УДК 537.86.42

Ю.В. РАССОХИНА, канд. физ.-мат. наук, В.Г. КРЫЖАНОВСКИЙ, д-р техн. наук

МЕТОД АНАЛИЗА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ПОЛОСКОВО-ЩЕЛЕВЫХ СТРУКТУРАХ. ЧАСТЬ 1: АНАЛИЗ СКАЧКА ШИРИНЫ В МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ МЕТОДОМ ПОПЕРЕЧНОГО РЕЗОНАНСА

Введение

Существующие методики расчета скачка ширины в полосковой линии передачи разрабатывались достаточно давно, в 80-е годы прошлого столетия. Помимо традиционного метода согласования мод исследователи использовали различные приближенные методики анализа такой неоднородности [1 - 5]. Для классической ступенчатой неоднородности метод согласования мод с использованием формализма обобщенных матриц рассеяния обеспечивает требуемую при проектировании фильтрующих устройств точность расчета. Однако в современных планарных микроволновых схемах используются элементы вида defected ground plane, то есть отверстия различной формы в металлизированной подложке. В этих случаях метод согласования мод уже не применим, поскольку такие неоднородности не описываются в рамках плоско-поперечных стыков. Нами в [6, 7] была предложена техника анализа скачка ширины в микрополосковой линии передачи методом поперечного резонанса, в которой для алгебраизации краевой задачи использовалось разложение электромагнитного поля в плоскости микрополосковой линии передачи (в области между линией передачи и экраном) по базисным функциям волновода сложного сечения (П- или Г-образного, в зависимости от граничных условий). Несмотря на высокую точность расчета, недостатком этого алгоритма является зависимость решения для спектра собственных частот резонатора с неоднородностью от частоты и числа учитываемых Н- и Е-волн в окне связи на границе раздела сред. Чем ниже частота – тем большее число волн требовалось учесть, чтобы получить гладкую кривую для спектра собственных частот резонатора.

Целью данного исследования является усовершенствование методики анализа скачка ширины в микрополосковой линии передачи конечной длины методом поперечного резонанса. Предлагаемый способ алгебраизации краевой задачи на собственные частоты резонатора основан на выражении плотности тока в неоднородной полосковой линии передачи через векторные потенциалы, которые определяются в терминах собственных функций волноводов сложного сечения с прямоугольными координатными границами. В перспективе, такая техника алгебраизации позволяет расширить круг решаемых задач до трехмерных планарных структур со щелевыми неоднородностями в заземляющей плоскости.

Постановка и решение краевых задач методом поперечного резонанса

Рассмотрим для начала обычный скачок ширины в микрополосковой линии передачи с w_1 на w_2, рис. 1 (вид сверху и поперечное сечение двухслойной планарной структуры). Первый слой представляет собой диэлектрическую подложку высотой h с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r, второй слой имеет воздушное заполнение ($\varepsilon_{r2} = 1$). Согласно методу поперечного резонанса, анализируемая структура с неоднородностью помещается в резонатор с идеальными электрическими (e.w.) или магнитными (m.w.) стенками по продольной оси z.

В качестве примера, рассмотрим алгоритм анализа спектра собственных частот «электрической» краевой задачи. Решение уравнения Гельмгольца для векторных потенциалов «электрической» краевой задачи в каждой двух из частичных областей i=1,2 (рис. 1) записывается в виде двойных рядов Фурье:

$$A_{ey,i}=\sum_{m=1}\sum_{n=1}P_{mn}\cos k_{xm}x\sin k_{zn}zF_{ei,mn}(y)=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\varphi_{mn}(x,z)F_{ei,mn}(y),$$
$$A_{hy,i}=\sum_{m=1}\sum_{n=0}P_{mn}\sin k_{xm}x\cos k_{zn}zF_{hi,mn}(y)=\sum_{m=1}\sum_{n=0}\psi_{mn}(x,z)F_{hi,mn}(y), \qquad (1)$$

где $k_{xn}=\pi(2n-1)/2A$, $k_{zn}=\pi n/L$ и

$$P_{mn}=\sqrt{\frac{2}{A}}\sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{L}}\frac{1}{\chi_{mn}},\ \chi_{mn}^2=k_{xm}^2+k_{zn}^2,$$

i=1,2 – номер частичной области.

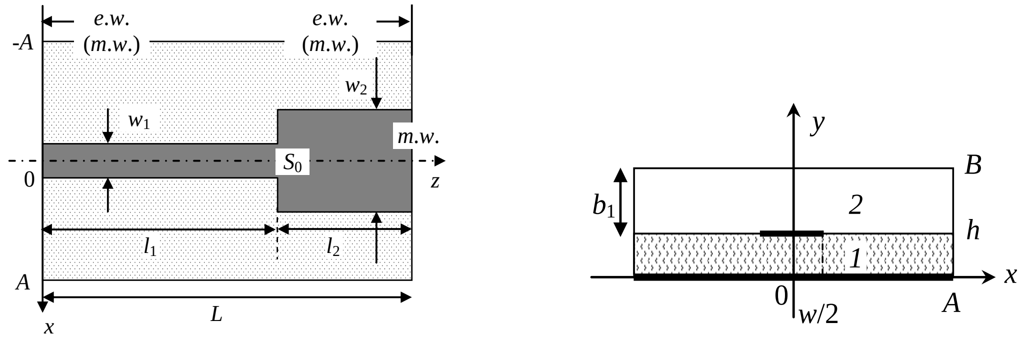


Рис. 1. Топология резонатора с неоднородностью
для решения краевой задачи вида e.w.-e.w. или m.w.-m.w.

Функции $F_{e(h)i,mn}(y)$ с неизвестными коэффициентами разложения имеют вид [6]:

$$F_{e1,mn}(y)=R_{1mn}\frac{\cos k_{y1mn}y}{\sin k_{y1mn}h}\frac{1}{k_{y1mn}},\ F_{e2,mn}(y)=R_{2mn}\frac{\cos k_{y2mn}(B-y)}{\sin k_{y2mn}b_1}\frac{1}{k_{y2mn}},$$
$$F_{h1,mn}(y)=T_{1mn}\frac{\sin k_{y1mn}y}{\sin k_{y1mn}h},\ F_{h2,mn}(y)=T_{2mn}\frac{\sin k_{y2mn}(B-y)}{\sin k_{y2mn}b_1},$$

где $k_{yi,mn}^2=k_0^2\varepsilon_{ri}-k_{xm}^2-k_{zn}^2$ и $R_{e1(2),mn}$, $R_{h1(2)mn}$ – неизвестные коэффициенты разложения в двойные ряды Фурье. Термины «электрическая» и «магнитная» краевые задачи соответствуют граничным условиям на продольных границах резонатора по оси z. Компоненты электромагнитного поля в плоскости (x,z) рассчитываются через векторные потенциалы по формулам:

$$\mathrm{E}_{t,i}=\sum_{m=1}\sum_{n=0}\left[\nabla\psi_{mn}(x,z)\times \mathrm{e}_y\right]F_{hi,mn}(y)+\frac{1}{\mathrm{j}k_0\varepsilon_{ri}}\sum_{m=1}\sum_{n=1}\nabla\varphi_{mn}(x,z)\frac{d}{dy}F_{ei,mn}(y),$$
$$\mathrm{H}_{t,i}=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\left[\nabla\varphi_{mn}(x,z)\times \mathrm{e}_y\right]F_{ei,mn}(y)-\frac{1}{\mathrm{j}k_0}\sum_{m=1}\sum_{n=0}\nabla\psi_{mn}(x,z)\frac{d}{dy}F_{hi,mn}(y).$$

В отличие от [6, 7], в данной работе для алгебраизации краевой задачи плотности токов в неоднородной полосковой линии S_0 в плоскости $y=h$ описывается в терминах электрического $J_{e,n}(x,z)$ и магнитного $J_{h,n}(x,z)$ векторных потенциалов ($k_0=\omega/c$):

$$J_z=\sum_{n=1}\frac{d}{dx}J_{e,n}(x,z)\cdot C_{e,n}-\frac{1}{j\cdot k_0}\sum_{n=1}\frac{d}{dz}J_{h,n}(x,z)C_{h,n},$$
$$J_x=-\sum_{n=1}\frac{d}{dz}J_{e,n}(x,z)\cdot C_{e,n}-\frac{1}{j\cdot k_0}\sum_{n=1}\frac{d}{dx}J_{h,n}(x,z)C_{h,n}, \qquad (2)$$

где $C_{e(h),n}$ – неизвестные коэффициенты разложения, а функции $J_{e(h),n}(x,z)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$\Delta_\perp J_{e(h),n}(x,z) + \chi^2_{e(h)q} J_{e(h),n}(x,z) = 0\,, \tag{3}$$

$\chi^2_{e(h)q}$ – собственные числа двумерной краевой задачи для векторных потенциалов плотности токов, и граничным условиям на открытых границах полосковой линии $x = \pm w_{1(2)}/2$:

$$\left.\frac{dJ_h(x,z)}{d\mathrm{n}}\right|_S = 0\,,\ \left.J_e(x,z)\right|_S = 0\,.$$

На продольных границах $z = 0$ и $z = L$ граничные условия соответствуют условиям краевой задачи для объемного резонатора. Нормировка базисных функций имеет вид, традиционный для волноводных краевых задач:

$$\int\limits_{S_{MSL}} \left[\nabla J_{e(h),n}(x,z)\right]^2 dS = \chi^2_{e(h),n} \int\limits_{S_{MSL}} J^2_{e(h),n}(x,z)\,dS = 1.$$

Использование разложения (2) для описания плотности токов позволяет получить хорошую сходимость тригонометрических рядов, с помощью которых записываются векторные потенциалы $J_{e(h),n}(x,z)$. При решении задачи на собственные функции и собственные значения для области с прямоугольными координатными границами методом частичных областей внутренние суммы в рядах сходятся как $O(n^{-3})$. Пример решения краевой задачи для векторных потенциалов плотности тока для случая «электрической» задачи приведен в Приложении.

Из условий непрерывности поля на границе раздела сред в плоскости $y = h$ с учетом (2) получается система из двух матричных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения $C_{e(h),n}$:

$$-\sum_{l=1} C_{h,l} \sum_{m=1}\sum_{n=0}\left(\alpha^m_{h,q,mn}\alpha^m_{h,l,mn}\frac{1}{F_{h,mn}} + \frac{1}{k_0^2\varepsilon_r}\frac{1}{F_{e,mn}}\beta^m_{h,q,mn}\beta^m_{h,q,mn}\right) +$$

$$+\,\mathrm{j}k_0 \sum_{l=1} C_{e,l} \sum_{m=1}\sum_{n=0} \alpha^m_{h,q,mn}\gamma^m_{h,l,mn}\frac{1}{F_{h,mn}} = 0,$$

$$-\sum_{l=1} C_{h,l} \sum_{m=1}\sum_{n=0} \gamma^m_{h,q,mn}\alpha^m_{h,l,mn}\frac{1}{F_{h,mn}} + \mathrm{j}k_0 \sum_{l=1} C_{e,l} \sum_{m=1}\sum_{n=0} \gamma^m_{h,q,mn}\gamma^m_{h,l,mn}\frac{1}{F_{h,mn}} = 0\,.$$

Интегралы связи в системе имеют вид (здесь интегрирование выполняется по площади, занимаемой неоднородной полосковой линией):

$$\alpha^m_{h,q,mn} = \int\limits_{S_{MSL}} \nabla J_{h,q}(x,z)\left[\nabla\psi_{mn}(x,z)\times \mathrm{e}_y\right] dS\,,$$

$$\beta^m_{h,q,mn} = \int\limits_{S_{MSL}} \nabla J_{h,q}(x,z)\nabla\varphi_{mn}(x,z)\,dS\,,$$

$$\gamma^m_{h,q,mn} = \int\limits_{S_{MSL}} \left[\nabla J_{e,q}(x,z)\times \mathrm{e}_y\right]\cdot\left[\nabla\psi_{mn}(x,z)\times \mathrm{e}_y\right] dS = \int\limits_{S_{MSL}} \nabla J_{e,q}(x,z)\cdot\nabla\psi_{mn}(x,z)\,dS\,,$$

и

$$F_{e,mn} = \frac{\mathrm{ctg} k_{y1mn} h}{k_{y1mn}} + \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\mathrm{ctg} k_{y2mn} b_1}{k_{y2mn}}, \; F_{h,mn} = k_{y1l}\, \mathrm{ctg} k_{y1l} h + k_{y2l}\, \mathrm{ctg} k_{y2l} b_1 .$$

При выводе системы линейных алгебраических уравнений учтено равенство нулю интеграла:

$$\delta^m_{h,q,mn} = \int\limits_{S_{MSL}} \left[\nabla J_{e,q}(x,z) \times \mathrm{e}_y\right] \nabla \varphi_{mn}(x,z) dS = 0 .$$

Аналогичным образом строится алгоритм решения «магнитной» краевой задачи, а также (при необходимости) и «гибридных» задач с условиями m.w.-e.w. либо e.w.-m.w. на продольных границах [8].

Согласно методу поперечного резонанса [9], элементы матрицы рассеяния на симметричной неоднородности (когда один из размеров, l_1 или l_2, фиксируется) рассчитываются из решений двух краевых задач с граничными условиями на продольной границе вида e.w.-e.w. и m.w.-m.w. для резонатора относительно его изменяемого размера $l_{i,1(2)}$ (рис. 1) по формулам:

$$S_{11} = (\Gamma_2 - \Gamma_1)/2, \quad S_{12} = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2, \tag{4}$$

где $\Gamma_{1(2)} = \exp\left(2\,\mathrm{j}\beta_z l_{i,1(2)}\right)$, β_z – постоянная распространения основной волны в регулярной микрополосковой линии передачи. Таким способом рассчитывается матрица рассеяния на отрезке микрополосковой линии передачи, индуктивном (узком) или емкостном (широком) в зависимости от того, какой из размеров, l_1 или l_2, фиксируется, рис. 2. Минимум коэффициента отражения (резонансное пропускание) определяется точками пересечения спектральных кривых, полученных из решения обеих краевых задач.

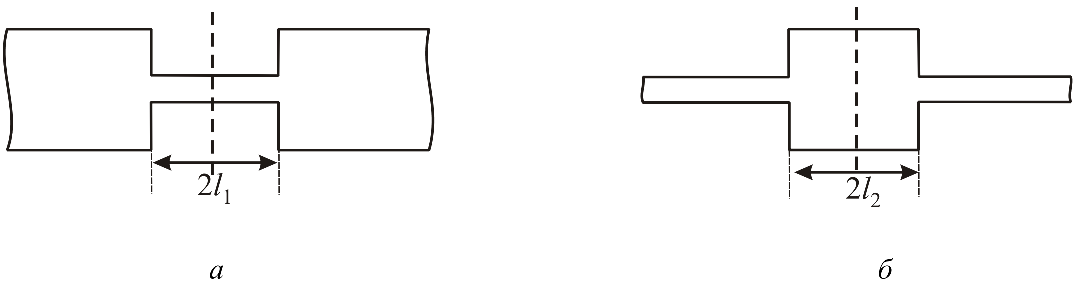
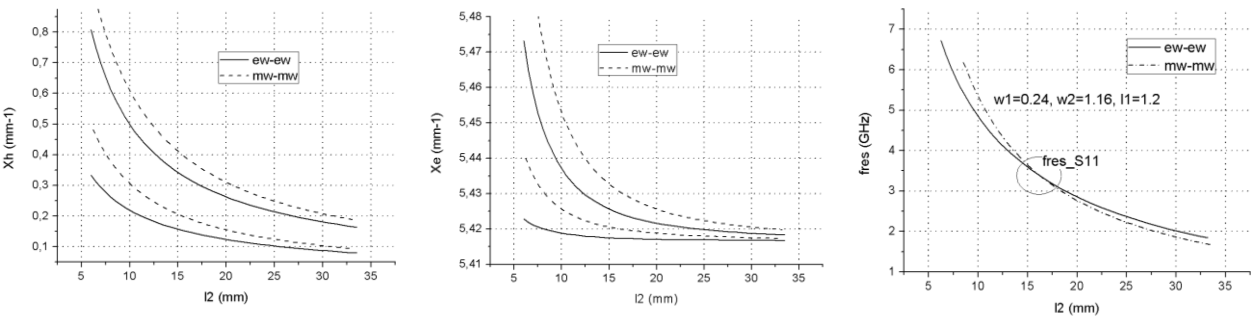


Рис.2. Индуктивная (*а*) и емкостная (*б*) неоднородности в микрополосковой линии передачи

Особенности реализации численных алгоритмов и результаты численных расчетов

Анализ неоднородностей выполнен для материала подложки Ro3010 толщиной h=0.635 мм с диэлектрической проницаемостью ε_r=10.2. В численных расчетах суммирование в двойных рядах Фурье (1) было ограничено до 600 членов ряда, в выражениях для векторных потенциалов плотности тока учитывали по две ($N_m = 2$) собственные функции $J_{h,n}, J_{e,n}, n = 1..N_m$. Рассматриваемый диапазон частот, доступный нам для измерений – 1.0÷6.0 ГГц. Преимущество алгоритма, в отличие от ранее разработанного [6], состоит в том, что во всем частотном диапазоне учитывается одинаковое число типов волн $N_m = 2$ в разложениях векторных потенциалов плотности тока в полосковой линии.

Рассмотрим сначала результаты расчетов характеристик рассеяния на скачках ширины в микрополосковой линии передачи конечной длины, т.е. на индуктивной и емкостной неоднородностях в микрополосковой линии передачи (рис. 2, *а*, *б*). Для определенности, длины ступенчатых неоднородностей примем $\lambda/16$ на центральной частоте 3.0 ГГц. Особенностью алгоритма является достаточно хорошо локализованные и быстро рассчитываемые собственные числа χ_h для магнитного векторного потенциала $J_{h,n}$ (шаг итерации для поиска корня уравнения равен t=10^{-3} мм$^{-1}$) и сложно определяемые корни χ_e для векторного потенциала $J_{e,n}$ (t=10^{-6}-10^{-7} мм$^{-1}$). Зависимости первых двух корней уравнения для определения собственных чисел двумерных функций плотности тока (см. Приложение) для электрической и магнитной краевых задач приведены на рис. 3, *а*, *б*. Начальная точка поиска корней уравнения для собственных чисел χ_h для электрической краевой задачи равна $2\pi/3L_s$, а для собственных чисел $\chi_e - 2\pi/w_2$. На рис. 3, *в* приведены спектры собственных частот резонатора с индуктивной неоднородностью в микрополосковой линии, полученные из решения электрической и магнитной краевых задач. Размеры структуры (мм): w_1=0.24, w_2=1.16, длина индуктивного отрезка $2\cdot l_1$=2.4. Размеры экрана приняты равными A=10.0, B=8.635. Точка пересечения спектральных кривых показывает резонансный минимум коэффициента отражения на характеристике.



а *б* *в*

Рис. 3. *а* – собственные числа для магнитного векторного потенциала J_h; *б* – собственные числа для электрического векторного потенциала J_e, описывающего плотность поверхностных токов в неоднородной линии передачи; *в* – спектр собственных частот, полученный из решения краевых задач для индуктивной неоднородности в микрополосковой линии

Для расчета матрицы рассеяния на неоднородности необходимо решать обратные краевые задачи, то есть рассчитывать размер резонатора l_2 на каждой заданной частоте f, что требует больших затрат машинного времени, поскольку на каждом шаге надо считать интегралы связи $\alpha^m_{h,q,mn}$, $\beta^m_{h,q,mn}$, $\gamma^m_{h,q,mn}$. Поэтому, как и в [6], для численного расчета элементов матрицы рассеяния методом поперечного резонанса по формулам (4) была использована

аппроксимация спектральных кривых полиномами 7-го порядка. На рис. 4 представлены характеристики коэффициентов отражения и передачи основной волны микрополосковой линии на индуктивных (рис. 2, *а*) неоднородностях для трех разных значений отношения w_2/w_1. Основная линия передачи имеет ширину w_2=2.62 мм, а длины индуктивных отрезков равны $\lambda/16$ (отрезки такой длины используются для проектирования укороченных переходов и фильтров).

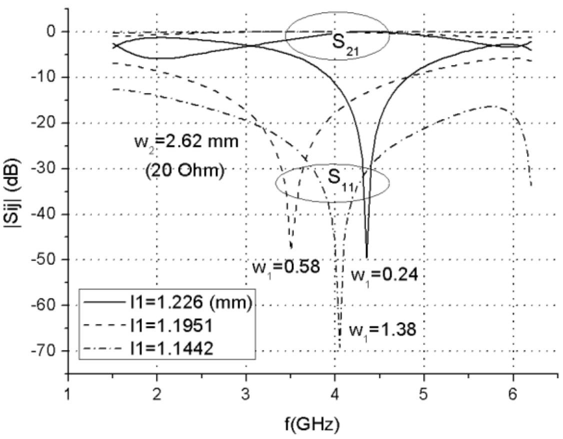
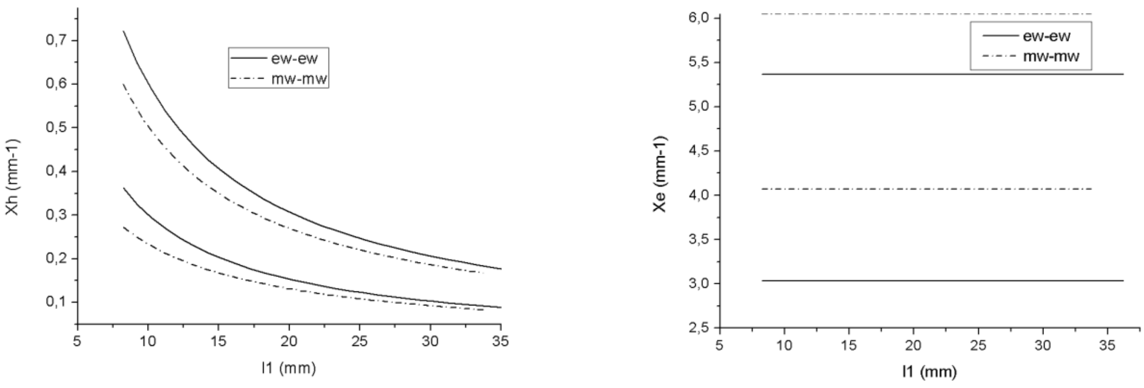


Рис. 4. Характеристики рассеяния на *индуктивной* неоднородности в микрополосковой линии передачи

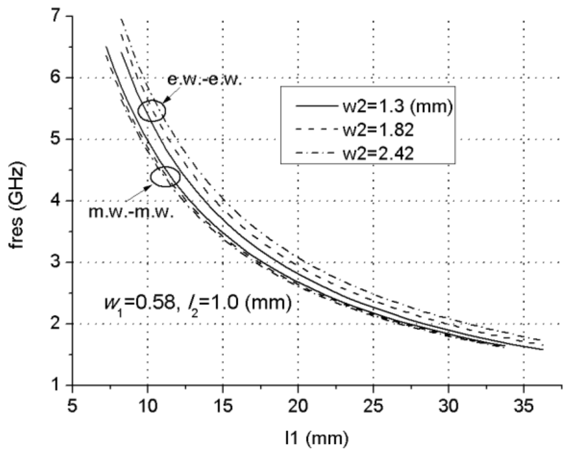
Далее рассмотрим результаты расчетов характеристик рассеяния на емкостной неоднородности в микрополосковой линии передачи (рис. 2, *б*). В этом случае при решении краевой задачи фиксируется размер l_2, и ищутся корни уравнения для собственных частот резонатора в зависимости от расстояния до неоднородности l_1 (рис. 1). Кривые зависимости собственных чисел векторных потенциалов для плотности тока в неоднородной полосковой линии показаны на рис. 5, *а*, *б* (первые два корня трансцендентного уравнения для собственных чисел электрического и магнитного векторных потенциалов). Расчеты выполнены для скачка ширины полосковой линии с w_1=0.58 на w_2=2.42 мм (l_2=1.0). Видно, что в этом случае собственные числа χ_e, получаемые из решения краевой задачи для электрического векторного потенциала $J_{e,n}$, остаются практически постоянными (рис. 5, *б*).



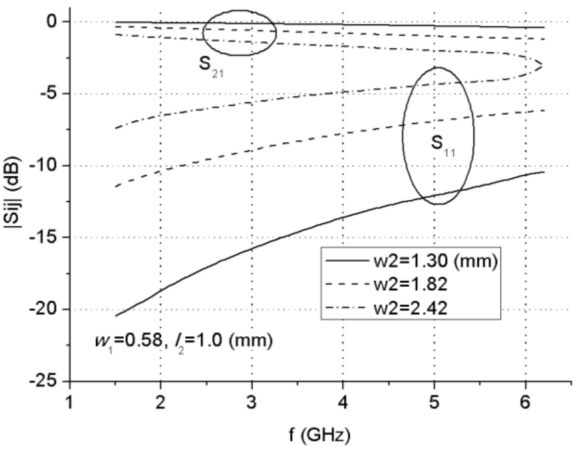
а *б*

Рис. 5. *а* – собственные числа векторных потенциалов J_h; *б* – собственные числа векторных потенциалов J_e, описывающих плотность поверхностных токов в неоднородной полосковой линии передачи для емкостной неоднородности в микрополосковой линии

На рис. 6, *а* показан спектр собственных частот, полученных из решения электрической и магнитных краевых задач, в зависимости от отношения ширин полосковых линий w_2/w_1 при фиксированной ширине w_1=0.58 мм и l_2=1.0 мм (длина отрезка l=2l_1=2.0 мм соответствует длине $\lambda/16$ на частоте 3.0 ГГц), а на рис. 6, *б* – полученные из него методом поперечного резонанса характеристики коэффициентов отражения и пропускания на емкостной неоднородности в микрополосковой линии передачи. Видно, что характеристика рассеяния на емкостной неоднородности в микрополосковой линии передачи в широком диапазоне частот (от 1.5 до 6 ГГц) – гладкая, и не содержит точек резонансного отражения или пропускания.



а



б

Рис. 6. *а* – спектр собственных частот, полученный из решения краевых задач для *емкостной* неоднородности в микрополосковой линии передачи; *б* – частотные зависимости коэффициентов отражения и передачи на емкостной неоднородности в зависимости ширины «емкостного» отрезка линии
передачи длиной $2{\cdot}l_2$=2.0 мм

Заключение

Таким образом, усовершенствованы алгоритмы для анализа неоднородностей в виде скачка ширины в микрополосковой линии передачи конечной длины (индуктивной или емкостной неоднородностей) методом поперечного резонанса. При этом для алгебраизации краевой задачи использованы выражения для плотности тока в неоднородной полосковой линии через магнитный и электрический векторные потенциалы. Векторные потенциалы, в свою очередь, представляют собой волноводные функции (ортогональный базис), которые получаются из решения двумерной краевой задачи на собственные функции и собственные значения в области, занимаемой нерегулярной полосковой линией. Преимущество предложенной методики состоит в том, что порядок усечения рядов по собственным функциям (векторным потенциалам) остается постоянным при анализе неоднородности в широком диапазоне частот. Алгоритмы хорошо сходятся и для обеспечения точности расчета резонансных частот порядка 10^{-2} (ГГц), достаточно учесть две-три собственные функции в разложениях электрического и магнитного векторных потенциалов плотности тока.

Список литературы: 1. *Farrar, A., Adams, A. T.* Matrix Methods for Microstrip Three-Dimensional Problem // IEEE Trans. on Microw. Theory and Techn. – 1972. – Vol. 20, No 8. – P. 497-504. 2. *Railton, C.J., Rozzi, T.* The Rigorous Analysis of Cascade'd Step Discontinuities in Microstrip // IEEE Trans. on Microw. Theory and Techn. – 1988. – Vol. 36, No 7. – P. 1177 – 1184. 3. *Koster, N. H. L., Jansen, R. H.* The Microstrip Step Discontinuity: A Revised Description // IEEE Trans. on Microw. Theory and Techn. – 1986. – Vol. 34, No. 2. – P. 213-222. 4. *Chu, S., Itoh, T.* Analysis of Microstrip Step Discontinuity by the Modified Residue Calculus Technique // IEEE Trans. on Microw. Theory and Techn. – 1985. – Vol. 33, No 10. – P. 1024-1028. 5. *Chen, Y., Beker, B.* Study of Microstrip Step Discontinuities on Bianisotropic Substrates Using the Method of Lines and Transverse Resonance Technique // IEEE Trans. on Microw. Theory and Techn. – 1994. – Vol. 42, No. 10. – P. 1945-1950. 6. *Rassokhina, Yu. V., Krizhanovski, V. G.* Microstrip Line Transformator Design by Transverse Resonanse Technique // Proc. of MIKON 2014, 20th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, June 16-18, Gdansk, Poland. – P. 206-208. *7. Крыжановский, В.Г., Рассохина, Ю.В.* Анализ неоднородности в виде скачка ширины микрополосковой линии методом поперечного резонанса // 23-я междунар. Крым. конф. "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии". Севастополь, 9-13 сентября 2013 г. : материалы конференции. – Севастополь : Вебер, 2013. – Т.2. – С. 661-662. 8. *Рассохина, Ю.В., Крыжановский, В.Г.* Режекторный фильтр на Н-образном щелевом резонаторе в экранирующем слое микрополосковой линии // Радиотехника. – 2015. – Вып. 182. – С. 129—136. 9. *Itoh,T.* (Ed*).* Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures New York: Wiley, 1989. – 707 p.

Приложение

Решение краевых задач для векторных потенциалов плотности тока в неоднородной полосковой линии для «электрической» краевой задачи.

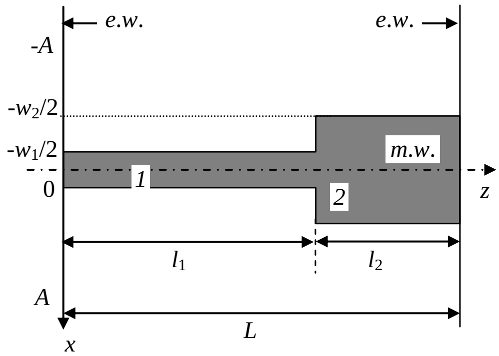


Рис. П1. Топология неоднородной в полосковой линии и разбиение ее на частичные области для решения краевых задач для векторного и магнитного потенциала

Функция магнитного векторного потенциала удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta J_{h,q}(x,z)+\chi_{h,q}^{2}J_{h,q}(x,z)=0\,,$$

и условиям на свободных и продольных границах области:

$$\frac{dJ_{hi}(\pm w_i/2,z)}{dx}=0, i=1,2\,,\ \frac{dJ_{hi}(0,z)}{dx}=0, i=1,2\,,\ J_{h1}(x,0)=0\,,\ J_{h2}(x,L)=0\,.$$

Удобно использовать нормировку базисных функций вида:

$$\chi_{h,q}^{2}\int\limits_{S_{MSL}}J_{h,q}^{2}(x,z)dS=1.$$

Решение для функции $J_{h,q}(x,z)$ в частичных областях записывается в виде разложений в ряды Фурье с неизвестными коэффициентами $A_{1(2)k}$:

$$J_{h1}(x,z)=\sum_{k=0}A_{1k}\sqrt{\frac{2-\delta_{k0}}{w_1/2}}\cos\frac{2\pi k}{w_1}x\frac{\sin k_{z1k}z}{k_{z1k}\cos k_{z1k}l_1}\,,\ |x|\le w_1/2\,,\ 0\le z\le l_1\,.$$

$$J_{h2}(x,z)=\sum_{k=0}A_{2k}\sqrt{\frac{2-\delta_{k0}}{w_2/2}}\cos\frac{2\pi k}{w_2}x\frac{\sin k_{z2k}(L-z)}{k_{z2k}\cos k_{z2k}l_2}\,,\ |x|\le w_2/2\,,\ l_1\le z\le L\,.$$

$$k_{zik}^{2}=\chi_{hq}^{2}-\left(\frac{2\pi k}{w_i}\right)^{2},\ i=1,2\,.$$

Условия непрерывности функции $J_{h,q}$ на границе частичных областей имеют вид:

$$J_{h2}(x,l_1)=J_{h1}(x,l_1),|x|\le w_1/2,$$

$$\frac{dJ_{h2}(x,l_1)}{dz}=\begin{cases}\dfrac{dJ_{h1}(x,l_1)}{dz},|x|\le w_1/2\\ 0,w_1/2\le x\le w_2/2\end{cases},\ |x|\le w_1/2\,,$$

откуда получаются два однородных уравнения для коэффициентов разложения:

$$\sum_{k=0} A_{1k}\sqrt{\frac{2-\delta_{k0}}{w_1/2}}\cos\frac{2\pi k}{w_1}x = -\sum_{n=0} A_{2n}\sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{w_2/2}}\cos\frac{2\pi n}{w_2}x,$$

$$A_{2k} = -\sum_{m=0} A_{1m}S_{km},$$

где

$$S_{kn} = \sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{w_1/2}}\sqrt{\frac{2-\delta_{k0}}{w_2/2}}\cos\pi n \sin\frac{\pi k w_1}{w_2}\frac{2\pi k/w_2}{(2\pi k/w_2)^2-(2\pi n/w_1)^2}.$$

Далее

$$\sum_{k=0} A_{2k}\sqrt{\frac{2-\delta_{k0}}{w_2/2}}\cos\frac{2\pi k}{w_2}x\frac{\tan k_{z2k}l_2}{k_{z2k}} = \sum_{n=0} A_{1n}\sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{w_1/2}}\cos\frac{2\pi n}{w_1}x\frac{\tan k_{z1n}l_1}{k_{z1n}},$$

$$A_{1n}\frac{\tan k_{z1n}l_1}{k_{z1n}} = \sum_{k=0} A_{2k}\frac{\tan k_{z2k}l_2}{k_{z2k}}S_{kn}.$$

В итоге получается трансцендентное уравнение для расчета собственных чисел $\chi^2_{h,q}$:

$$\sum_{m=0} A_{1m}\left[\frac{\tan k_{z1n}l_1}{k_{z1n}}\delta_{mn} + \sum_{k=0}\frac{\tan k_{z2k}l_2}{k_{z2k}}S_{km}S_{kn}\right] = 0.$$

Для электрического векторного потенциала $J_e(x,z)$ строятся аналогичные решения с разложением функции в ряды Фурье в частичных областях с граничными условиями:

$J_{ei}(\pm w_i/2, z) = 0, i = 1,2$, $J_{ei}(0,z) = 0, i = 1,2$, $\frac{d}{dz}J_{e1}(x,0) = 0$, $\frac{d}{dz}J_{e2}(x,L) = 0$.

$$J_{e1}(x,z) = \sum_{k=1} A_{1k}\frac{2}{\sqrt{w_1}}\sin\frac{2\pi k}{w_1}x\frac{\cos k_{z1k}z}{\cos k_{z1k}l_1},\ |x| \le w_1/2,\ 0 \le z \le l_1.$$

$$J_{e2}(x,z) = \sum_{k=1} A_{2k}\frac{2}{\sqrt{w_2}}\sin\frac{2\pi k}{w_2}x\frac{\cos k_{z2k}(L-z)}{\cos k_{z2k}l_2},\ |x| \le w_2/2,\ l_1 \le z \le L.$$

Из уравнений непрерывности на границе частичных областей выводится уравнение для собственных чисел $\chi^2_{e,q}$ электрического потенциала:

$$\sum_{m=1} A_{1m}\left[k_{z1n}\tan k_{z1n}l_1\cdot\delta_{nm} + \sum_{k=1} k_{z2k}\tan k_{z2k}l_2\cdot S_{km}S_{kn}\right] = 0,$$

где

$$S_{kn} = \frac{4}{\sqrt{w_1 w_2}}\cos\pi n \sin\frac{\pi k w_1}{w_2}\frac{2\pi n/w_1}{(2\pi k/w_2)^2-(2\pi n/w_1)^2},$$

и

$$A_{2k} = \sum_{m=1} A_{1m}S_{km}.$$

Аналогично решаются краевые задачи для векторных потенциалов плотности тока «магнитной» краевой задачи (с условием магнитной стенки на продольных границах).

Донецкий национальный университет (г. Винница) *Поступила в редколлегию 23.09.2016*