

О введении производных высших порядков в параллельные коллокационные методы решения задачи Коши

Дмитриева О.А.

Донецкий национальный технический университет

dmitrieva@pmi.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Dmitrieva O.A. "On the introduction of higher-order derivatives in parallel collocation methods for the solution of the Cauchy problem" Parallel collocation methods of higher-order derivatives for the solution of the Cauchy problem are developed. Questions of generation of factors of settlement schemes of the generalized collocation methods are considered. Parallel collocation difference formulas are deduced both for integration on a step, and for block single-step and multistep multipoint difference schemes. To generated on the basis of such approach settlement formulas for integration on a step are equivalent to implicit multiphase methods, but possess smaller computing complexity and are very effective at the solution of the stiff equations.

Keywords: Cauchy problem, collocation points, parallel method, higher-order derivatives

Введение

Широко представленные на сегодняшний день последовательные коллокационные одно- и многошаговые методы [1 – 4] решения задачи Коши

$$x' = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (1)$$

хорошо зарекомендовали себя при численной аппроксимации систем обыкновенных дифференциальных уравнений стадийными методами

$$x_{n+1} = x_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (2)$$

$$k_i = x_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_i \tau, k_j).$$

При этом в одношаговых методах используются явные [5] и неявные [6] варианты введения коллокаций на шаге. Коллокационные методы строятся на интерполяционных многочленах Лагранжа, степени которых совпадают с количеством точек коллокации, а значения многочленов в этих точках совпадают с правыми частями дифференциальных уравнений в стадийных точках для одношаговых методов

$$v'(t_n + c_i \tau) = f(t_n + c_i \tau, v(t_n + c_i \tau)), \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ n = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq c_i \leq 1. \quad (3)$$

Теоретическое обоснование возможности построения одношаговых стадийных методов приведено в работах [1, 7, 8]. Коллоцирование может использоваться и в многошаговых блочных методах, которые носят чисто неявный характер, при этом коллокационный многочлен строится не по стадийным, а по расчетным точкам блока [6, 9]:

$$v'(t_n + i\tau) = f(t_n + i\tau, v(t_n + i\tau)), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (4)$$

Неявные коллокационные методы обладают, как правило, абсолютной устойчивостью, что позволяет использовать их при решении жестких задач, но при этом на них накладываются дополнительные требования, связанные с возможностью построения на их основе алгоритмов автоматического изменения размера шага интегрирования в зависимости от поведения исходной задачи (1). Если учесть еще и тот факт, что современные модели динамических объектов описываются системами большой размерности, то разрабатываемые методы должны быть ориентированы на использование в параллельных компьютерных системах и иметь хорошие показатели параллелизма.

Руководствуясь вышеизложенными положениями в работе для обеспечения более высокой скорости сходимости и автоматического управления шагом интегрирования предлагаются параллельные коллокационные блочные расчетные схемы со старшими производными, позволяющие обеспечивать автоматическое управление шагом интегрирования при моделировании динамических объектов в параллельных вычислительных системах.

Построение параллельных коллокационных методов решения с производными высших порядков

Если обобщить полученные в [5, 6, 9] результаты, связанные с разработкой параллельных коллокационных методов, и ввести вместо интерполяционных многочленов Лагранжа интерполяционные многочлены с кратными узлами, для которых потребовать совпадения в точках коллокации $t_n + c_i \tau$ или

$t_n + i\tau$ не только значений функции $f(t, x(t))$, но и ее производных $f^{(j)}(t, x(t))$, $j = 1, 2, \dots, p_i$ до порядка p_i включительно, можно значительно повысить скорость сходимости [10]. В качестве многочлена с кратными узлами предполагается использование многочлена Эрмита, который может быть построен в виде рекуррентных соотношений вида [11]

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1, \quad H_1(t) = 2t, \\ H_2(t) &= 4t^2 - 2, \dots, \\ H_{n+1}(t) &= 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t), \end{aligned}$$

общей формулы описания вида:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt} \quad (5)$$

или получен путем предельного перехода из многочленов Лагранжа и Ньютона [12].

Тогда расчетные схемы одношаговых многостадийных методов со старшими производными примут вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \tau \sum_{i=1}^s \sum_{l=0}^{p_i} \tau^l b_i^{(l)} f^{(l)}(t_n + c_i \tau, k_i), \quad (6) \\ k_i &= x_n + \tau \sum_{i=1}^s \sum_{l=0}^{p_i} \tau^l a_{ij}^{(l)} f^{(l)}(t_n + c_j \tau, k_j) \\ &\quad i = 1, 2, \dots, s, \end{aligned}$$

где $f^{(l)}(t_n + c_i \tau, k_i)$ – l-ая производная правой части, вычисленная в точке $t_n + c_i \tau$, $(f^{(0)}(t_n + c_i \tau, k_i) = f(t_n + c_i \tau, k_i))$.

$a_{ij}^{(l)}$, $b_i^{(l)}$ – элементы соответственных матриц и векторов схемы Батчера, которую из классического варианта

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^t \end{array}, \quad (7)$$

нужно привести к следующему модифицированному виду:

$$\begin{array}{c|cccc} c & A^{(0)} & A^{(1)} & \dots & A^{(p_i)} \\ \hline & b^{(0)t} & b^{(1)t} & \dots & b^{(p_i)t} \end{array} \quad (8)$$

Элементы стадийного вектора c размерности s , как правило, задаются. А элементы матрицы A размерности $s \times (s + p_1 + p_2 + \dots + p_s)$ и вектора b^t размерности $s + p_1 + p_2 + \dots + p_s$ находятся из соотношений:

$$a_{ij}^{(l)} = \int_0^{c_i} h_{j,l}(t) dt, \quad b_i^{(l)} = \int_0^1 h_{j,l}(t) dt, \quad (9)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, s,$$

где $h_{j,l}$ – многочлены Эрмита степени $s + p_1 + p_2 + \dots + p_s - l$ вида (5). Обозначим

$$k_j^{(0)} = v'(t_n + c_j \tau),$$

$$k_j^{(1)} = v''(t_n + c_j \tau),$$

...

$$k_j^{(p_i)} = v^{(p_i+1)}(t_n + c_j \tau)$$

и запишем интерполяционный многочлен Эрмита для таблицы

$$\left(c_j, k_j^{(0)}, k_j^{(1)}, \dots, k_j^{(p_i)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

в каждом узле которой выполняются соотношения

$$v'(t_n + c_j \tau) = \sum_{j=1}^s k_j^{(0)} h_{j,0}(t), \quad (10)$$

...

$$v^{(p_j+1)}(t_n + c_j \tau) = \sum_{j=1}^s k_j^{(p_j)} h_{j,p_j}(t).$$

Если проинтегрировать соотношения (10) по t от 0 до c_i с учетом расчетных формул (9), получим:

$$\begin{aligned} v'(t_n + c_j \tau) &= u_n + \tau \sum_{j=1}^s k_j^{(0)} \int_0^{c_i} h_{j,0}(t) dt = \\ &= u_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij}^{(0)} k_j^{(0)}, \quad (11) \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} v^{(p_j+1)}(t_n + c_j \tau) &= u_n + \tau \sum_{j=1}^s k_j^{(p_j)} \int_0^{c_i} h_{j,0}(t) dt = \\ &= u_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij}^{(p_j)} k_j^{(p_j)}. \end{aligned}$$

Исходя из соотношений:

$$v'(t_n + c_i \tau) = f^{(0)}(t_n + c_i \tau, v(t_n + c_i \tau)), \quad (12)$$

...

$$v^{(p_j+1)}(t_n + c_i \tau) = f^{(p_j)}(t_n + c_i \tau, v(t_n + c_i \tau)),$$

$$i = 1, 2, \dots, s, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и

$$k_i^{(0)} = f^{(0)} \left(t_n + c_i \tau, u_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij}^{(0)} k_j^{(0)} \right), \quad (13)$$

...

$$k_i^{(p_j)} = f^{(p_j)} \left(t_n + c_i \tau, u_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij}^{(p_j)} k_j^{(p_j)} \right)$$

проинтегрируем теперь интерполяционный многочлен Эрмита для таблицы

$$\left(c_j, k_j^{(0)}, k_j^{(1)}, \dots, k_j^{(p_j)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, s$$

по t от 0 до 1. Учитывая (9) получим:

$$\begin{aligned} v(t_n + \tau) &= u_n + \\ &+ \tau \sum_{i=1}^s \sum_{l=0}^{p_i} \tau^l b_i^{(l)} f^{(l)}(t_n + c_i \tau, k_i). \quad (14) \end{aligned}$$

Соотношения (13) и (14) определяют s-стадийный неявный метод с шаблоном, приведенным на рисунке 1.

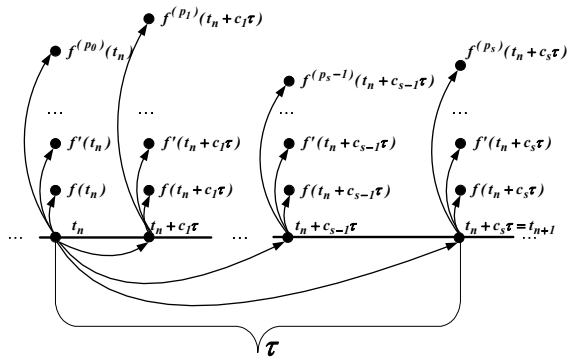


Рисунок 1. – Шаблон разностной схемы коллокационного s-стадийного метода с производными высших порядков

Нетрудно заметить, что при отказе от использования производных высших порядков метод (6) переходит в коллокационный метод, эквивалентный стадийному неявному методу типа Рунге-Кутты (2) с шаблоном, приведенным на рисунке 2.

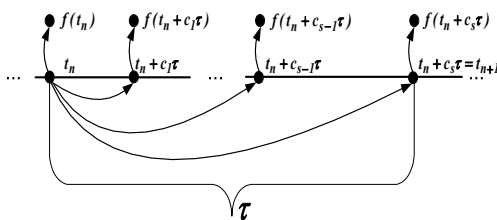


Рисунок 2. – Шаблон разностной схемы коллокационного s-стадийного метода

Генерация расчетных схем заданной точности с использованием производных высших порядков

Исходя из высокой трудоемкости задачи, связанной с генерацией расчетных схем, для вывода коэффициентов (9) коллокационных многостадийных методов с производными высоких порядков (6) в работе используется компьютерная система *Mathematica (Wolfram Research, Inc.)*. Метод строится для каждого фиксированного расположения стадийных точек и порядков производных в них. Используя возможности системы, связанные с построением интерполяционных многочленов, символьным интегрированием и разложением приращений в ряды, определяются расчетные коэффициенты и порядок точности метода, оценивается устойчивость.

Рассмотрим построение двухстадийного метода с первыми производными в произвольных стадийных точках c_1 и c_2 .

Сформируем базисные многочлены Эрмита, которые соответствуют шаблону двухстадийного метода с первыми производными, приведенному на рисунке 3.

$$h_{1,0}(t) = f_{c1} + \frac{(t - c_2)(f_{c1} - f_{c2})}{(c_1 - c_2)},$$

$$h_{2,0}(t) = f_{c2} + \frac{(t - c_1)(f_{c2} - f_{c1})}{(c_2 - c_1)},$$

$$h_{1,1}(t) = f_{c1} + \frac{(c_1 - t)^2(c_2 - t)(f_{c1} - f_{c2}) - (f_{c2} - f_{c1} + (c_1 - c_2)f'_{c1})}{(c_1 - c_2)^2} - (c_1 - t)f'_{c1} +$$

$$\frac{(c_1 - t)^2((f_{c2} - f_{c1}) - (f_{c1} - f_{c2} + (c_1 - c_2)f'_{c2}))}{(c_1 - c_2)^2},$$

$$h_{2,1}(t) = f_{c2} + \frac{(c_2 - t)^2(c_1 - t)(f_{c1} - f_{c2}) - (f_{c2} - f_{c1} + (c_1 - c_2)f'_{c1})}{(c_2 - c_1)^2} - (c_1 - t)f'_{c1} +$$

$$\frac{(c_1 - t)^2((f_{c2} - f_{c1}) - (f_{c1} - f_{c2} + (c_1 - c_2)f'_{c2}))}{(c_1 - c_2)^2}.$$

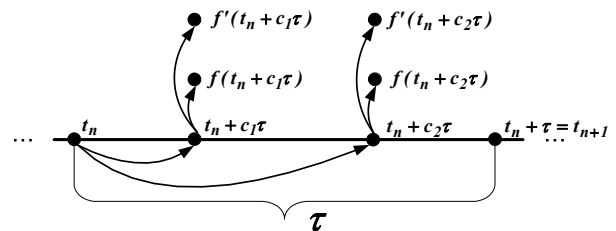


Рисунок 3. – Шаблон разностной схемы коллокационного 2-хстадийного метода с производными первого порядка

Введем стадийные точки $c_1 = 1/3$, $c_2 = 2/3$ и получим расчетные коэффициенты неявного коллокационного двухстадийного метода с высшими производными по шаблону рисунка 3. Приведем полученные коэффициенты в виде модифицированной схемы Батчера

1/3	-1/6	1/2	-17/108	-7/108
2/3	2/3	0	-4/27	-2/27
	-3/8	6/5	-1/5	-3/20

Порядок точности построенного метода определим, оценивая невязку в расчетной точке. Разложим в ряды Тейлора в окрестности точки t_n, x_n соответствующие приращения и функции, сохранив члены до шестого порядка по τ . В разложениях для сокращения записей положим $t_n = 0, x_n = x_0$ и сформируем выражение для невязки $r_{n+1} = \Delta u - \Delta x$ получим

$$r_{n+1} = \frac{7x_0^{(6)}\tau^6}{194400} + O[\tau]^7.$$

Таким образом, рассмотренный коллокационный неявный метод имеет шестой порядок аппроксимации, в то время как обычный коллокационный метод с таким же расположением стадий имеет четвертый порядок [9]:

$$r_{n+1} = \frac{x_0^{(4)}\tau^4}{216} + O[\tau]^5.$$

Таким образом, порядок точности метода, коэффициенты которого генерируются на многочленах Эрмита и содержат производные высших порядков, можно повышать не только за счет добавления новых стадийных точек, но и вводя в шаблоны дополнительные порядки для производных на стадиях. Так, добавив в шаблон разностной схемы (рис. 3) дополнительные производные 2-го порядка (рис. 4) получим метод

$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{13}{6}$	$\frac{31}{90}$	$\frac{29}{90}$	$\frac{37}{1080}$	$-\frac{49}{3240}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	-2	$\frac{16}{45}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{14}{405}$	$-\frac{2}{135}$
	$\frac{4869}{1120}$	$-\frac{243}{70}$	$\frac{49}{80}$	$\frac{22}{35}$	$\frac{79}{1680}$	$-\frac{1}{28}$

с порядком точности

$$r_{n+1} = \frac{139x_0^{(8)}\tau^8}{1028764800} + O[\tau]^9.$$

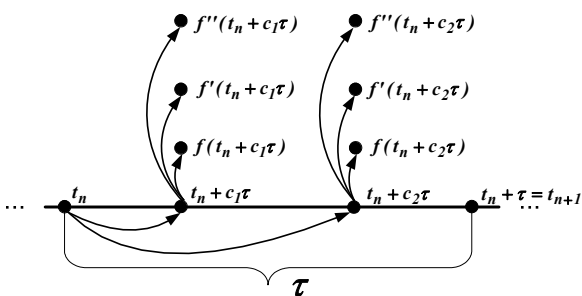


Рисунок 4. – Шаблон разностной схемы коллокационного 2-хстадийного метода с производными второго порядка

Если на этапе генерации метода отказаться от использования производных высших порядков, задавая в коллокационных точках $t_n + c_i\tau$ только значения

$$f^{(0)}(t_n + c_i\tau, k_i), i = 1, 2, \dots, s,$$

можно достаточно просто получать расчетные схемы различных неявных стадийных методов типа Рунге – Кутты. Т.е. можно утверждать, что все одношаговые многостадийные методы

являются частными случаями коллокационных методов с производными высших порядков.

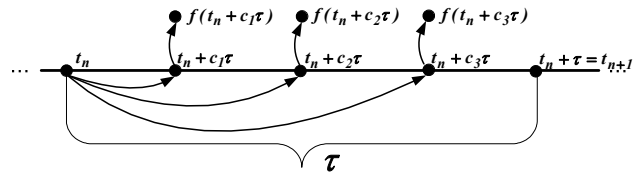


Рисунок 5. – Шаблон разностной схемы коллокационного 4-стадийного метода без производных высших порядков

Используя шаблон, приведенный на рис. 5, выберем узлы коллокации, которые были введены в методе Кунцмана_Батчера [1]:

$$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

Поскольку в шаблоне не используются производные старшего порядка, базисные многочлены Эрмита совпадут с базисными многочленами Лагранжа и примут следующий вид:

$$h_{1,0}(t) = \frac{(t - c_2)(t - c_3)}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)},$$

$$h_{2,0}(t) = \frac{(t - c_1)(t - c_3)}{(c_2 - c_1)(c_2 - c_3)},$$

$$h_{3,0}(t) = \frac{(t - c_1)(t - c_2)}{(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)}.$$

Используя формулы (9), определяются расчетные коэффициенты. После проведения исследований, аналогичных приведенным для предыдущего метода, получим выражение для невязки, которая имеет 6-ой порядок аппроксимации

$$r_{n+1} = \frac{x_0^{(6)}\tau^6}{120} + O[\tau]^7.$$

Тогда можно говорить о том, что соответствующим выбором точек коллокации и исключая производные высших порядков, из методов (6) можно получить любой стадийный метод. В то же время, выбирая за основу известный стадийный метод и вводя дополнительные производные в точках коллокации, можно значительно повысить порядок точности метода.

Генерация разностных схем параллельных коллокационных методов с высшими производными заданного порядка точности

Для точек коллокации, которые вводятся на шаге интегрирования и в которых заданы значения старших производных, можно сгенерировать разностные схемы, основной отличительной особенностью которых будет наличие в коллокационных точках

$t_{n+i} = t_n + c_i \tau \in [t_n, t_{n+1}]$, $i = 1, 2, \dots, s$
 значений производных многочлена
 $f'(t_{n+i}, u_{n+i}), f''(t_{n+i}, u_{n+i}), \dots, f^{(l)}(t_{n+i}, u_{n+i})$.

Обозначим через u_{n+i} приближенное значение решения через и правую часть

$$F_{n+i} = f(t_{n+i}, u_{n+i})$$

Введем такие же обозначения для производных высших порядков, т.е.

$$F'_{n+i} = f'(t_{n+i}, u_{n+i}),$$

...

$$F^{(l)}_{n+i} = f^{(l)}(t_{n+i}, u_{n+i}).$$

Получим интерполяционный многочлен Эрмита $H_s(t)$ по таблице

$$\{t_{n+i}, F_{n+i}, F'_{n+i}, \dots, F^{(l)}_{n+i}\}$$

Проинтегрируем уравнение (1) по t , заменив в функцию $f(t, x(t))$ на полином $H_s(t)$, получим

$$u_{n+i} = u_n + \int_{t_n}^{t_{n+i}} H_s(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (15)$$

систему нелинейных разностных уравнений для определения значений u_{n+i} , $i = 1, 2, \dots, s$ приближенного решения задачи Коши (1).

На основе соотношения (15) генерируются разностные схемы коллокационных методов с высшими производными заданного порядка точности, причем точность метода будет напрямую определяться количеством точек коллокации, равномерностью их расположения и порядком производных, введенных в точках коллокации. Например, для метода с точками коллокации

$$\left\{t_n + \frac{\tau}{3}, t_n + \frac{2\tau}{3}, t_n + \tau\right\}$$

и с заданными в точках коллокации первыми производными (рис. 6).

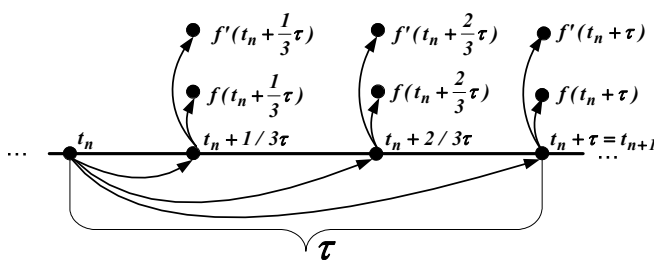


Рисунок 6. – Шаблон разностной схемы коллокационного 3-стадийного метода с равноотстоящими узлами и первыми производными

Тогда систему разностных уравнений можно представить в виде:

$$u_{n+1/3} = u_n + \tau \left(\frac{38}{45} F'_{n+\frac{2}{3}} - \frac{949}{720} F'_{n+\frac{1}{3}} + \frac{581}{720} F'_{n+1} \right) -$$

$$- \frac{\tau^2}{2160} \left(637 F'_{n+\frac{1}{3}} + 4320 F'_{n+\frac{2}{3}} + 173 F'_{n+1} \right),$$

$$u_{n+2/3} = u_n + \frac{\tau}{45} \left(46 F'_{n+\frac{2}{3}} - 53 F'_{n+\frac{1}{3}} + 37 F'_{n+1} \right) -$$

$$- \tau^2 \left(\frac{13}{45} F'_{n+\frac{1}{3}} + \frac{14}{27} F'_{n+\frac{2}{3}} + \frac{11}{135} F'_{n+1} \right),$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{80} \left(96 F'_{n+\frac{2}{3}} - 93 F'_{n+\frac{1}{3}} + 77 F'_{n+1} \right) -$$

$$- \frac{\tau^2}{80} \left(23 F'_{n+\frac{1}{3}} + 160 F'_{n+\frac{2}{3}} + 7 F'_{n+1} \right).$$

Порядок аппроксимации разностных уравнений равен 7 и оценивается выражением

$$r_{n+1} = - \frac{2x_0^{(7)} \tau^7}{382725} + O[\tau]^8$$

Порядок аппроксимации можно повысить, если увеличить количество точек коллокации, оставляя при этом фиксированным старший порядок производных. Выберем в качестве коллокационных точек последовательность

$$\left\{t_n + \frac{\tau}{4}, t_n + \frac{\tau}{2}, t_n + \frac{3\tau}{4}, t_n + \tau\right\}$$

с шаблоном, приведенным на рисунке 7.

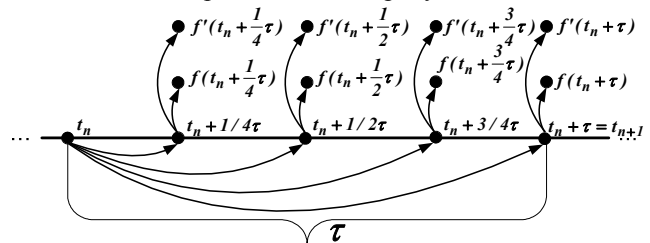


Рисунок 7. – Шаблон разностной схемы коллокационного 4-стадийного метода с равноотстоящими узлами и первыми производными

Будем иметь систему сгенерированных разностных уравнений с порядком аппроксимации

$$r_{n+1} = - \frac{73x_0^{(9)} \tau^9}{6502809600} + O[\tau]^{10}.$$

Порядок аппроксимации можно повысить также, увеличивая порядок производных при фиксированном количестве точек коллокации. Так, изменяя шаблон, приведенный на рисунке 6, на шаблон (рис. 8) с увеличенным порядком производных, оставляя в рассмотрении те же самые точки коллокации

$$\left\{t_n + \frac{\tau}{3}, t_n + \frac{2\tau}{3}, t_n + \tau\right\},$$

получаем порядок аппроксимации разностных уравнений выше, чем при введении дополнительной коллокационной точки

$$r_{n+1} = -\frac{17x_0^{(10)}\tau^{10}}{105815808000} + O[\tau]^{11}.$$

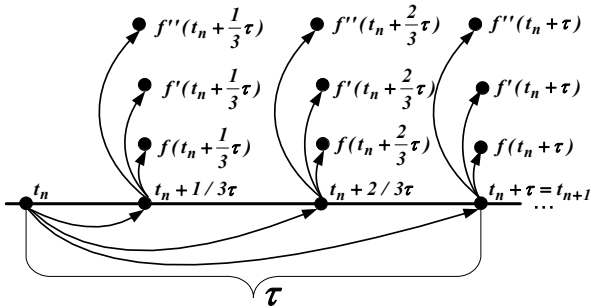


Рисунок 8. – Шаблон разностной схемы коллокационного 3-стадийного метода с равноотстоящими узлами и вторыми производными

Если оценить временную сложность модификации коллокационных методов, то повышение точности за счет введения дополнительной коллокационной точки приводит к увеличению размерности системы на одно уравнение, а повышение точности за счет увеличения на одну единицу порядка производных приводит к необходимости проведения дополнительной итерации, что гораздо предпочтительнее. Выбор точек коллокации на отрезке аппроксимации может осуществляться неравномерно, т.е. фактически, можно подобрать точки коллокации, расположение которых будет соответствовать расположению стадийных точек известных последовательных методов.

Заключение

Предложенные в работе параллельные коллокационные методы с производными высоких порядков являются абсолютно устойчивыми, что позволяет использовать их при решении жестких задач с возможностью вариации шага интегрирования. Введение в расчетные схемы старших производных значительно повышает порядок точности метода, не увеличивая при этом число стадий и сохраняя размерность системы уравнений для определения неизвестных.

Литература

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
2. Kastlunger K.H., Wanner G. Runge-Kutta

processes with multiple nodes //Computing. 1972. V. 9. P. 9 – 24.

3. Stroud A.H., Stancu D.D., Quadrature formulas with multiple Gaussian Nodes//SIAM J. Numer.Anal., 1965. – V. 2, P. 129 – 143.

4. Куликов Г.Ю., Хрусталёва Е.Ю. Об автоматическом управлении длиной шага и порядком в одношаговых коллокационных методах со старшими производными // Вычислительная математика и математическая физика. Том 50, № 6, 2010, С. 1060 – 1077.

5. Фельдман Л.П. Параллельные коллокационные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений// Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка», вып. 9 (132), Донецк: ДонНТУ, 2008. – С. 33 – 40.

6. Фельдман Л.П., Дмитриева О.А. Разработка обобщенных коллокационных блочных методов// Сборник трудов конференции МОДЕЛИРОВАНИЕ – 2012. К.: Институт проблем моделирования в энергетике, 2012. – С. 434 – 437.

7. Аульченко С.М., Латыпов А.Ф., Никуличев Ю.В. Метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием интерполяционных полиномов Эрмита // Вычислительная математика и математическая физика. 1998. Т. 38. № 10. С. 1665 – 1670.

8. Куликов Г.Ю., Меркулов А.И. Об одношаговых коллокационных методах со старшими производными для решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительная математика и математическая физика. Том 44, № 10, 2004, С. 1782 – 1807.

9. Фельдман Л.П., Дмитриева О.А. Разработка параллельных алгоритмов управления шагом на основе параллельных коллокационных блочных методов // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія “Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка” (ІКОТ-2012). Випуск 16(190) – Донецьк: ДонНТУ. – 2012. С. 36 – 43.

10. Латыпов А.Ф., Попик О.В. Численный метод решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многосвязных интерполяционных полиномов Эрмита // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 2. С. 78 – 85.

11. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці – К.: Видавнична група ВНУ, 2006. – 480 с.

12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.