УДК 372.851

Эдвард Айвазян, д.пед. н., профессор
Ереванский государственный университет

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ НАХОЖДЕНИЯ МНОЖЕСТВА (ОБЛАСТИ) ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Статья «Об одном способе нахождения множества (области) значений функции» Эдварда Ишхановича Айвазяна посвящена одной из до сих пор недостаточно разрешенных проблем методики преподавания математики в средней общеобразовательной школе – нахождения множества или области значений функции. Автором предлагается универсальный способ разрешения данной проблемы с помощью решения параметрических уравнений.

Ключевые слова: *функция, множество (область) значений функции, область определения функции, параметрические уравнения, параметр.*

Введение. Ученики старших классов, особенно, выпускники старшей школы – это будущие специалисти разных отраслей, поэтому необходимо сформировать у них прочные математические знания и умения.

Почти во всех школьных учебниках математики рассматриваются способы нахождения области определения различных типов функции. Однако редко встречаются учебники математики в которых заложена какая нибудь теория или методические рекомендации нахождения множества или области значений функции.

Основное содержание. Авторы учебников «Алгебра и начала анализа» ограничиваются лишь примерами таких («удобных») функций, область значений которых можно найти с помощью некоторых свойств, например, ограниченности тригонометрических функций синус и косинус, наибольших или наименьших значений квадратной функции или другими элементарными методами и т. д.

Приведем примеры подобных задач из некоторых учебников.

1. «Найдите множество значений функции:

1299. а) $x^2 - 4x + 3$; б) $8x - x^2 - 10$.

1300*. а) $4\cos x - 3\sin x$; б) $12\cos x + 5\sin x$.

1301. а) $\frac{1}{2-\cos 2x}$; б) $\frac{1}{3+\sin 2x}$ » [1; 359].

2. «45. Найдите область определения и область значений каждой из функций:

а) $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$; б) $y = 2 + \frac{4}{x-3}$;

в) $y = \frac{3}{x+1} - 1$; г) $y = 3 + 0{,}5\sin(x + \frac{\pi}{4})$» [2; 28].

3. « 6.5. Найдите множество значений функции:

а) y = D(sgnx); б) y = sgn(D(x)); в) $y = 3x^2 - 4x - 5$; г) $y = 5 - 2x - x^2$;

д) $y = x^4 + 7$; е) $y = x^5 + 3$; ж) $y = \sqrt[5]{x^5 + 2}$; з) $y = \sqrt[4]{x^5 + 1}$ » [3;201].

С этой точки зрения редким учебником является действующий учебник 12-ого класса «Алгебра и элементы математического анализа» РА (авторы Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян).

Область (множество) значений функции – это множество всех элементов, которые заданной функцией поставлены в соответствие элементов из ее области определения, т. е. если f: $X \to Y$, то множеством значений функции f называется множество Y_f всех таких элементов y∈Y, для каждого из которых существует такой элемент x∈X, что $f(x) = y$. Таким образом, область значений функции является образом ее области определения [4; 421].

Теперь переходим к обсуждению того нестандартного и универсального способа нахождения области значений функции, который, как отмечено выше, заложен в действующем в РА учебнике «Алгебра и элементы математического анализа – 12» [5].

Из вышесказанного следует, что область значений функции y = $f(x)$ есть множество тех чисел b, для которых существует некоторое число x, удовлетворяющее уравнению

$$f(x) = b\,. \quad (1)$$

Следовательно необходимо найти те значения параметра b, для которых уравнение (1) имеет корень.)

Вышеизложенную теорию иллюстрируем на примерах различных функции.

Пример 1. Найти область значений функции

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x} \text{ [5; 64].}$$

Исходя из вышеизложенного необходимо найти те значения параметра b, для которых уравнение

$$2x + \frac{3}{x} = b \quad (2)$$

имеет корень. Так как x $\neq 0$, то из (2) получается квадратичное (квадратное) уравнение

$$2x^2 - bx + 3 = 0, \quad (3)$$

которое имеет решение, если его дискриминант является неотрицательным, то есть

$$b^2 - 24 \gg 0 \Leftrightarrow b \in (-\infty; -2\sqrt{6}\,] \cup [2\sqrt{6}\,; +\infty).$$

Следовательно область значений функции y = 2x $+\frac{3}{x}$ есть множество $(-\infty; -2\sqrt{6}\,] \cup [2\sqrt{6}\,; +\infty)$.

Пример 2. Найти множество значений функции:

а) $y = \frac{3x+5}{x+1}$; б) $y = \frac{x}{x^2+4}$; в) $y = \frac{4x^2+1}{x}$;

г) $y = \frac{1}{x^2-9}$; д) $y = \frac{2x-1}{|x|+1}$; е) $y = \frac{2^x - 1}{2^{2x}+2^x}$ [5; 68].

Решения: а) Необходимо найти те значения параметра b, для которых уравнение

$$\frac{3x+5}{x+1} = b$$

имеет решение. Так как $x \neq -1$ и выражения $(3-b)$ и $(b-5)$ одновременно не равны нулю, то

$$\frac{3x+5}{x+1} = b \Leftrightarrow 3x + 5 = bx + b \Leftrightarrow (3-b)x = b - 5\,.$$

Следовательно $b \neq 3$, т. е. $b \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ [6; 86].

б) Имеем $x^2 + 4 \neq 0$ для всех x∈ R. Следовательно

$$\frac{x}{x^2+4} = b \Leftrightarrow x = bx^2 + 4b \Leftrightarrow bx^2 - x + 4b = 0.$$

А последнее уравнение имеет решение, если

$$\left[\begin{array}{l} b = 0 \\ \begin{cases} b \neq 0 \\ 1 - 16b^2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ \begin{cases} b \neq 0 \\ |b| \leq 0{,}25 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow b \in [-0{,}25; 0{,}25]$$ ([6; 86]).

в) Указание:

$$\frac{4x^2+1}{x} = b \Leftrightarrow 4x^2 - bx + 1 = 0.$$

г) Указание:

$$\frac{1}{x^2-9} = b \Leftrightarrow x^2 = \frac{1+9b}{b} \geq 0.$$

д) Решение: Имеем функций $y = \frac{2x-1}{x+1}$, где $x \geq 0$ и $y = \frac{2x-1}{1-x}$, где $x < 0$.

1) Пусть $y = \frac{2x-1}{x+1}$, где $x \geq 0$: Имеем

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = bx + b \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b+1}{2-b} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b+1}{b-2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow b \in [-1; 2)$.

2) Пусть $y = \frac{2x-1}{-x+1}$, где $x < 0$. Следовательно

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{1-x} = b \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = b - bx \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b + 2)x = b + 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = \frac{b+1}{b+2} < 0 \Leftrightarrow b \in (-2; -1)$,

так как выражения (b +1) и (b+2) не равны нулю одновременно. Значит

$b \in (-2; 2)$ [6; 86].

е) Имеем

$$\frac{2^x - 1}{2^{2x} + 2^x} = b \Leftrightarrow b \cdot 2^{2x} + (b - 1)2^x + 1 = 0. \quad (3)$$

Обозначим $2^x = t$, где $t > 0$. Следовательно необходимо найти те значения параметра b, для которых уравнение $bt^2 + (b-1)t + 1 = 0$ имеет положительное решение.

Для b=0 решение этого уравнения есть $t = 1$. Для $b \neq 0$ имеем квадратичное уравнение, которое имеет решение, если $D \geq 0$, т. е.

$$D = (b-1)^2 - 4b = b^2 - 4b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow b \in (-\infty; 3 - 2\sqrt{2}] \cup [3 + 2\sqrt{2}; +\infty).$$

Остается выяснить, при каких условиях хотя бы один из корней этого уравнения будет положительным.

Пусть корни этого уравнения есть t_1 и t_2. Так как $t_1t_2 = 1/6$, следовательно, если $b < 0$, то один из корней положительное, а другой - отрицательное число. Если $b > 0$, то корни имеют одинаковый знак, и $t_1 + t_2 = \frac{b-1}{b}$. Значит корни положительные, если

$$\frac{b-1}{b} > 0 \Leftrightarrow 0 < b < 1.$$

Итак,

$$\left[\begin{array}{l} b = 0 \\ \left[\begin{array}{l} b \in (-\infty; 3-2\sqrt{2}] \cup [3+2\sqrt{2}; +\infty) \\ b \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow b \in (-\infty; 3-2\sqrt{2}]. \end{array}\right.$$

Ответ: $E(f)=(-\infty; 3-2\sqrt{2}]$, [6;87].

Задачи для самостоятельного решения.

Пример 3. ([2;186], N 865). Найти множество значений функции:

а) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; б) $f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1}$;

в) $f(x) = \log_3 x + \log_x 3$; г) $f(x) = 4^x - 2^x + 1$.

Заключение. Данный метод нахождения области значений функции является более оптимальным, чем традиционные способы решения этой проблемы, так как он не зависит от типа функции.

Список используемых источников

1. Алгебра и начала анализа 9-10. / Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович, В. К. Смышляев. /проб. учебник/. – М. : “Просвещение”, 1981. – 384 с.
2. Алгебра и начала анализа 10-11 / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов и др.// : Под ред. А. Н. Колмогорова, 9-ое изд. – М. : “Просвещение”, 2000. – 365 с.
3. Алгебра и начала анализа. Задачник. / Авторы: Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, Е. А. Седова. // 10 кл. В 2 ч. Ч. 2, – М. : “Дрофа”, 2005. – 302 с.
4. Математический энциклопедический словарь. – М. : 1983. – 847 с.
5. Алгебра и элементы математического анализа – 12, / авторы: Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян. / Естественно-математические потоки. – Е. : “Тигран Мец”, 2011. – 206 с.
6. Айвазян Э. И. Алгебра и элементы математического анализа –12, Решебник, – Е. : “Эдит Принт”, 2011. – 260 с.
7. Айвазян Э. И. Алгебра и элементы математического анализа – 12, Методическое пособие для уч., естественно-математические потоки. – Е. : “Тигран Мец”, 2009. – 104 с.

Айвазян Едвард. Про один спосіб знаходження множини (області) значень функції.

Стаття «Про один спосіб знаходження множини чи області значень функції» Едварда Ішхановича Айвазяна присвячена одній з досі недостатньо вирішених проблем методики викладання математики в середній загальноосвітній школі – знаходження множини або області значень функції. Автором пропонується універсальний спосіб вирішення даної проблеми за допомогою рішення параметричних рівнянь.

Ключові слова: *функція, множина чи область значень функції, область визначення функції, параметричні рівняння, параметр.*

Ayvazyan Edvard. About a means of finding the domain of the function values.

Almost all Math manuals outline ways of finding a domain of a function. However very rarely we come across Math manuals containing a specific theory or instructions on finding the multitude of variables within a function.

The current article is dedicated to resolving that specific issue which is incorporated in the manual called «Algebra and Elements of Mathematical Analyses” for RA 12 th grade senior students. The method of resolving the above mentioned issue is fundamentally different from traditional approaches and is based on resolving the issue through parametric equation.

Key words: *function, a set of values within a function (domain), The domain of finding a function, parameters, parametric equations.*