УДК 004.942

Я. А. Калиновский
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Построение норм и сопряженных чисел в изоморфных гиперкомплексных числовых системах

Показана связь представлений норм и сопряженных чисел в изоморфных гиперкомплексных числовых системах. Даны примеры таких представлений для систем различных размерностей.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, изоморфизм, норма, сопряженное число, базис.*

Памяти доктора технических наук, профессора М.В. Синькова

Введение

Как показано в опубликованных ранее работах [1–3], применение принципа изоморфизма в гиперкомплексных числовых системах (далее ГЧС) позволяет получить достаточно весомые результаты в направлении повышения эффективности как вычислительных процедур при моделировании с использованием ГЧС, так и синтеза самих математических моделей. Так были построены матричные представления высокоразмерных ГЧС, а также представления экспоненциальных функций.

В данной работе показано, как можно применить принцип изоморфизма для построения таких алгебраических характеристик ГЧС как норма гиперкомплексного числа и сопряжение его.

Изоморфизм ГЧС и некоторые его свойства

Подробные сведения об изоморфизме ГЧС изложены во многих работах (см., например [1, 4, 5]). В данной статье будут изложены и, по необходимости, доказаны только те утверждения, которые необходимы для дальнейших рассуждений.

Обозначим единичный элемент ГЧС через ε. Здесь может быть индекс, соответствующий рассматриваемой системе.

Пусть даны две изоморфные ГЧС: $\Gamma_1(e,n)$, $\Gamma_2(f,n)$ и линейное изоморфное преобразование L:

$$\Gamma_1(e,n)\overset{L}{\simeq}\Gamma_2(f,n), \tag{1}$$

$$L: e_k=\sum_{j=1}^{n} l_{kj} f_j;\quad k=1,\ldots,n, \tag{2}$$

единичные элементы которых ε_1 и ε_2 соответственно.

Покажем, что при линейном изоморфном преобразовании L единичный элемент одной ГЧС переходит в единичный элемент другой и обратно:

$$\varepsilon_1 \overset{L}{\Leftrightarrow} \varepsilon_2. \tag{3}$$

Из определения единичного элемента $a\cdot\varepsilon_1=a$, где $a\in\Gamma_1(e,n)$, а из определения изоморфизма $L(a)\cdot L(\varepsilon_1)=L(a)$. Но это есть определение единичного элемента в $\Gamma_2(f,n)$.

Значит:

$$\varepsilon_2=L(\varepsilon_1), \tag{4}$$

что и требовалось доказать.

Так как преобразование L, ввиду его определения, всегда имеет обратное преобразование L^{-1}, то, умножая обе части (4) на L^{-1}, получим:

$$\varepsilon_1=L^{-1}(\varepsilon_2), \tag{5}$$

чем утверждение (3) доказывается в обе стороны.

Следует сказать, что если рассматриваемая ГЧС «над» полем вещественных чисел R, то все гиперкомплексные числа вида $\alpha\varepsilon$, где $\alpha\in R$, образуют в ГЧС подсистему, замкнутую относительно операций сложения и умножения и обладающую операцией деления, кроме деления на нуль. То есть совокупность этих чисел, несмотря на их вид $\alpha\varepsilon$, образуют систему вещественных чисел со всеми свойствами этой системы. Обозначим эту подсистему гиперкомплексной системы Γ_i через $\varepsilon\Gamma_i$. Таким образом, если $a\in\varepsilon\Gamma_1$, то в соответствии с (4):

$$L(a)\in\varepsilon\Gamma_2. \tag{6}$$

Изоморфизм норм и сопряженных чисел

В этом разделе будет доказан тот факт, что при изоморфном преобразовании выражений для норм и сопряженных получаются нормы и сопряжения в изоморфной системе.

Методы построения норм и сопряжений подробно рассмотрены в работах [1, 6, 7]. Приведем основные результаты.

Если γ_{ij}^{k}, $i,j,k=1,\ldots,n$ — структурные константы системы Γ, где i — номер строки, j — номер столбца таблицы умножения, а k — индекс базисного элемента и $e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k$, то норма $N(a)$ гиперкомплексного числа $a = \sum_{s=1}^{n} a_s e_s$ определяется детерминантом

$$\mathrm{N}(a) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}^k a_i \right\|_{j,k=1,\ldots,n} . \tag{7}$$

Если известна норма гиперкомплексного числа a, то сопряженное число $\bar{a}$ есть результат решения линейного гиперкомплексного уравнения

$$a \cdot \bar{a} = \mathrm{N}(a), \tag{8}$$

которое расщепляется в систему из n линейных уравнений с n неизвестными — компонентами сопряженного числа $\bar{a}$.

Пусть $a \in \Gamma_1$. Тогда из (8) и определения изоморфизма следует:

$$L(a) \cdot L(\bar{a}) = L(\mathrm{N}(a)). \tag{9}$$

Но в соответствии с (6)

$$L(\mathrm{N}(a)) \in \varepsilon L_2, \tag{10}$$

т.е.

$$\mathrm{N}(L(a)) = L(\mathrm{N}(a)). \tag{11}$$

Если обозначить $L(\bar{a}) = \overline{L(a)}$, то получим определение нормы и сопряженного числа в ГЧС Γ_2:

$$L(a) \cdot \overline{L(a)} = \mathrm{N}(L(a)). \tag{12}$$

Отсюда следует основной вывод: *если есть две изоморфные системы и изоморфизм (2), то по выражениям нормы и сопряженного числа в одной из ГЧС, подвергнув их изоморфному преобразованию, можно построить выражения нормы и сопряженного числа в другой ГЧС.*

При этом отпадает необходимость в вычислении детерминанта (7) и системы линейных уравнений (8).

Построение представлений экспоненты по ее представлению в другой ГЧС и линейному преобразованию изоморфизма между этими системами

В некоторых задачах целесообразно использовать пары изоморфных ГЧС, одна из которых имеет сильнозаполненную таблицу умножения, а вторая — слабозаполненную и имеющую диагональный вид. Последнее означает, что на главной диагонали таблицы умножения этой ГЧС размерности $n \ge 1$ стоит m подтаблиц размерности n_m, так что $\sum_{i=1}^{m} n_m = n$, а все остальные элементы таблицы — нули. Фактически обе эти ГЧС являются прямыми суммами систем вещественных чисел R, комплексных чисел C и неразложимых радикалов.

Здесь весьма важным обстоятельством является то, что построить выражения для нормы и сопряжения в ГЧС диагонального типа очень просто. Это вытекает из следующих утверждений.

Утверждение 1. Если гиперкомплексная числовая система Γ есть прямая сумма нескольких гиперкомплексных числовых систем

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma_i , \tag{13}$$

то норма N в ней равна произведению норм N_i во всех гиперкомплексных системах, которые входят в прямую сумму (13):

$$\mathrm{N} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i \ . \tag{14}$$

Докажем правильность этого утверждения для случая $n = 2$. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, где $\dim \Gamma_1 = r,\ \dim \Gamma_2 = s,\ \dim \Gamma\ = r + s$.

Так как матрица нормы определяется выражением (7), то в данном случае оно будет иметь вид:

$$\mathrm{N}(a) = \left\| \begin{array}{cccc}
\sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_{i1}^{1} a_i \ \sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_{i2}^{1} a_i \ldots \sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_{ir}^{1} a_i & 0 & 0 \ \ldots & 0 \\
\sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_{i1}^{2} a_i \ \sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_{i2}^{2} a_i \ldots \sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_{ir}^{2} a_i & 0 & 0 \ \ldots & 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
\sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_{i1}^{r} a_i \ \sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_{i2}^{r} a_i \ldots \sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_{ir}^{r} a_i & 0 & 0 \ \ldots & 0 \\
0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s} \gamma_{i,r+1}^{r+1} a_i & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s} \gamma_{i,r+2}^{r+1} a_i \ldots & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s} \gamma_{i,r+s}^{r+1} a_i \\
0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s} \gamma_{i,r+1}^{r+2} a_i & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s} \gamma_{i,r+2}^{r+2} a_i \ldots & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s} \gamma_{i,r+s}^{r+2} a_i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s} \gamma_{i,r+1}^{r+s} a_i & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s} \gamma_{i,r+2}^{r+s} a_i \ldots & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s} \gamma_{i,r+s}^{r+s} a_i
\end{array} \right\| \cdot \varepsilon \, .$$

По теореме Лапласа:

$$\left\|\mathrm{N}(a)\right\| = \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_{i1}^{1}a_i & \sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_{i2}^{1}a_i \ldots & \sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_{ir}^{1}a_i \\ \sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_{i1}^{2}a_i & \sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_{i2}^{2}a_i \ldots & \sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_{ir}^{2}a_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_{i1}^{r}a_i & \sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_{i2}^{r}a_i \ldots & \sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_{ir}^{r}a_i \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{i=r+1}^{r+s}\gamma_{i,r+1}^{r+1}a_i & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s}\gamma_{i,r+2}^{r+1}a_i \ldots & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s}\gamma_{i,r+s}^{r+1}a_i \\ \sum\limits_{i=r+1}^{r+s}\gamma_{i,r+1}^{r+2}a_i & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s}\gamma_{i,r+2}^{r+2}a_i \ldots & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s}\gamma_{i,r+s}^{r+2}a_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=r+1}^{r+s}\gamma_{i,r+1}^{r+s}a_i & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s}\gamma_{i,r+2}^{r+s}a_i \ldots & \sum\limits_{i=r+1}^{r+s}\gamma_{i,r+s}^{r+s}a_i \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\|\mathrm{N}_1(a_1,\ldots,a_r)\right\| \cdot \left\|\mathrm{N}_2(a_{r+1},\ldots,a_{r+s})\right\|,$$

что и доказывает утверждение.

Случай $n > 2$ доказывается с помощью метода полной математической индукции.

Из этого утверждения также следует мультипликативность нормы прямой суммы Γ, если нормы всех множителей Γ_i мультипликативны.

Утверждение 2. Если гиперкомплексная числовая система Γ — прямая сумма нескольких гиперкомплексных числовых систем

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n}\Gamma_i\,, \tag{15}$$

и, соответственно, число $a \in \Gamma$ есть прямая сумма чисел из систем, которые входят в Γ

$$a = \bigoplus_{i=1}^{n} a^{(i)}\,, \tag{16}$$

то сопряженное число $\overline{a}$ в гиперкомплексной системе Γ определяется по формуле:

$$\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}\,\left(a^{(1)}\right)\cdot\ldots\cdot\mathrm{N}\,\left(a^{(i-1)}\right)\cdot\mathrm{N}\,\left(a^{(i+1)}\right)\cdot\ldots\mathrm{N}\,\left(a^{(n)}\right)\cdot\overline{a}^{(i)}\,. \tag{17}$$

Действительно, в этом случае система (8) превратится с учетом (15) и (16) в систему

$$\overline{a}\bigoplus_{i=1}^{n} a^{(i)} = \mathrm{N}(a)\cdot\varepsilon\,, \tag{18}$$

где в соответствием с Утверждением 1 $\mathrm{N} = \prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{N}_i$, а ε — единичный элемент системы Γ:

$$\varepsilon = \bigoplus_{i=1}^{n} \varepsilon^{(i)} . \tag{19}$$

При таких допущениях расширенная матрица системы (8) будет иметь такой вид:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \left\| a^{(1)} \cdot \overline{a}^{(1)} \right\| & 0 & 0 & 0 & \left\| \begin{array}{c} \mathrm{N}(a) \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{array} \right\| \\ 0 & \left\| a^{(2)} \cdot \overline{a}^{(2)} \right\| & 0 & 0 & \left\| \begin{array}{c} \mathrm{N}(a) \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{array} \right\| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \left\| a^{(n)} \cdot \overline{a}^{(n)} \right\| & \left\| \begin{array}{c} \mathrm{N}(a) \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{array} \right\| \end{array} \right\| , \tag{20}$$

где матрица $\left\| a^{(i)} \cdot \overline{a}^{(i)} \right\|$ соответствует левой части системы уравнений (8) для гиперкомплексной системы Γ_i.

Как видно из (20), система (18) расщепляется в n независимых систем, решения которых и есть сопряженные элементы $\overline{a}^{(i)}$ в каждой из систем Γ_i. Дальнейшее использование формулы (16) и доказывает правильность этого утверждения и, в частности, вид представления сопряженного числа (17).

К формуле (17) нужно сделать такую оговорку. Если система Γ_i — система действительных чисел, то сопряженный элемент в ней в формуле необходимо взять равным единичному элементу этой системы.

Примеры построения выражений норм и сопряжений в изоморфных ГЧС

Рассмотрим примеры построения выражений норм и сопряжений в гиперкомплексных числовых системах разной размерности по выражениям в изоморфных им системах.

1. Алгебра двойных чисел.

Рассмотрим изоморфные ГЧС W и W_1 с таблицами умножения:

$$W:\ \begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & e_1 \end{array}\,, \qquad W_1:\ \begin{array}{c|cc} & f_1 & f_2 \\ \hline f_1 & f_1 & 0 \\ f_2 & 0 & f_2 \end{array}\,. \tag{21}$$

Изоморфизм между этими ГЧС устанавливается следующими взаимно обратными линейными преобразованиями:

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1 + f_2, & f_1 &= (e_1 + e_2)/2, \\ e_2 &= f_1 - f_2, & f_2 &= (e_1 - e_2)/2. \end{aligned} \tag{22}$$

Единичные элементы этих систем соответственно: $\varepsilon_1 = e_1$; $\varepsilon_2 = f_1 + f_2$.

Посмотрим, как преобразуются числа при переходе от одной системы к другой. Пусть $N = n_1 e_1 + n_2 e_2 \in W$. Тогда, подставляя вместо базиса e его выражение через базис f , получим:

$$N = n_1 e_1 + n_2 e_2 \Leftrightarrow (n_1 + n_2) f_1 + (n_1 - n_2) e_2 = m_1 e_1 + m_2 e_2 = M \in W_1 . \tag{23}$$

Из (23) имеем выражение компонентов числа $M \in W_1$ через компоненты числа $N \in W$:

$$m_1 = n_1 + n_2, \quad m_2 = n_1 - n_2 . \tag{24}$$

Так как $W_1 = R \oplus R$, то для $M = m_1 f_1 + m_2 f_2$ в соответствии с Утверждениями 1 и 2 (формулы (14) и (17)) имеем:

$$\mathrm{N}(M) = m_1 m_2 (f_1 + f_2)\,, \ \overline{M} = m_2 f_1 + m_1 f_2 .$$

Подставляя в последние выражения (22) и (24), получим:

$$\mathrm{N}(N) = (n_1^2 - n_2^2) e_1\,, \ \overline{N} = n_1 e_1 - n_2 e_2 .$$

2. Системы квадриплексных чисел K и бикомплексных чисел $C \oplus C$.

Эти гиперкомплексные числовые системы изоморфны [1]. Их таблицы умножения имеют вид:

$$\begin{array}{c} \text{Система } K \\ \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_3 & e_4 & -e_1 & -e_2 \\ e_4 & e_4 & -e_3 & -e_2 & e_1 \end{array} \end{array}\,, \quad (25) \qquad \begin{array}{c} \text{Система } C \oplus C \\ \begin{array}{c|cccc} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \hline f_1 & f_1 & f_2 & 0 & 0 \\ f_2 & f_2 & -f_1 & 0 & 0 \\ f_3 & 0 & 0 & f_3 & f_4 \\ f_4 & 0 & 0 & f_4 & -f_3 \end{array} \end{array}\,. \tag{26}$$

Прямое и обратное линейные преобразования, связывающие их базисы, такие:

$$\begin{cases} e_1 = f_1 + f_3, \\ e_2 = -f_2 + f_4, \\ e_3 = -f_2 - f_4, \\ e_4 = -f_1 + f_3\ , \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} f_1 = (e_1 - e_4)/2, \\ f_2 = (-e_2 - e_3)/2, \\ f_3 = (e_1 + e_4)/2, \\ f_4 = (e_2 - e_3)/2. \end{cases} \tag{28}$$

Единичные элементы этих систем соответственно: $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f_1 + f_3$.

Посмотрим, как преобразуются числа при переходе от одной системы к другой. Пусть $N = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 + n_4 e_4 \in K$. Тогда, подставляя вместо базиса e его выражение через базис f, получим:

$$\begin{aligned} N \Leftrightarrow (n_1 - n_4) f_1 + (-n_2 - n_3) f_2 + (n_1 + n_4) f_3 + (n_2 - n_3) f_4 = \\ = m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3 + m_4 f_4 = M \in C \oplus C. \end{aligned} \tag{29}$$

Из (29) имеем выражение компонентов числа $M \in C \oplus C$ через компоненты числа $N \in K$:

$$\begin{aligned} m_1 &= n_1 - n_4, \\ m_2 &= -n_2 - n_3, \\ m_3 &= n_1 + n_4, \\ m_4 &= n_2 - n_3. \end{aligned} \tag{30}$$

Для $M \in C \oplus C$ в соответствии с Утверждениями 1 и 2 (формулы (14) и (17)) имеем:

$$\mathrm{N}(M) = (m_1^2 + m_2^2)(m_3^2 + m_4^2)(f_1 + f_3),$$
$$\overline{M} = (m_1 f_1 - m_2 f_2)(m_3^2 + m_4^2) + (m_3 f_3 - m_4 f_4)(m_1^2 + m_2^2).$$

Подставляя в последние выражения (27) и (30), получим:

$$\mathrm{N}(N) = ((\sum_{i=1}^{4} n_i^2)^2 - 4(n_1 n_4 - n_2 n_3)) e_1,$$
$$\begin{aligned} \overline{N} = ((n_1 + n_4)^2 + (n_2 - n_3)^2)((n_1 - n_4) f_1 + (n_2 + n_3) f_2) + \\ + ((n_1 - n_4)^2 + (n_2 + n_3)^2)((n_1 + n_4) f_3 - (n_2 - n_3) f_4). \end{aligned}$$

3. Пример ГЧС 8-й размерности $\Gamma_1(e,8) = Д(W(h,2), K(g,4))$ и $\Gamma_2(f,8) = = Д(W_1(h,2), C \oplus C(g,4))$.

Рассмотрим гиперкомплексную систему 8-й размерности $\Gamma_1(e,8) = = Д(W(h,2), K(g,4))$, полученную умножением размерности ГЧС двойных чисел $W(h,2)$ размерности 2 системой квадриплексных чисел $K(g,4)$ размерности 4. Это будет ГЧС размерности $n = 8$ со следующей таблицей умножения:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$	e_6	$-e_5$	e_8	$-e_7$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_8	$-e_7$	$-e_6$	e_5
e_5	e_5	e_6	e_7	e_8	e_1	e_2	e_3	e_4
e_6	e_6	$-e_5$	e_8	$-e_7$	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_7	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_8	e_8	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

(31)

Ей изоморфна ГЧС $\Gamma_2(f,8) = Д(W_1(h,2), C \oplus C(g,4))$ со слабозаполненной таблицей умножения диагонального вида, полученная умножением размерности ГЧС двойных чисел $W_1(h,2)$ размерности 2 системой бикомплексных чисел $C \oplus CK(g,4)$:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_1	f_1	f_2	0	0	0	0	0	0
f_2	f_2	$-f_1$	0	0	0	0	0	0
f_3	0	0	f_3	f_4	0	0	0	0
f_4	0	0	f_4	$-f_3$	0	0	0	0
f_5	0	0	0	0	f_5	f_6	0	0
f_6	0	0	0	0	f_6	$-f_5$	0	0
f_7	0	0	0	0	0	0	f_7	f_8
f_8	0	0	0	0	0	0	f_8	$-f_7$

(32)

Их изоморфизм определяется следующим линейным преобразованием элементов базисов:

$$
\begin{aligned}
&e_1 = f_1 + f_3 + f_5 + f_7, && e_5 = f_1 + f_3 - f_5 - f_7,\\
&e_2 = -f_2 + f_4 - f_6 + f_8, && e_6 = -f_2 + f_4 + f_6 - f_8,\\
&e_3 = -f_2 - f_4 - f_6 - f_8, && e_7 = -f_2 - f_4 + f_6 + f_8,\\
&e_4 = -f_1 + f_3 - f_5 + f_7, && e_8 = -f_1 + f_3 + f_5 - f_7
\end{aligned}
\tag{33}
$$

и обратным:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{4}(e_1 - e_4 + e_5 - e_8), & f_5 &= \frac{1}{4}(e_1 - e_4 - e_5 + e_8),\\
f_2 &= \frac{1}{4}(-e_2 - e_3 - e_6 - e_7), & f_6 &= \frac{1}{4}(-e_2 - e_3 + e_6 + e_7),\\
f_3 &= \frac{1}{4}(e_1 + e_4 + e_5 + e_8), & f_7 &= \frac{1}{4}(e_1 + e_4 - e_5 - e_8),\\
f_4 &= \frac{1}{4}(e_2 - e_3 + e_6 - e_7), & f_8 &= \frac{1}{4}(e_2 - e_3 - e_6 + e_7).
\end{aligned} \tag{34}
$$

Единичные элементы этих систем соответственно: $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f_1 + f_3 + f_5 + f_7$.

Пусть $N = \sum_{k=1}^{8} n_k e_k \in \Gamma_1$, $M = \sum_{k=1}^{8} m_k f_k \in \Gamma_2$.

Тогда компоненты чисел преобразуются по следующим правилам:

$$
\begin{aligned}
N = \sum_{k=1}^{8} n_k e_k \Leftrightarrow\ & n_1(f_1 + f_3 + f_5 + f_7) + n_2(-f_2 + f_4 - f_6 + f_8) +\\
& + n_3(-f_2 - f_4 - f_6 - f_8) + n_4(-f_1 + f_3 - f_5 + f_7) +\\
& + n_5(f_1 + f_3 - f_5 - f_7) + n_6(-f_2 + f_4 + f_6 - f_8) +\\
& + n_7(-f_2 - f_4 + f_6 + f_8) + n_8(-f_1 + f_3 + f_5 - f_7) =\\
= (n_1 - n_4 + n_5 - n_8)f_1 &+ (-n_2 - n_3 - n_6 - n_7)f_2 +\\
+(n_1 + n_4 + n_5 + n_8)f_3 &+ (n_2 - n_3 + n_6 - n_7)f_4 +\\
+(n_1 - n_4 - n_5 + n_8)f_5 &+ (-n_2 - n_3 + n_6 + n_7)f_6 +\\
+(n_1 + n_4 - n_5 - n_8)f_7 &+ (n_2 - n_3 - n_6 + n_7)f_8 = \sum_{k=1}^{8} m_k f_k = M \in \Gamma_2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, имеем:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= n_1 - n_4 + n_5 - n_8, & m_2 &= -n_2 - n_3 - n_6 - n_7,\\
m_3 &= n_1 + n_4 + n_5 + n_8, & m_4 &= n_2 - n_3 + n_6 - n_7,\\
m_5 &= n_1 - n_4 - n_5 + n_8, & m_6 &= -n_2 - n_3 + n_6 + n_7,\\
m_7 &= n_1 + n_4 - n_5 - n_8, & m_8 &= n_2 - n_3 - n_6 + n_7.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Тогда норма в системе Γ_2 такая:

$$
\mathrm{N}(M) = \left(\prod_{i=1}^{4}(m_{2i-1}^2 + m_{2i}^2)\right) \cdot \sum_{i=1}^{4} f_{2i-1},
$$

а сопряжение —

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{4}((m_{2i-1}f_{2i-1} - m_{2i}f_{2i}) \cdot \prod_{j=1;j\neq i}^{4}(m_{2i-1}^2 + m_{2i}^2)).$$

Если сюда подставить выражения компонентов m_i через n_i в соответствии с (35), а базис f заменить базисом e по (33), то получим выражение для нормы $\mathrm{N}(N)$ и сопряжения $\overline{N}$ в ГЧС $\Gamma_2(f,8) = Д(W_1(h,2), C \oplus C(g,4))$. Ввиду его громоздкости это выражение здесь не приводится. Однако следует отметить, что эта громоздкость не идет ни в какое сравнение с размерами выражения, получаемого путем вычисления детерминанта (7), который будет представлять собой многочлен, являющийся суммой 8! = 40320 одночленов. И с этим выражением пришлось бы оперировать при решении линейной системы (8), чем предопределяется и сложность выражения для $\overline{N}$. Эти выражения не только необозримы при работе с ними на бумаге, но и представляют сложности при применении систем аналитических вычислений.

4. Пример ГЧС 8-й размерности $\Gamma_1(e,8) = Д(Д(W(g,2), W(h,2)), W(k,2))$ и $\Gamma_2(f,8) = Д(Д(W_1(g,2), W_1(h,2)), W_1(k,2))$.

Рассмотрим две изоморфные гиперкомплексные системы 8-й размерности $\Gamma_1(e,8) = Д(Д(W(g,2), W(h,2)), W(k,2))$ и $\Gamma_2(f,8) = Д(Д(W_1(g,2), W_1(h,2)), W_1(k,2))$, полученные двукратным удвоением ГЧС W (соответственно W_1) такой же системой. Первая из них будет ГЧС размерности $n = 8$ со следующей таблицей умножения:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3	e_6	e_5	e_8	e_7
e_3	e_3	e_4	e_1	e_2	e_7	e_8	e_5	e_6
e_4	e_4	e_3	e_2	e_1	e_8	e_7	e_6	e_5
e_5	e_5	e_6	e_7	e_8	e_1	e_2	e_3	e_4
e_6	e_6	e_5	e_8	e_7	e_2	e_1	e_4	e_3
e_7	e_7	e_8	e_5	e_6	e_3	e_4	e_1	e_2
e_8	e_8	e_7	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

(36)

Вторая ГЧС Γ_2:

	f_1	f_2	...	f_8
f_1	f_1	0	...	0
f_2	0	f_2	...	0
...	...	...	...	...
f_8	0	0	...	f_8

(37)

Их изоморфизм определяется следующим линейным преобразованием элементов базисов:

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7+f_8, & e_5 &= f_1+f_2+f_3+f_4-f_5-f_6-f_7-f_8,\\ e_2 &= f_1-f_2+f_3-f_4+f_5-f_6+f_7-f_8, & e_6 &= f_1-f_2+f_3-f_4-f_5+f_6-f_7+f_8,\\ e_3 &= f_1+f_2-f_3-f_4+f_5+f_6-f_7-f_8, & e_7 &= f_1+f_2-f_3-f_4-f_5-f_6+f_7+f_8,\\ e_4 &= f_1-f_2-f_3+f_4+f_5-f_6-f_7+f_8, & e_8 &= f_1-f_2-f_3+f_4-f_5+f_6+f_7-f_8. \end{aligned} \tag{38}$$

Единичные элементы этих систем соответственно: $\varepsilon_1 = e_1$; $\varepsilon_2 = \sum_{i=1}^{8} f_i$.

Пусть $N = \sum_{k=1}^{8} n_k e_k \in \Gamma_1$, $M = \sum_{k=1}^{8} m_k f_k \in \Gamma_2$.

Тогда компоненты чисел преобразуются по следующим правилам:

$$\begin{aligned} N=\sum_{k=1}^{8} n_k e_k \Leftrightarrow\ & n_1(f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7+f_8)+n_2(f_1-f_2+f_3-f_4+f_5-f_6+f_7-f_8)+\\ & +n_3(f_1+f_2-f_3-f_4+f_5+f_6-f_7-f_8)+n_4(f_1-f_2-f_3+f_4+f_5-f_6-f_7+f_8)+\\ & +n_5(f_1+f_2+f_3+f_4-f_5-f_6-f_7-f_8)+n_6(f_1-f_2+f_3-f_4-f_5+f_6-f_7+f_8)+\\ & +n_7(f_1+f_2-f_3-f_4-f_5-f_6+f_7+f_8)+n_8(f_1-f_2-f_3+f_4-f_5+f_6+f_7-f_8)=\\ =(n_1+n_2&+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8)f_1+(n_1-n_2+n_3-n_4+n_5-n_6+n_7-n_8)f_2+\\ +(n_1+n_2&-n_3-n_4+n_5+n_6-n_7-n_8)f_3+(n_1-n_2-n_3+n_4+n_5-n_6-n_7+n_8)f_4+\\ +(n_1+n_2&+n_3+n_4-n_5-n_6-n_7-n_8)f_5+(n_1-n_2+n_3-n_4-n_5+n_6-n_7+n_8)f_6+\\ +(n_1+n_2&-n_3-n_4-n_5-n_6+n_7+n_8)f_7+(n_1-n_2-n_3+n_4-n_5+n_6+n_7-n_8)f_8=\sum_{k=1}^{8} m_k f_k = M\in\Gamma_2 \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} m_1 &= n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8, & m_5 &= n_1+n_2+n_3+n_4-n_5-n_6-n_7-n_8,\\ m_2 &= n_1-n_2+n_3-n_4+n_5-n_6+n_7-n_8, & m_6 &= n_1-n_2+n_3-n_4-n_5+n_6-n_7+n_8,\\ m_3 &= n_1+n_2-n_3-n_4+n_5+n_6-n_7-n_8, & m_7 &= n_1+n_2-n_3-n_4-n_5-n_6+n_7+n_8,\\ m_4 &= n_1-n_2-n_3+n_4+n_5-n_6-n_7+n_8, & m_8 &= n_1-n_2-n_3+n_4-n_5-n_6+n_7+n_8. \end{aligned} \tag{39}$$

Тогда норма в системе Γ_2 такая:

$$\mathrm{N}(M) = (\prod_{i=1}^{8} m_i)\cdot\sum_{i=1}^{8} f_i\ , \tag{40}$$

а сопряжение —

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{8} (\prod_{j=1;\, j\neq i}^{4} m_j) f_i\,. \tag{41}$$

Для того чтобы перейти в систему Γ_1, нужно и в (40), и в (41) подставить выражения (38) и (39). Полученные выражения также достаточно громоздки. При этом здесь также верно то замечание, которое сформулировано в предыдущем случае.

Выводы

Предложенный подход позволяет в некоторых важных для практики случаях строить выражения для норм и сопряженных чисел без проведения громоздких преобразований и решения систем уравнений высоких размерностей.

1. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

2. *Синьков М.В.* Матричные представления изоморфных гиперкомплексных числовых систем / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2010. — Т. 12, № 4. — С. 43–53.

3. *Синьков М.В.* Представления экспонент в изоморфных гиперкомплексных числовых системах / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13 № 2. — С. 27–37.

4. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. — М.: Наука, 1973. — 400 с.

5. *Чеботарев Н.Г.* Введение в теорию алгебр / Н.Г. Чеботарев. — М.: ЛКИ, 2008. — 88 с.

6. *Изучение* построений сопряженных элементов в гиперкомплексных числовых системах. Ч. 1 / М.В. Синьков, Я.А Калиновский, Т.Г. Постникова, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2002. — Т. 4, № 1. — С. 38–42.

7. *Изучение* построений сопряженных элементов в гиперкомплексных числовых системах. Ч. 2 / М.В. Синьков, Я.А Калиновский, Т.Г. Постникова, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2002. — Т. 4, № 2. — С. 11–15.

Поступила в редакцию 02.09.2011