol. 48, 2011. – p. 62-82.* 6. *Bernard J. M. L. Advanced Theory of the Diffraction by a Semi Infinite Impedance Cone // Alpha Science International, Limited, 2014. – 170p.* 7. *Kuryliak D. B., Trishchuk O. B. Modeling of intrinsic and transfer conductances of narrow grooves on the surface of the finite cone under axisymmetric electromagnetic excitation // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 184, Issue 2. – P. 208 – 214.* 8. *Sharabura O. M., Kuryliak, D. B. Axially-symmetric Excitation of Bicone Formed by Semi-infinite and semi-infinite truncated cones // Radiophysics and radio-astronomy (Radiofizika i Radioastronomiya). – 2015. – Vol. 20, No., 1, – P. 76 – 85.* 9. *Lyalinov M.A. Electromagnetic scattering by a plane angular sector: I. Diffraction coefficients of the spherical wave from the vertex // Wave Motion Volume 55, June 2015, Pages 10–34.* 10. *Morita N. Integral equations methods for electromagnetics / N. Morita, N. Kumagai, J.R. Mautz // Boston, Artech House. – 1990. – 312 p.* 11. *Lifanov I.K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices. – Utrecht, the Netherlands ; Tokyo, Japan : VSP, 1996. – 475 p.* 12. *Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М. : Радио и связь, 1988. – 440с.* 13. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М. : Высш. шк., 1970. – 712с.* 14. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. – М. : Высш. шк., 1991. – 224с.* 15. *Войтович Н.Н., Каценельбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. – М. : Наука, 1977. – 416с.* 16. *Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 359с.* 17. *Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И., Стешенко С.А. Строгий электродинамический анализ резонаторных систем коаксиальных гиротронов // Журнал технической физики. – 2004. – Т.74, №7. – С.81-89.* 18. *Nosich A.A. Numerical analysis of quasioptical multi-reflector antennas in 2-D with the method of discrete singularities / A.A.Nosich, Y.V.Gandel // IEEE Transactions on antennas and Propagation. – 2007. – vol.57, no. 2. – P.393-406.*

*Харьковский национальный
университет радиозлектроники*

Поступила в редколлегию 20.06.2016