УДК 004.94

Я. А. Калиновский[1], **Ю. Е. Бояринова**[1,2], **А. С. Сукало**[1]
[1]Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина
[2]Национальный технический университет Украины «КПИ»
Проспект Победы, 37, 03056 Киев, Украина

Исследование свойств обобщенных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности, полученных процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда

С помощью процедуры удвоения Грассмана-Клиффорда синтезированы обобщенные гиперкомплексные числовые системы (ГЧС) четвертой размерности. Наличие параметров в определении этих систем делает их обобщением целых классов различных ГЧС. Исследованы алгебраические и функциональные свойства обобщенных ГЧС и их связи с ГЧС низших размерностей.

***Ключевые слова**: гиперкомплексная числовая система, процедура удвоения Грассмана-Клиффорда, базис ГЧС, характеристическое уравнение, экспоненциальная функция, ассоциированная система дифференциальных уравнений, коммутативность.*

Введение

Гиперкомплексные числовые системы нашли широкое применение при решении многих задач науки и техники: в механике твердого тела для описания вращения в пространстве; в задачах навигации, ориентации и управлением движением; в компьютерной анимации; исследовании деформации упругих конструкций; фильтрации цветных изображений; криптографии; построении быстрых алгоритмов обработки данных и многих других. Из наиболее «свежих» ссылок можно упомянуть [1–3, 21–22], более подробно в — [23].

При этом требуются различные ГЧС как по размерности, так и по алгебраическим, функциональным и вычислительным свойствам. Синтез ГЧС нужной размерности путем заполнения каким-либо образом таблицы умножения требует больших усилий. Здесь требуется, прежде всего, установить выполнение таких необходимых условий как коммутативность, ассоциативность, наличие единичного элемента, линейная независимость базисных элементов. Только при их выполнении возможно исследование алгебраических, функциональных и вычислительных свойств этой ГЧС, что требует немалых затрат времени.

Более рациональным представляется формирование классов ГЧС с прогнозируемыми свойствами. Такой подход можно осуществить с помощью существующих процедур удвоения и умножения размерности. Так как эти процедуры рекуррентны, то получаемые на высших стадиях рекурсии ГЧС как бы наследуют свойства удваиваемых ГЧС. При введении в таблицы умножения ГЧС некоторого количества параметров этот подход позволяет синтезировать целые классы ГЧС с общими свойствами, что значительно повышает процессы математического моделирования различных объектов и явлений.

Процедуры удвоения ГЧС

Рекуррентные процедуры удвоения ГЧС позволяют строить ряды ГЧС все увеличивающихся размерностей. Существуют два типа процедур удвоения: процедуры Кейли-Диксона (КД-процедура) и процедуры Грассмана-Клиффорда (ГК-процедура).

КД-процедуры позволяют получать вполне нормированные ГЧС размерности 2^n, где $n \in N$ — порядок удвоения [4–8]. При $n > 4$ они неассоциативные.

ГК-процедуры позволяют получить более широкие классы ГЧС как по размерности, так и по свойствам [5, 9]. Рассмотрим подробнее процесс удвоения по ГК-процедуре, которая в рамках данной работы будет широко использоваться в дальнейшем.

Для последующего изложения условимся о следующих обозначениях. В самом общем случае ГЧС будет обозначаться символом $\Gamma(e,n)$, где $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ — базис $\Gamma(e,n)$; n — размерность ГЧС $\Gamma(e,n)$.

В том случае, когда речь идет о ГЧС конкретного типа, она будет обозначаться именем своего типа, как, например, рассмотренная выше система двойных чисел $W(e)$. Здесь уже размерность можно не указывать, так как она известна из типа ГЧС. Однако имя базиса указывать нужно, так как при удвоении могут рассматриваться два экземпляра одной и той же ГЧС, но базисы у них нужно различать.

Если рассматривается коммутативная ГЧС в общем виде, то ее таблица умножения в самом общем случае будет иметь вид:

$$\begin{array}{c|cccc} \Gamma & e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ \hline e_1 & e_1e_1 & e_1e_2 & \dots & e_1e_n \\ e_2 & e_1e_2 & e_2e_2 & \dots & e_2e_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_n & e_1e_n & e_2e_n & \dots & e_ne_n \end{array} . \tag{1}$$

Введем далее обозначение оператора удвоения системы $\Gamma_1(e,n)$ системой $\Gamma_2(f,2)$:

$$Д\left(\Gamma_1(e,n), \Gamma_2(f,2)\right). \tag{2}$$

Результатом выполнения оператора удвоения $Д$ в данном случае будет некоторая ГЧС (коммутативная) размерности $2n$. Ее базис, обозначение которого — ef, будет таким:

$$ef = \{e_1 f_1, e_1 f_2, e_2 f_1, e_2 f_2, ..., e_n f_1, e_n f_2\}, \quad (3)$$

то есть, можно написать $Д(\Gamma_1(e,n), \Gamma_2(f,2)) = \Gamma_3(ef,2n)$.

Заметим, что размерность полученной ГЧС равна $2n$ исключительно из-за коммутативности ГЧС Γ_1 и Γ_2. В противном случае размерность полученной системы в общем случае должна была быть равной $4n$. Если ввести соотношения между элементами базиса $e_i f_j$ и $f_j e_i$, то размерность снижается. Так, например, для кватернионов $e_i f_i = f_i e_i$; $e_i f_j = -f_j e_i$, и размерность кватернионов равна 4.

Рассмотрим удвоение $Д(\Gamma_1(e,2), \Gamma_2(f,2)) = \Gamma_3(ef,4)$. Базис системы $\Gamma_3(ef,4)$: $ef = \{e_1 f_1, e_1 f_2, e_2 f_1, e_2 f_2\}$. А таблица умножения примет вид:

$\Gamma_3(ef,4)$	$e_1 f_1$	$e_1 f_2$	$e_2 f_1$	$e_2 f_2$
$e_1 f_1$	$e_1 f_1 e_1 f_1$	$e_1 f_1 e_1 f_2$	$e_1 f_1 e_2 f_1$	$e_1 f_1 e_2 f_2$
$e_1 f_2$	$e_1 f_2 e_1 f_1$	$e_1 f_2 e_1 f_2$	$e_1 f_2 e_2 f_1$	$e_1 f_2 e_2 f_2$
$e_2 f_1$	$e_2 f_1 e_1 f_1$	$e_2 f_1 e_1 f_2$	$e_2 f_1 e_2 f_1$	$e_2 f_1 e_2 f_2$
$e_2 f_2$	$e_2 f_2 e_1 f_1$	$e_2 f_2 e_1 f_2$	$e_2 f_2 e_2 f_1$	$e_2 f_2 e_2 f_2$

. (4)

Если рассматривается коммутативное удвоение, то есть $e_i f_j = f_j e_i$, то любые компоненты базисов можно коммутировать друг с другом. Значит, вычисления произведений элементов базисов в таблице (4) выполняются по правилам: $e_i f_j \cdot e_k f_l = e_i e_k \cdot f_j f_l$. Далее сомножители вычисляются по законам умножения своих систем. Для упрощения двухсимвольные обозначения элементов базиса можно заменить односимвольными, что будет показано далее.

Обобщенная ГЧС размерности 2

Как показано в [4, 10], любая неканоническая ГЧС размерности 2 изоморфна ГЧС вида

Q_2	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$pe_1 + qe_2$

. (5)

При этом, если дискриминант этой ГЧС $k = p + \frac{q^2}{4}$ положителен, то система изоморфна системе двойных чисел *W*; если *k* отрицательно — системе комплексных чисел C; если равен нулю, то эта ГЧС изоморфна системе дуальных чисел D [3].

Система кватернионов H получается некоммутативным удвоением ГЧС (5) с параметрами $p=-1, q=0$, то есть системы комплексных чисел C, с помощью процедуры Грассмана-Клиффорда:

$$H = Д_н(C,C),$$

где $Д_н$ — оператор некоммутативного удвоения.

Система квадриплексных чисел K получается аналогично системе кватернионов, но удвоение здесь уже коммутативное:

$$K = Д_k(C,C),$$

где $Д_k$ — оператор коммутативного удвоения.

Для иллюстрации работы коммутативного и некоммутативного операторов удвоения приведем таблицы умножения квадриплексных чисел K и кватернионов H:

K	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

H	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

(6)

Несмотря на небольшие отличия в устройстве таблиц умножения для квадриплексных чисел K и кватернионов H, их свойства кардинально отличаются.

Операндами операторов удвоения могут быть различные гиперкомплексные числовые системы. При этом будут получаться различные ГЧС четвертого порядка, свойства и законы операций которых придется устанавливать отдельно для каждой системы.

Использование в операторах удвоения обобщенных ГЧС-вида позволяет получать целые классы гиперкомплексных числовых систем четвертого порядка с двумя параметрами, которые будут фигурировать во всех свойствах и операциях над числами в этих ГЧС. Простая подстановка значений этих параметров дает свойства этих ГЧС.

В принципе в операторе удвоения могут использоваться как одинаковые ГЧС Q_2, так и разные в том смысле, что у них будут различные наборы значений параметров. Поскольку второй вариант гораздо сложнее при синтезе ГЧС, то на первом этапе исследования ограничимся первым вариантом, как это делалось при синтезе кватернионов и квадриплексных чисел. То есть здесь речь идет об «автоудвоении» системы Q_2.

Коммутативное автоудвоение системы Q_2

Пусть есть два экземпляра ГЧС Q_2. Несмотря на то, что эти системы одинаковые, и таблица умножения имеет вид (5), для описания действия оператора удвоения их необходимо различать в том смысле, что идентификаторы базисов у них различны. Но таблицы умножения одинаковы с точностью до идентификатора базиса, что никак не отражается на свойствах системы и законах операций в них.

Итак, задача сводится к вычислению результатов действия оператора коммутативного удвоения на ГЧС $Q_2^1(e)$ и $Q_2^2(f)$:

$$Q_4^к(ef) = Д_к(Q_2^1(e), Q_2^1(f)). \tag{7}$$

Если базисы исходных систем имеют вид $e = \{e_1, e_2\}$ и $f = \{f_1, f_2\}$, то базис полученной удвоением системы ef будет прямым произведением базисов:

$$ef = \{e_1 f_1, e_1 f_2, e_2 f_1, e_2 f_2\}. \tag{8}$$

Размерность базиса 4 получается ввиду коммутативности базисных элементов: $e_i f_j = f_j e_i$. Далее для построения таблицы умножения необходимо найти всевозможные произведения базисных элементов базиса ef. При этом учитывается разрешение коммутирования всех базисных элементов обоих исходных базисов e и f между собой.

Рассмотрим несколько примеров.

1. $e_1 f_1 \cdot e_1 f_1 = e_1 e_1 \cdot f_1 f_1 = e_1 f_1$.

Здесь второй член равенства получается из первого коммутацией e_1 и f_1. Далее каждый сомножитель вычисляется по таблице умножения (5). Знак умножения можно опустить, так как получаются уже обозначения элементов базиса.

2. $e_1 f_2 \cdot e_1 f_2 = e_1 e_1 \cdot f_2 f_2 = e_1(pf_1 + qf_2) = p \cdot e_1 f_1 + q \cdot e_1 f_2$.

3. $e_2 f_2 \cdot e_2 f_2 = e_2 e_2 \cdot f_2 f_2 = (p \cdot e_1 + q \cdot e_2)(p \cdot f_1 + q \cdot f_2) =$

$$= p^2 \cdot e_1 f_1 + pq \cdot e_1 f_2 + pq \cdot e_2 f_1 + q^2 \cdot e_2 f_2.$$

Двухсимвольное обозначение элементов базиса ef загромождает формулы. Поэтому целесообразно заменить базис (8) базисом $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$. С учетом этого таблица умножения для ГЧС (7) примет вид:

$Q_4^к(E)$	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	E_2	E_3	E_4
E_2	E_2	$pE_1 + qE_2$	E_4	$pE_3 + qE_4$
E_3	E_3	E_4	$pE_1 + qE_3$	$pE_2 + qE_4$
E_4	E_4	$pE_3 + qE_4$	$pE_2 + qE_4$	$p^2E_1 + pqE_2 + pqE_3 + q^2E_4$

. (9)

Исследование этой ГЧС дает результаты для множества ГЧС, полученных коммутативным автоудвоением системы Q_2 с различными параметрами p и q. А так как множество этих параметров бесконечно, то и все результаты исследования системы $Q_4^к$ распространяются на бесконечное множество ГЧС четвертой размерности. Например, чтобы применить формулу умножения двух чисел $M = \sum_{i=1}^{4} m_i e_i$ и $X = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i$ в какой-либо конкретной ГЧС четвертой размерности, полученной автоудвоением, достаточно в формулу умножения в системе $Q_4^к$

$$M \cdot X = (m_1x_1 + pm_2x_2 + pm_3x_3 + p^2m_4x_4)e_1 + (m_1x_2 + m_2(x_1 + qx_2) + pm_3x_4 + m_4(px_3 + pqx_4))e_2 + \\ + (m_1x_3 + pm_2x_4 + m_3(x_1 + qx_3) + m_4(px_2 + pqx_4))e_3 + (m_1x_4 + m_2(x_3 + qx_4) + m_3(x_2 + qx_4) + \\ + m_4(x_1 + qx_2 + qx_3 + q^2x_4))e_4$$

подставить параметры p и q. Такой подход упрощает исследования ГЧС, а также программно-алгоритмическое обеспечение для выполнения операций в рассматриваемых конкретных ГЧС.

Некоммутативное автоудвоение системы Q_2

Вычисление результатов действия оператора некоммутативного удвоения в общих чертах аналогично коммутативному случаю, но есть принципиальные отличия, на которых остановимся подробнее.

Здесь задача сводится к вычислению результатов действия оператора некоммутативного удвоения на ГЧС $Q_2^1(e)$ и $Q_2^2(f)$:

$$Q_4^н(ef) = Д_к(Q_2^1(e),\ Q_2^1(f)). \qquad (10)$$

Базис системы $Q_4^н(ef)$ строится, как и ранее: если базисы исходных систем имеют вид $e = \{e_1, e_2\}$ и $f = \{f_1, f_2\}$, то базис полученной удвоением системы ef также будет прямым произведением базисов

$$ef = \{e_1f_1, e_1f_2, e_2f_1, e_2f_2\},$$

то есть принимается $e_i f_j = f_j e_i$, но при вычислении произведений базисных элементов необходимо придерживаться следующих правил:

1) элемент с индексом «1» коммутируется с любым элементом исходного базиса: $e_1 f_j = f_j e_1$; $e_i f_1 = f_1 e_i$;

2) элементы с индексами «2» антикоммутируют:

$$e_2 f_2 = -f_2 e_2.$$

Таким образом, размерность базиса также равна четырем.

Далее для построения таблицы умножения необходимо найти всевозможные произведения базисных элементов базиса ef с учетом приведенных выше правил.

При этом первый столбец и первая строка таблицы умножения в соответствии с первым правилом полностью совпадают с таблицей для $Q_4^к$. А другие клетки таблицы могут принципиально отличаться. Поэтому приведем расчеты полностью:

1) $e_1f_2 \cdot e_1f_2 = e_1e_1 \cdot f_2f_2 = e_1(pf_1 + qf_2) = pe_1f_1 + qe_1f_2$;

2) $e_1f_2 \cdot e_2f_1 = -e_1e_2 \cdot f_2f_1 = -e_2f_2$;

3) $e_1f_2 \cdot e_2f_2 = -e_1e_2 \cdot f_2f_2 = -e_2(pf_1 + qf_2) = -pe_2f_1 - qe_2f_2$;

4) $e_2f_1 \cdot e_1f_2 = e_2e_1 \cdot f_1f_2 = e_2f_2$;

5) $e_2f_1 \cdot e_2f_1 = e_2e_2 \cdot f_1f_1 = (pe_1 + qe_2)f_1 = pe_1f_1 + qe_2f_1$;

6) $e_2f_1 \cdot e_2f_2 = e_2e_2 \cdot f_1f_2 = (pe_1 + qe_2)f_2 = pe_1f_2 + qe_2f_2$;

7) $e_2f_2 \cdot e_1f_2 = e_2e_1 \cdot f_2f_2 = e_2(pf_1 + qf_2) = pe_2f_1 + qe_2f_2$;

8) $e_2f_2 \cdot e_2f_1 = -e_2e_2 \cdot f_2f_1 = -(pe_1 + qe_2)f_2 = -pe_1f_2 - qe_2f_2$;

9) $e_2f_2 \cdot e_2f_2 = -e_2e_2 \cdot f_2f_2 = -(pe_1 + qe_2)(pf_1 + qf_2) =$
$= -p^2e_1f_1 - pqe_1f_2 - pqe_2f_1 - q^2e_2f_2.$

Здесь также целесообразно заменить базис (8) односимвольным базисом. Однако ему следует сопоставить односимвольный базис $E = \{E_1, E_3, E_2, E_4\}$, так как в противном случае базисные элементы кватерниона $(p = -1,\ q = 0)$ будут умножаться по правилу «против часовой стрелки», что противоречит общепринятому «по часовой стрелке». С учетом этого таблица умножения в системе $Q_4^н$ примет следующий вид:

$Q_4^н(E)$	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	E_2	E_3	E_4
E_2	E_2	$pE_1 + qE_2$	E_4	$pE_3 + qE_4$
E_3	E_3	$-E_4$	$pE_1 + qE_3$	$-pE_2 - qE_4$
E_4	E_4	$-pE_3 - qE_4$	$pE_2 + qE_4$	$-p^2E_1 - pqE_2 - pqE_3 - q^2E_4$

. (11)

При небольших отличиях таблиц умножения (9) и (11) структура и свойства систем и $Q_4^н$ сильно отличаются. Так, например, формула умножения двух чисел будет выглядеть так:

$$M \cdot X = (m_1x_1 + pm_2x_2 + pm_3x_3 - p^2m_4x_4)e_1 + (m_1x_2 + m_2(x_1 + qx_2) + pm_3x_4 - m_4(px_3 + pqx_4))e_2 +$$
$$+ (m_1x_3 - pm_2x_4 + m_3(x_1 + qx_3) + m_4(px_2 - pqx_4))e_3 + (m_1x_4 - m_2(x_3 + qx_4) + m_3(x_2 + qx_4) +$$
$$+ m_4(x_1 + qx_2 - qx_3 - q^2x_4))e_4.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что ГЧС $Q_4^к$ являются ассоциативными, однако ГЧС $Q_4^н$ неассоциативна при $q \neq 0$. Действительно, рассмотрим в системе $Q_4^н$ тождество $(E_2E_3)E_4 = E_2(E_3E_4)$:

$$(E_2E_3)E_4 = E_4E_4 = -p^2E_1 - pqE_2 - pqE_3 - q^2E_4;$$

$$E_2(E_3E_4) = E_2(-pE_2 - qE_4) = -p(pE_1 + qE_2) - qE_2E_4 =$$
$$= -p^2E_1 - pqE_2 - q(pE_3 + qE_4) = -p^2E_1 - pqE_2 - pqE_3 - q^2E_4,$$

т.е. тождество $(E_2E_3)E_4 = E_2(E_3E_4)$ выполняется. Однако, другие тождества, например, $(E_3E_2)E_4 = E_3(E_2E_4)$ не выполняются:

$$(E_3E_2)E_4 = -E_4E_4 = p^2E_1 + pqE_2 + pqE_3 + q^2E_4;$$

$$E_3(E_2E_4) = E_3(pE_3 + qE_4) =$$
$$= p(pE_1 + qE_3) + q() - pE_2 - qE_4 = p^2E_1 + pqE_2 - pqE_3 - q^2E_4.$$

Значит, $(E_2E_3)E_4 \neq E_2(E_3E_4)$.

Свойство неассоциативности не оказывает влияния на расчеты, если в моделях нет уравнений степени выше второй. В противном случае надо следить за порядком вычислений.

Выводы

В работе синтезированы две обобщенные ГЧС четвертой размерности, представляющие два класса ГЧС: коммутативные и некоммутативные (кватернионноподобные) ГЧС. Изучение свойств этих обобщенных ГЧС позволяет получить эти свойства для любых ГЧС из вышеназванных классов.

Задачей дальнейших исследований является изучение изоморфизмов обобщенных ГЧС конкретным каноническим ГЧС, их алгебраические, функциональные и вычислительные свойства, что позволит применять их в задачах математического моделирования.

1. *Степанов В.А.* Гиперкомплексная теория истины самореферентных предложений для (¬,↔)-языка / В.А. Степанов // Логико-философские штудии. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 196–197.

2. *Wafo Soh C.* Hypercomplex analysis and integration of systems of ordinary differential equations / C. Wafo Soh, M. Fazal // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2016. — Vol. 39, N 14. — P. 4139–4157.

3. *Young Soo S.* Orientation estimation using a quaternion-based indirect Kalman filter with adaptive estimation of external acceleration / S. Young Soo // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. — 2010. — Vol. 59, N 12. — P. 3296–3305.

4. *Калиновский Я.А.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.

5. *Сильвестров В.В.* Системы чисел / В.В. Сильвестров // Соросовский образовательный журнал. — 1998. — № 8. — С. 121–127.

6. *Baez J.C.* The Octonions [Электронный ресурс] / J.C. Baez. — Режим доступа: http://math/ucr.edu/home/ baez/ Octonions/octonions.html (2001)

7. *Chaitin-Chatelen F.* Geometry and Algebra. [Электронный ресурс] / F.Chaitin-Chatelen, T. Meskauskas, A. Zaoui. — Режим доступа: http://www.cerfacs.fr/algor/reports/2000/TR-PA-00-74.ps.gz(2000)

8. *Chaitin-Chatelen F.* The computing power of Geometry [Электронный ресурс] / F. Chaitin-Chatelen // CERFACS Technical Report TR/PA/99/74. — Режим доступа: http://www.cerfacs.fr/algor/reports/2000/TR-PA-99-74.ps.gz (1999)

9. *Noether E.* Hypercomplex Grossen und Darstellungstheorie / E. Noether //Mathematische Zeitschrift. — 1929. — Vol. 30 — P. 641–692.

10. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников.— М.: Наука, 1973. — 144 с.

11. *Бояринова Ю.Е.* Неканонические гиперкомплексные числовые системы размерности 2 и их изоморфизмы / Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13, № 1. — С. 29–38.

12. *Клипков С.И.* Обобщенный анализ матричных представлений ассоциативных гиперкомплексных числовых систем, используемых в задачах энергетики / И.С. Клипков // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 28–41.

13. *Ell T.A.* Quaternion Algebra, in Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing / T.A. Ell, N.L. Bihan, S.J.Sangwine. — NJ, USA.: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2014.

14. *Computing* Characteristics of One Class of Non-commutative Hypercomplex Number Systems of 4-dimension [Электронный ресурс] / Y.O. Kalinovsky, D.V. Lande, Y.E. Boyarinova, A.S. Turenko. — Режим доступа: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1409/1409.3193.pdf

15. *Калиновский Я.А.* Структура гиперкомплексного метода быстрого вычисления линейной свертки дискретных сигналов / Я.А. Калиновский // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2013. — Т. 15, № 1. — С. 31–44.

16. *Flaut C.* Some equations in algebras obtained by the Cayley-Dickson process / C. Flaut // An. St. Univ. Ovidius Constanta. — 2001. — Vol. 9, N 2. — P. 45–68.

17. *Ortolani F.* Quaternion Digital Signal Processing: a Hypercomplex Approach to Information Processing / F.Ortolani, A. Uncini // Internacional Siberian Conference on Control and Communications. — 2016.

18. *Реализация* шифрования с использованием кватернионов на схемах программируемой логики с помощью AlteraOpenCL SDK / А.Е. Андреев, Е.И. Духнич, В.А. Егунов [и др.] // Международная научная конференция «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2016)».

19. *US Patent*, US2014/0362220. Perifery-Monitoring Construction Mashinery / Izumikawa T., Kiyota Y., Aizawa S. — 2014.

20. *Hitzer E.* General two-sided quaternion Fourier transform, convolution and Mustard convolution / E. Hitzer // Advances in Applied Clifford Algebras. — 2016. — P. 1–15.

21. *Demir S.* Hyperbolic octonion formulation of the fluid Maxwell equations / S. Demir, M. Tanişli // Journal of the Korean Physical Society. — 2016. — Vol. 68, N 5. — P. 616–623.

22. *Расчет* отклонения поперечных сечений арматуры при автоматизированной гибке / С.В. Кузнецова [и др.] // Вісник Національного технічного університету України. — 2015. — Т. 50, № 2. — С. 106–114.

23. *Гіперкомплексні* числові системи: основи теорії, практичні використання, бібліографія / М.В. Синьков, Ю.Є. Боярінова, Я.О. Каліновський [та ін.] / К.: ІПРІ НАН України, 2009. — 44 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т проблем реєстрації інформації).

Поступила в редакцию 21.09.2016