УДК 528.481

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕНЗОРА КОМПОНЕНТ ШВИДКОСТЕЙ ДЕФОРМАЦІЙ

О. Марченко, К. Третяк, О. Серант
Національний університет “Львівська політехніка”

Ключові слова: тензор деформації, вектор швидкості, коваріаційна матриця.

Постановка проблеми

Останніми роками вивчення деформацій земної поверхні [5] геодезичними методами ґрунтується головно як на високоточних GPS, VLBI, SLR і DORIS-вимірах, так і на порівняно недавніх супутникових радарних інтерферометричних технологіях InSAR, які дають змогу істотно розширити дослідження змін земної поверхні в просторі і часі [1].

Згідно з принципом Коші–Гельмгольца зміну середовища, що деформується, можна подати у будь-який момент часу у формі суперпозиції трьох рухів: паралельного перенесення окремих блоків земної кори, їх обертального руху і чистої деформації [2]. Однак таке трактування змін земної поверхні повинно на практиці бути підкріпленим оцінкою точності величин, що визначаються, оскільки без такої оцінки зазначені зміни можуть інтерпретуватися лише простими деформаціями геодезичних мереж [3]. У роботі [6] оцінка точності виконана на основі правила оцінки точності функцій.

Проте, незважаючи на важливість отриманих результатів з вивчення деформацій земної поверхні разом з оцінюванням точності компонент симетричного тензора $\mathbf{S}_V$ швидкостей деформацій після опрацювання даних за способом найменших квадратів, автори не знайшли в літературі з побудови цього тензора $\mathbf{S}_V$ строгого оцінювання точності розв’язку задачі на власні числа і власні вектори.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо спочатку знаходження положень власних векторів. Оскільки власні значення Λ_1 і Λ_2 тензора

$$\mathbf{S}_V = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} & \dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda} \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda} & \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

або форму

$$\mathbf{S}_V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\chi}-\dot{\gamma}_1 & \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_2 & \dot{\chi}+\dot{\gamma}_1 \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

де прийнято такі позначення

$$\dot{\chi} = (\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda})/2, \quad \dot{\gamma}_1 = \dot{\varepsilon}_{\lambda\lambda} - \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi},$$
$$\dot{\gamma}_2 = 2\dot{\varepsilon}_{\varphi\lambda}, \qquad (3)$$

для швидкості середнього розширення поверхні регіону $\dot{\chi}$ або швидкості дилатації та компонент $\dot{\gamma}_1$ і $\dot{\gamma}_2$ загальної швидкості зсуву $\dot{\gamma}$ досліджуваного району. Зрозуміло, що швидкість $\dot{\gamma}$ можна просто визначити на основі компонент $\dot{\gamma}_1$ і $\dot{\gamma}_2$:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}\,. \qquad (4)$$

Отже, можемо отримати розв’язки характеристичного рівняння для тензора (2) у найзручнішій формі

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= (\dot{\chi}+\dot{\gamma})/2 \\ \Lambda_2 &= (\dot{\chi}-\dot{\gamma})/2 \end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

що відповідають власним векторам $\mathbf{\Lambda}_1$ і $\mathbf{\Lambda}_2$, і останні можна знайти як нетривіальний розв’язок однорідної (сингулярної) системи алгебраїчних рівнянь

$$(\mathbf{S}_V - \Lambda_j \mathbf{E})\cdot \mathbf{\Lambda}_j = 0\,, \qquad (6)$$

де $\mathbf{E}$ – (2×2) одинична матриця. Розглянемо матрицю системи (6) у векторній формі

$$\mathbf{S}_V - \Lambda_j \mathbf{E} = \left[\mathbf{s}_1 - \Lambda_j \mathbf{e}_1,\ \ \mathbf{s}_2 - \Lambda_j \mathbf{e}_2\right], \qquad (7)$$

де кожний допоміжний вектор $\mathbf{s}_i$ представляє i-й стовпчик матриці $\mathbf{S}_V$:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\chi}-\dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\chi}+\dot{\gamma}_1 \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

а $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$ – одиничні вектори прийнятої горизонтальної локальної системи координат.

Отже, система лінійних рівнянь (2) забезпечує такі дві умови ортогональності

$$(\mathbf{s}_i - \Lambda_j \mathbf{e}_i,\ \mathbf{\Lambda}_j) = 0, \quad (i = 1,2),\ (j = const). \qquad (9)$$

Отже, кожний власний вектор $\mathbf{\Lambda}_j$ буде нормальним до такої площини, в якій розміщені всі допоміжні вектори $\mathbf{s}_i - \Lambda_j \mathbf{e}_i$ для кожного фіксованого $j = const$. Трансформація матриці $\mathbf{S}_V - \Lambda_j \mathbf{E}$ у систему головних осей ($\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2$) приводить до співвідношення

$$\mathbf{S}_V - \Lambda_j \mathbf{E} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda_1 - \Lambda_j & 0 \\ 0 & \Lambda_2 - \Lambda_j \end{pmatrix}, \quad (10)$$

і для кожного j=1, 2 ми отримуємо

$$\mathrm{rank}(\mathbf{S}_V - \Lambda_j \mathbf{E}) = 1 \text{ якщо } \Lambda_1 > \Lambda_2. \quad (11)$$

Результат (11) відображає такий факт: існує лише один лінійно незалежний вектор на множині $\mathbf{s}_i - \Lambda_j \mathbf{e}_i$ за кожного фіксованого j = 1, 2. Отже, ми можемо одержати власний вектор $\mathbf{\Lambda}_j$ як векторний добуток відповідних лінійно незалежних векторів $\mathbf{s}_i - \Lambda_j \mathbf{e}_i$. Найефективніший і найпростіший розв'язок може бути сформований за аналогією з тривимірним випадком [4] обчисленням такого векторного добутку

$$\mathbf{Z}_j = (\mathbf{s}_1 - \Lambda_j \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{s}_2 - \Lambda_j \mathbf{e}_2), \quad (12)$$

який після стандартної нормалізації кожного вектора $\mathbf{Z}_j$ набуває форми

$$\mathbf{\Lambda}_j = \mathbf{Z}_j / \sqrt{(\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_j)}, \quad (13)$$

для визначення кожного власного вектора $\mathbf{\Lambda}_j$ при j = 1, 2. Перетворення (12) дає змогу подати ненормований власний вектор у простому вигляді

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{P} + \Lambda_j \mathbf{s} + \Lambda_j^2 \mathbf{e}, \quad (14)$$

де прийнято такі позначення

$$\mathbf{P} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (15)$$

Незважаючи на той факт, що отримані рівняння (13)–(15) дають строгий розв'язок задачі, практичне використання такого підходу може вважатися обґрунтованим, мабуть, починаючи з тривимірного випадку вивчення деформацій земної поверхні у 3D-просторі. Для тензора деформацій, що вивчається, на сфері у 2D-просторі існують значно простіші залежності, які дають змогу виконати повне оцінювання точності власних значень і положень головних осей на основі відомого тензора деформацій і його коваріаційної матриці.

Відзначимо, що власні значення Λ_1 і Λ_2 тензора (1) або (2) у цьому випадку набувають змісту швидкостей головних деформацій, які відповідають векторам швидкостей найбільшого $\mathbf{\Lambda}_1$ і найменшого $\mathbf{\Lambda}_2$ розширення у двох головних напрямах. У цьому випадку головні вектори характеризуються тим, що саме ці напрями вільні від деформацій зсуву. Азимут α_1 першої головної осі $\mathbf{\Lambda}_1$ може бути просто обчисленим за формулою (12), а азимут α_2 другого головного напряму $\mathbf{\Lambda}_2$ визначається з умови, що головні осі перпендикулярні одна до одної

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1}\right), \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2. \quad (16)$$

Тоді азимут $\beta = \alpha_1 + \pi/4$ напряму найбільшого зсуву відповідає бісектрисі кута між векторами найбільшого $\mathbf{\Lambda}_1$ і найменшого $\mathbf{\Lambda}_2$ розширення. Співвідношення (16) разом з розв'язком (2)–(5) задачі на власні числа дають змогу перейти до строгого оцінювання точності знайдених параметрів.

Формули для оцінки точності задачі на власні числа і власні вектори достатньо просто отримати, якщо як вихідна інформація приймається вектор

$$\mathbf{T} = \left[\dot{e}_{\varphi\varphi}, \; \dot{e}_{\lambda\lambda}, \; \dot{e}_{\varphi\lambda} \right]^T, \quad (17)$$

разом з коваріаційною матрицею $\mathbf{C}_{TT}$, яка визначається під час побудови поля горизонтальних швидкостей і компонент тензора деформацій на сфері. Враховуючи той факт, що основною функціональною залежністю для обчислення власних чисел стають співвідношення (5), які ґрунтуються на векторі

$$\mathbf{t} = \left[\dot{\chi}, \; \dot{\gamma}_1, \; \dot{\gamma}_2 \right]^T = \\ = \left[(\dot{e}_{\varphi\varphi} + \dot{e}_{\lambda\lambda})/2, \; \dot{e}_{\lambda\lambda} - \dot{e}_{\varphi\varphi}, \; 2\dot{e}_{\varphi\lambda} \right]^T, \quad (18)$$

поданому тут за допомогою (3), виникає додаткова задача попереднього оцінювання точності компонент вектора $\mathbf{t}$.

Починаючи з цієї задачі, ми використовуємо правило перетворення коваріацій, для якого у випадку (18) необхідно знайти матрицю часткових похідних від компонент вектора $\mathbf{t}$ за компонентами вихідного вектора $\mathbf{T}$. У результаті процедури диференціювання ми знаходимо (3×3)-матрицю часткових похідних

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

що дає змогу визначити повну коваріаційну матрицю $\mathbf{C}_{tt}$ вектора $\mathbf{t}$ (18) із застосуванням правила перетворення коваріацій

$$\mathbf{C}_{tt} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{C}_{TT} \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{T}} \right)^T. \quad (20)$$

Перед оцінюванням точності вектора власних чисел

$$\boldsymbol{\lambda} = \left[\Lambda_1,\ \Lambda_2\right]^T, \qquad (21)$$

нагадаємо, що кожне власне число може бути поданим залежністю від двох параметрів – дилатації $\dot{\chi}$ і загального зсуву $\dot{\gamma} = (\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2)^{1/2}$. Оскільки оцінка точності дилатації $\dot{\chi}$ та компонент зсуву обчислюється на основі (20), то дисперсія $\mathrm{var}(\dot{\gamma})$ параметра $\dot{\gamma}$ може бути знайдена у такій формі

$$\mathrm{var}(\dot{\gamma}) = \frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\mathbf{t}}\mathbf{C}_{tt}\left(\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\mathbf{t}}\right)^T = \frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\mathbf{t}}\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial\mathbf{T}}\mathbf{C}_{TT}\left(\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\mathbf{t}}\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial\mathbf{T}}\right)^T$$

$$\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\mathbf{t}} = \left[0,\ \frac{\dot{\gamma}_1}{\dot{\gamma}},\ \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}}\right]. \qquad (22)$$

Після диференціювання вектора (21) знаходимо (2×3)-матрицю часткових похідних від вектора $\boldsymbol{\lambda}$ власних чисел (21) за компонентами вектора $\mathbf{t}$ (18) і повну коваріаційну матрицю $\mathbf{C}_{\lambda\lambda}$ власних чисел тензора горизонтальних деформацій на геосфері

$$\mathbf{C}_{\lambda\lambda} = \frac{\partial\boldsymbol{\lambda}}{\partial\mathbf{t}}\mathbf{C}_{tt}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}}{\partial\mathbf{t}}\right)^T = \frac{\partial\boldsymbol{\lambda}}{\partial\mathbf{t}}\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial\mathbf{T}}\mathbf{C}_{TT}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}}{\partial\mathbf{t}}\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial\mathbf{T}}\right)^T,$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}}{\partial\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\dot{\gamma}_1}{2\dot{\gamma}} & \dfrac{\dot{\gamma}_2}{2\dot{\gamma}} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\dot{\gamma}_1}{2\dot{\gamma}} & -\dfrac{\dot{\gamma}_2}{2\dot{\gamma}} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

Отже, задача оцінювання точності положень головних осей фактично зводиться до визначення точності азимутів (16), які відповідають двом головним напрямам швидкостей найбільшого $\mathbf{\Lambda}_1$ і найменшого $\mathbf{\Lambda}_2$ розширення регіону. Застосовуючи правило перетворення коваріацій до першого із співвідношень (16), отримаємо

$$\mathrm{var}(\alpha_1) = \frac{\partial\alpha_1}{\partial\mathbf{t}}\mathbf{C}_{tt}\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial\mathbf{t}}\right)^T =$$

$$= \frac{\partial\alpha_1}{\partial\mathbf{t}}\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial\mathbf{T}}\mathbf{C}_{TT}\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial\mathbf{t}}\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial\mathbf{T}}\right)^T$$

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial\mathbf{t}} = \left[0\quad -\frac{\dot{\gamma}_1}{2\dot{\gamma}}\quad \frac{\dot{\gamma}_2}{2\dot{\gamma}}\right], \qquad (24)$$

дисперсію азимута першого головного напряму. Не важко показати, що дисперсії азимута α_2 другої головної осі та азимута β напряму найбільшого зсуву збігатимуться, оскільки збігаються часткові похідні від цих трьох параметрів.

Література

1. Bürgmann R. Synthetic aperture radar interferometry to measure earth's surface topography and its deformation / Bürgmann R., Rosen P.A., Fielding E.J. Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 2000. – Vol. 28. – P. 169–209.
2. Есиков Н.П. (1979) Тектонические аспекты анализа современных движений земной поверхности / Есиков Н.П. – Новосибирск: Наука, 1979. – 261 с.
3. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. – М.: Недра. 1968. – 436 с.
4. Marchenko A.N. A note on the eigenvalue – eigenvector problem / Marchenko A.N. – In: Kühtreiber N. (Ed.), Festschrift dedicated to Helmut Moritz on the occasion of his 70th birthday. – Graz University of Technology, Graz, 2003. – P. 143–154.
5. Третяк К. Дослідження деформації земної поверхні Центральної Європи за результатами GPS-спостережень перманентних станцій у 1992–2000 роках / Третяк К., Серант О. // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2004. – С. 41–49.
6. Демус Р.Т. Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.24.01 / Р.Т. Демус. – Львів: Нац. ун-т “Львівська політехніка”, 2002. – 18 с.

Оцінка точності визначення тензора компонент швидкостей деформацій

О. Марченко, К. Третяк, О. Серант

Розглянуто загальний аналітичний розв’язок задачі знаходження власних чисел та власних векторів тензора швидкостей деформацій. Виконана оцінка точності на основі правила строгого перетворення коваріацій.

Оценка точности определения тензора компонент скоростей деформаций

О. Марченко, К. Третяк, О. Серант

Рассмотрено общее аналитическое решение задачи определения собственных чисел и собственных векторов тензора скоростей деформаций. Выполнена их оценка точности на основании правила строгого преобразования ковариаций.

Accuracy estimate of the determination of strain rate tensor

A. Marchenko, K. Tretjak, O. Serant

General analytic solution of the eigenvalue-eigenvector problem for the strain rate tensor is considered. Accuracy estimate for such eigenvalue-eigenvector problem was done based on the rigorous error propagation rule.