

УДК 551.24+528.2/3

## ОЦІНЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ЗЕМНОЇ ПОВЕРХНІ, РЕДУКОВАНОЇ НА ГЕОСФЕРУ

О. Тадєєв

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

### Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими та практичними завданнями

Оцінювання деформацій земної поверхні за геодезичними даними – одне з актуальних завдань сучасної геодинаміки, яке є складовою частиною комплексних геолого-геофізичних досліджень напружено-деформованого стану Землі. Такі дослідження проводяться у межах численних вітчизняних та міжнародних програм наукового та прикладного характеру. Методи геодезичного моніторингу геодинамічних процесів передбачають повторні спостереження геодезичних мереж, опрацювання та інтерпретацію одержаних результатів з метою кількісного вираження сучасних рухів та деформацій фізичної поверхні Землі локального, регіонального та глобального масштабів. Значущість таких результатів для вирішення загальної проблеми очевидна як для здобуття наукових даних, так і з огляду на встановлення ступеня перетворення природного середовища та рівня безпеки життєдіяльності. Крім того, задача оцінювання деформацій поверхні глобального (планетарного) масштабу прямо пов'язана із задачами фізичної геодезії, спрямованими на вивчення фігури Землі.

### Аналіз досліджень та невирішені частини загальної проблеми

Теоретичною основою описування деформованого стану земної кори є теорія пружності [4]. За канонами теорії кору розглядають як суцільне середовище і для вираження параметрів деформації поділяють на елементи тих чи інших геометричних форм скінченного розміру за гіпотези, що такі елементи є твердими тілами. Пружне тверде тіло зазнає дії сил, які спричиняють зміщення та деформації. Основне положення теорії пружності полягає в тому, що за умови однорідності зміщення є лінійною вектор-функцією координат точок поверхні скінченного елемента, виражених у декартовій прямокутній системі простору  $E_2$  або  $E_3$ . По суті, теорія пружності займається дослідженням такої вектор-функції, яка зводиться до встановлення відповідного їй тензора деформації – геометричного об'єкта, який залежить від деформуючих сил та структури пружного чи абсолютно твердого тіла і виражає відповідне афінне перетворення векторного поля зміщень його поверхні. Такий тензор є носієм інформації про деформований стан скінченного елемента незалежно від характеру деформації [8].

Походження та дискретна структура геодезичних даних унеможливають пряме застосування теорії пружності до вирішення поставленої проблеми. Адже

геодезичні спостереження проводяться виключно на фізичній поверхні Землі, а встановлення тензора під час деформації можливе лише за умови визначення зміщень у вершинах об'ємних скінчених елементів і вздовж напрямних сторін між вершинами. З цієї причини за геодезичними даними виражають, як правило, горизонтальні деформації, використовуючи для цього найпростіші моделі скінчених елементів, у межах яких досягається простий аналітичний розв'язок задачі. Просторові деформації мають зміст лише за умови, що скінченим елементом у його тлумаченні з позицій теорії пружності є Земля як пружне тверде тіло планетарного масштабу.

Загальна теорія пружності дає змогу оцінювати деформацію скінченного елемента будь-якого характеру за однієї лише умови її однорідності [8]. На практиці, вирішуючи поставлену проблему, з метою досягнення простих рішень майбутній результат умисно спотворюють – компоненти тензора деформації визначають за лінеаризованими функціями, які виражають дійсний характер деформації. Цей підхід виправданий тоді, коли тензор виражає практично лінійну деформацію, а його компоненти відносяться до координатних осей у декартовій прямокутній системі. Отже, рішення спрямовується у межі лінійної теорії деформації суцільного середовища з її реалізацією на симплексах. У підсумку одержуємо класичний аналітичний розв'язок задачі [1, 2]. У тій самій роботі [1] розкрито рішення, де до встановлення тензора деформації залучено апарат білінійних функцій на скінчених елементах у формі чотирикутників з визначенням компонент тензора методом сплайн-інтерполяції. Збільшення кількості вузлів окремого скінченного елемента дає змогу не обмежуватись описуванням лише лінійної деформації. У роботі [8] розкрито можливості застосування функцій різної аналітичної структури для вираження тензора деформації, віднесеного до скінчених елементів різних геометричних форм залежно від кількості їх вершин. Однак такі можливості, вирішуючи поставлену проблему, не беруть до уваги. У підсумку, застосовуючи метод лінеаризації для встановлення компонент тензора, фактично маємо наближений розв'язок задачі з віднесенням параметрів деформації до координатних площин. При цьому, здебільшого, правомірність застосування лінійної моделі до конкретної реалізації геодинамічного процесу ніяк не аргументується. Якщо за такого підходу описувати деформації скінченного елемента за криволінійними (наприклад, геодезичними чи сферичними) координатами, то її параметри будуть віднесені до дотичної площини, але не до взятої за основу криволінійної

координатної поверхні. Така локальна скінченно-елементна апроксимація Землі під час визначення деформацій планетарного масштабу може спричинити суттєві похибки кінцевих результатів та суб'єктивну інтерпретацію, особливо за умови вибору скінченних елементів великих розмірів. Отже, щоб надійно оцінити параметри деформації земної поверхні, необхідно виробити узагальнені підходи і рішення окресленої проблеми.

**Постановка завдання**

Факт фізичного походження геодинамічних процесів безсумнівний. Тому результати оцінювання сучасних рухів та деформацій земної кори і її поверхні повинні розглядатись у взаємозв'язку з результатами досліджень різних полів даних фізичного походження (зокрема, гравітаційного, геомагнітного тощо), які, як визнано, домінують у визначенні параметрів та фігури Землі. Отже, підхід до вирішення поставленої проблеми повинен бути адекватним. Зважаючи на це, скористаємося традиційними моделями фізичної геодезії і визначимо метою вираження параметрів деформації поверхні, віднесеної тут до геосфери, як найпростішої з таких моделей.

**Виклад основного матеріалу досліджень**

Вирішуючи теоретичні питання, пов'язані з визначенням фігури Землі, різні величини, одержані їх вимірами в дискретних точках простору (зокрема земної поверхні), узагальнюють на всю земну поверхню, віднесено до геосфери. Для цього результати вимірів представляють гармонічними функціями сферичних координат  $\varphi, \lambda$  – геоцентричної широти (або

полярної віддалі  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ) та довготи. Вибір геоцентричної системи зумовлений відносною простотою моделювання силових полів Землі з метою встановлення рівневих поверхонь. З погляду глобальної геодинаміки питання вибору координатних систем є дискусійним. Однак більшість дослідників віддають перевагу геоцентричній системі, реалізованій за великою кількістю точок на різних літосферних плитах. Така система стійкіша до змін у кількості та розподілі станцій спостережень, обсягу і точності їх результатів, а також до власних рухів плит [9].

З метою узагальнення на геосферу емпіричних дискретних значень деякої величини  $f$ , виражених довільною неперервною функцією  $f(\theta, \lambda)$ , їх можна подати розкладом у нескінченний ряд за сферичними функціями степеня  $n$ :

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda). \quad (1)$$

На практиці, звичайно, такий розклад доводиться обмежувати певним ступенем  $m$ , що зумовлено, наприклад, обсягом наявних результатів спостережень або визначеною точністю представлення емпіричних даних  $f(\theta, \lambda)$ . Для явного вираження функцій  $Y_n(\theta, \lambda)$  і визначення відповідних коефіцієнтів

розкладу емпіричні значення виражають у точках сфери з координатами  $\theta, \lambda$ :

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n (A_{nk} P_{nk}(\theta) \cos k\lambda + B_{nk} P_{nk}(\theta) \sin k\lambda). \quad (2)$$

Функції  $P_{nk}(\theta) \cos k\lambda$  і  $P_{nk}(\theta) \sin k\lambda$  називають приєднаними сферичними функціями, а  $P_{nk}(\theta)$  – приєднаною функцією Лежандра, яка при  $k = 0$  іменується головною сферичною функцією (або поліномом Лежандра). Сферичні функції заданого степеня  $n$  завжди містять одну головну сферичну функцію і  $2n$  приєднаних сферичних функцій.  $A_{nk}$  і  $B_{nk}$  – коефіцієнти, які підлягають визначенню. Якщо розклад здійснюється до степеня  $m$ , то кількість невідомих коефіцієнтів розкладу буде  $(m + 1)^2$  [12]. Розв'язуючи деякі задачі фізичної геодезії, емпіричні значення і відповідні приєднані функції усереднюють за сферичними трапеціями. Тоді до формули (2) необхідно внести відповідні заміни:  $f(\theta, \lambda)$ ,  $P_{nk}(\theta) \cos k\lambda$  і  $P_{nk}(\theta) \sin k\lambda$ . Методику представлення емпіричних даних рядами сферичних функцій та її застосування у фізичній геодезії розкривають, наприклад, роботи [1, 6, 9, 11 тощо].

Отже, задача розкладу цієї функції  $f(\theta, \lambda)$  у ряд сферичних функцій зводиться до найкращого наближення заданої сукупності їх значень на сфері лінійною комбінацією осцилювальних функцій. Якщо підвищувати їх степінь, зростає детальність покриття поверхні правильною системою апроксимуючих ділянок і, тим самим, підвищується точність представлення емпіричних даних.

Спробуємо пристосувати розкриті можливості узагальнення емпіричних даних на геосфері до вирішення поставленої проблеми.

Виділимо на геосфері довільну замкнену неперервну область  $\Delta$ , яку визначають  $n$  точок  $M_i(\theta_i, \lambda_i) \in \Delta$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Точки  $M_i$  – геодезичні пункти, редуковані з фізичної поверхні Землі на геосферу. Їх положення виражено у системі геоцентричних координат  $\theta, \lambda$  станом на часову епоху  $t_0$ . Допустимо, протягом періоду  $\delta t$  з певних причин земна поверхня зазнала деформації, внаслідок чого порушилось взаємне положення точок  $M_i$ . Станом на  $t_0 + \delta t$  його визначають координати  $\theta', \lambda'$ . Але  $M_i(\theta'_i, \lambda'_i) \in \Delta'$ . Отже, область  $\Delta$  трансформувалась у область  $\Delta'$ . Нехай співвідношення між  $\theta, \lambda$  і  $\theta', \lambda'$  для точок  $M_i$  виражають функції

$$\left. \begin{aligned} \theta' &= u(\theta, \lambda) \\ \lambda' &= v(\theta, \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

За умови збереження у  $\Delta'$  властивості замкненої неперервної області можна стверджувати, що  $\Delta$  відобразилась на  $\Delta'$ , а функції (3) реалізують таке відображення.

Якщо функції (3) однозначні, неперервні, диференційовані та задовольняють умову  $\frac{\partial(\theta', \lambda')}{\partial(\theta, \lambda)} \neq 0$ , то

таке відображення є гомеоморфною проекцією. Відображення, які задовольняють умови гомеоморфізму, описує теорія поверхонь диференціальної геометрії. В загальній теорії поверхонь довільної кривини доведено, що функції, які їх описують, – гармонічного типу. Для поверхонь обертання сталої кривини – це сферичні функції [3, 10]. Зважаючи на це, а також беручи до уваги, що геосфера є поверхнею обертання, маємо всі підстави розглядати відображення (3) з позицій теорії поверхонь.

З погляду практичної реалізації відображення (3) рядами сферичних функцій (2) постає проблема, пов'язана з порушенням умов гомеоморфізму, зокрема, взаємної однозначності та неперервності. Очевидно, в такій ситуації результат рішення необхідно оцінювати тими чи іншими показниками точності, які, разом з тим, мають виражати ступінь наближення рішення до строгого з погляду відповідності умовам гомеоморфізму. З огляду на такі реалії, для визначення коефіцієнтів ряду (2) і подальшої оцінки точності доцільно залучити спосіб найменших квадратів, виходячи з умови

$$\sum \left( f(\theta, \lambda) - \sum_{n=0}^m Y_n(\theta, \lambda) \right)^2 = \min. \quad (4)$$

Остання умова має наслідком обмеження степеня  $m$  ряду (2), адже кількість невідомих коефіцієнтів  $(m+1)^2$  не повинна перевищувати кількості  $n$  пунктів  $M_i$ , які визначають відображувані області. Для забезпечення надійної оцінки точності необхідне виконання умови  $(m+1)^2 < n$ . Отже, щоб досягти надійного результату вирішення поставленого завдання, необхідно забезпечити достатній обсяг вихідних даних.

Аналитичне вираження функцій (3), які реалізують відображення, є лише достатньою умовою описування перебігу геодинамічного процесу. З погляду вирішення поставленої проблеми, за ними потрібно оцінити деформований стан поверхні у межах відображуваної області. Характеристики деформації поверхні – це геометричні параметри, котрі виражають зміну метричних властивостей окресленої області і є, по суті, числовими оцінками властивостей її гомеоморфної проекції (3). У теорії відображення поверхонь сумісне застосування властивості гомеоморфізму з представленням поверхні її метричними мірами дає змогу описувати не тільки власне проекцію, а й зміну внутрішньої геометрії відображуваних областей. Тож для забезпечення необхідної умови вирішення проблеми потрібно описати поверхню метричною формою.

Загальна теорія описує поверхні в довільній криволінійній параметризації. Призначення криволінійних координат зводиться лише до того, щоб фіксувати взаємне положення точок поверхні. Загалом криволінійні координати не мають визначеного геометричного змісту і можуть навіть на тій самій поверхні встановлюватись довільно залежно від вибраного параметричного представлення. За будь-яких умов метричною формою поверхні є її лінійний

елемент, який виражається квадратом диференціала дуги  $ds^2$  за нескінченно малого переміщення вздовж лінії, розташованої на цій поверхні.  $ds^2$  називають першою квадратичною диференціальною формою поверхні. За умови встановлення тієї чи іншої її параметризації коефіцієнти метричної форми утворюють метричний тензор поверхні. Ізометрична параметризація поверхонь обертання встановлює ортогональними координатними лініями меридіани і паралелі. Ізометричними координатами точки такої поверхні є значення двох спряжених гармонічних функцій, які відповідають цій точці. За такої параметризації

$$ds^2 = r^2(dq^2 + d\lambda^2), \quad (5)$$

де  $q$  виражає ізометричну широту – міру довжини дуги меридіана, окресленого площинами екватора і паралелі радіуса  $r$ ;  $\lambda$  – довгота [10].

На поверхнях обертання перехід від ізометричних координат  $q, \lambda$  до геоцентричних  $\theta, \lambda$  здійснюється просто, оскільки ізометрична мережа меридіанів і паралелей збігається з такою самою географічною мережею. Геосфера є поверхнею обертання сталої кривини радіуса  $R$ . Її перша квадратична форма в геоцентричній системі має вигляд (рис. 1)

$$ds^2 = (Rd\theta)^2 + (rd\lambda)^2. \quad (6)$$

Порівняння форм (5) та (6) визначає зв'язок диференціалів ізометричної та геоцентричної широти:

$$dq = \frac{R}{r} d\theta = \frac{d\theta}{\sin \theta}. \quad (7)$$

Охарактеризуємо проекцію (3), беручи до уваги квадратичну форму (5) або (6). За основу беремо загальний розв'язок, який розкрито для довільних криволінійних поверхонь у роботах [3, 7], а також деякі рішення щодо врахування спотворень під час пошуку оптимальних проекцій різних поверхонь на площину в математичній картографії [5].

Розглянемо проекцію (3) в ізометричній системі:

$$\left. \begin{aligned} q'(\theta') &= u(q(\theta), \lambda) \\ \lambda' &= v(q(\theta), \lambda) \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Виразимо повні диференціали

$$\left. \begin{aligned} dq' &= \frac{\partial u}{\partial q} dq + \frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda; \\ d\lambda' &= \frac{\partial v}{\partial q} dq + \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

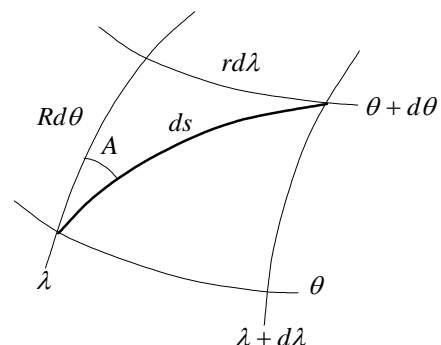


Рис. 1. Лінійний елемент на геосфері

Одержані формули містять частинні похідні, різні за координатами відображуваної області. Виразимо їх, враховуючи заміну змінної  $q = q(\theta)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \theta}, \quad (10)$$

звідки, враховуючи (7),

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{r}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial v}{\partial q} = \frac{r}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (11)$$

і диференціали (9) набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta'}{\sin \theta'} &= \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda; \\ d\lambda' &= \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Відображувану область  $\Delta$ , розташовану на гео-сфері до деформації, характеризує метрична форма (5). Після деформації

$$ds'^2 = r'^2 (dq'^2 + d\lambda'^2). \quad (13)$$

Враховуючи зв'язок диференціалів (7) і (12),

$$ds'^2 = r'^2 (e d\theta^2 + 2 f d\theta d\lambda + g d\lambda^2). \quad (14)$$

Коефіцієнти

$$\left. \begin{aligned} e &= \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \\ f &= \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \\ g &= \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

у теорії відображення поверхонь наділені визначеним геометричним змістом та ключовими позиціями. Як частинні похідні функцій координат деформованої поверхні за її вихідними координатами, вони виражають перетворення, якого зазнають коефіцієнти метричного тензора вихідної (недеформованої) поверхні при диференційованій трансформації її координат. Коефіцієнти (15) формують симетричну матрицю

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}, \quad (16)$$

яку називають тензором перетворення першої квадратичної форми поверхні внаслідок її відображення (тензором деформації). Величина

$$h^2 = eg - f^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \quad (17)$$

– дискримінант першої квадратичної форми (дискримінант тензора деформації). За умовою теорії поверхонь  $h^2 > 0$ . Ця нерівність може бути порушена лише в особливих точках поверхні. Для гео-сфери це точки полюсів  $\theta_{ni} = 0$  та  $\theta_{nd} = \pi$ , тому їх потрібно вилучити з подальшого аналізу.

Будь-який метричний тензор описує поверхню довкола елементарного радіуса в точці й відноситься до її дотичної площини у цій точці. Якщо тензор задано у кожній точці деякої замкненої області  $\Delta$ , то утворюється її тензорне поле. Отже, задаючись диференційованими функціями перетворення координат (3), тензором (16) можна розкрити поле деформації поверхні в межах області  $\Delta$  при її відображенні на  $\Delta'$ . Розкриємо тепер зміст параметрів, які характеризують властивості

гомеоморфного відображення  $\Delta$  на  $\Delta'$ , заданого функціями (3). Такі параметри цілком визначає тензор (16). Отже, вони характеризують поле деформації поверхні у межах окресленої області. З причини громіздкості математичного доведення обмежимося тут лише обґрунтуванням і викладенням диференціальних формул, які виражають різні параметри. Поділимо останні на кілька груп залежно від їх змісту та призначення. Геометричне пояснення окремих параметрів подано на рис. 2.

1. Відношення лінійних елементів  $\frac{ds'}{ds} = \mu$  виражає зміну довжини  $ds$  в точці  $\theta, \lambda$  з азимутом

$$A = \arctg \frac{rd\lambda}{Rd\theta} = \arctg \frac{\sin \theta d\lambda}{d\theta} \quad (18)$$

у разі переходу до його зображення. Відображення  $\Delta$  на  $\Delta'$  зумовлює відображення всякої лінії, яка належить окресленій області вихідної поверхні. Тому загальною величиною  $\mu$  є масштабом проекції (3) і характеризує її спотворення у будь-якому заданому напрямі  $A$ .  $\mu$  називають коефіцієнтом спотворення або модулем лінійного розширення. Враховуючи (6) та (14),

$$\mu^2 = \frac{r'^2}{r^2} (e \sin^2 \theta \cos^2 A + f \sin \theta \sin 2A + g \sin^2 A). \quad (19)$$

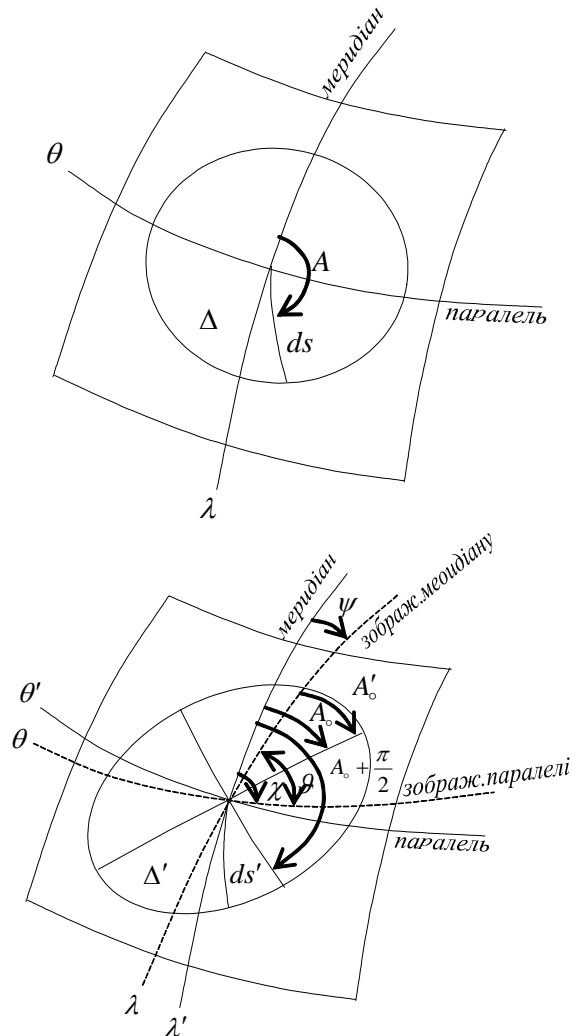


Рис. 2. Схема і напрями відображення  $\Delta$  на  $\Delta'$

З формули (19) можна одержати головні (екстремальні) масштаби  $\mu_{ext}$  і відповідні їм головні напрями, вздовж яких  $\mu = \mu_{ext}$ . Головні напрями визначає розв'язок рівняння  $\frac{d(\mu^2)}{dA} = 0$ :

$$tg 2A_0 = \frac{2f \sin \theta}{e \sin^2 \theta - g}. \quad (20)$$

Беручи до уваги період тангенсу  $\pi$  та діапазон зміни азимуту  $2\pi$ , одержуємо на вихідній поверхні два головних ортогональних напрями:  $A_0$  і  $A_0 + \frac{\pi}{2}$ . Їм відповідають екстремальні масштаби  $\mu_{max} = a$  і  $\mu_{min} = b$ , які називають коефіцієнтами максимального і мінімального спотворення (розширення). Явне вираження коефіцієнтів  $a$  і  $b$  можна отримати підстановкою в (19) виразів  $\cos^2 A_0$ ,  $\sin^2 A_0$  та  $\sin 2A_0$ , які є наслідком перетворення тригонометричної функції  $tg 2A_0$  відповідно до (20). Отже,

$$a^2 = \frac{r'^2}{2r^2} \left( e \sin^2 \theta + g + \sqrt{(e \sin^2 \theta - g)^2 + 4f^2 \sin^2 \theta} \right); \quad (21)$$

$$b^2 = \frac{r'^2}{2r^2} \left( e \sin^2 \theta + g - \sqrt{(e \sin^2 \theta - g)^2 + 4f^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (22)$$

За коефіцієнтами  $a, b$  і азимутом  $A_0$  можна визначити проекції головних напрямів  $A'_0$ ,  $A'_0 + \frac{\pi}{2}$  на поверхні відображення. Їх позначають відносно зображення на ній лінії меридіана вихідної поверхні (рис. 2):

$$tg A'_0 = \frac{b}{a} tg A_0. \quad (23)$$

Коефіцієнти  $a, b$  і азимут  $A_0$  є аналогами максимального  $E_1$  та мінімального  $E_2$  розширення і напрямку головної осі деформації  $\varphi$  у математичній теорії пружності. Із різниці  $E_1 - E_2$  одержуємо величину

$$\gamma_m = a - b. \quad (24)$$

$\gamma_m$  виражає максимальний зсув елемента поверхні довкола точки з координатами  $\theta, \lambda$  внаслідок відображення (3). Підстановкою до (19) азимутів  $A = 0$  і  $A = \frac{\pi}{2}$  одержимо:

$$\mu_0^2 = m^2 = \frac{r'^2}{r^2} e \sin^2 \theta; \quad (25)$$

$$\mu_{\pi/2}^2 = n^2 = \frac{r'^2}{r^2} g. \quad (26)$$

Коефіцієнти  $m$  і  $n$ , одержані за відповідних азимутів, виражають спотворення (розширення) поверхні вздовж ліній меридіанів і паралелей.

2. Перша квадратична форма поверхні дає змогу виражати також площі її довільних замкнених областей. За умови параметризації поверхні мережею координатних ліній з встановленням довільних кри-

волінійних координат  $u, v$  диференціал площі  $dp$  прямо залежить від дискримінанта метричної форми поверхні  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ :

$$dp = \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (27)$$

$E, F, G$  – функції координат  $u, v$ ;  $dp$  – елементарна площа поверхні довкола заданої точки, яка є областю зміни параметрів  $u, v$  і відповідає парам їх значень. В ортогональній ізометричній системі поверхонь обертання з квадратичною формою (5)  $E = G = r^2$ ,  $F = 0$ , а в сферичних координатах  $\theta, \lambda$ , згідно з (6),  $E = R^2$ ,  $G = r^2$ ,  $F = 0$ . Тоді

$$dp = Rrd\theta d\lambda. \quad (28)$$

Таке саме співвідношення існує для елементарної сферичної трапеції, що засвідчує рис. 1. Отже, для вираження площі поверхні достатньо знати її першу квадратичну форму. Якщо взяти до уваги проекцію (3), то у межах області відображення  $\Delta'$  диференціал площі

$$dp' = Rr'd\theta'd\lambda'. \quad (29)$$

Відношення  $\frac{dp'}{dp} = p$  виражає масштаб площі і є

показником її спотворення внаслідок деформації поверхні. Величину  $p$  називають коефіцієнтом відносної зміни площі області  $\Delta$  у разі її відображення на  $\Delta'$ . За змістом коефіцієнт  $p$  тотожний з дилатацією, якою оперує теорія пружності. З урахуванням метричної форми деформованої поверхні (14) і дискримінанта (17), для коефіцієнта  $p$  у підсумку одержимо:

$$p = \frac{r'^2}{Rr} h = \frac{\sin^2 \theta'}{\sin \theta} h. \quad (30)$$

Таке саме співвідношення для вираження коефіцієнта  $p$  у координатах  $\theta, \lambda$  випливає з формули загальної теорії відображення  $p = ab$ .

3. Розкриті у попередніх рубриках величини є відносними показниками зсуву, зміни площі та довжин у визначених напрямках. Крім цих властивостей відображення, загальна теорія розглядає також кутові спотворення системи координатних ліній, якими параметризована поверхня. За основу беруться відношення диференціалів їх проекцій на поверхні відображення, виражені в координатній системі вихідної поверхні. Для явного вираження таких співвідношень необхідною умовою є встановлення аналітичної форми функцій, які реалізують відображення. В ізометричній системі з відношення  $\frac{d\lambda'}{dq'}$  з урахуванням (9) випливає:

$$\left. \frac{d\lambda'}{dq'} \right|_{\lambda=const} = \left( \frac{\partial v}{\partial q} \right) / \left( \frac{\partial u}{\partial q} \right) = tg \psi; \quad (31)$$

$$\left. \frac{d\lambda'}{dq'} \right|_{q=const} = \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) / \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) = tg \chi. \quad (32)$$

У сферичних координатах, беручи до уваги (7) і (12),

$$\operatorname{tg} \psi = \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) / \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right); \quad (33)$$

$$\operatorname{tg} \chi = \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) / \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right). \quad (34)$$

Кути  $\psi$  та  $\chi$  виражають азимути проєкцій меридіанів (якщо  $\lambda = \text{const}$ ) і паралелей (якщо  $q = \text{const}$ ) вихідної поверхні при переході на поверхню відображення. Оскільки мережа меридіанів і паралелей в ізометричній та географічній параметризації збігається, цим пояснюється попарна рівність виразів (31), (32) з (33), (34). Азимути  $\psi$  та  $\chi$  виражають кутові спотворення проєкції (3), яка встановлена за точками  $M_i(\theta_i, \lambda_i) \in \Delta$  і  $M_i(\theta'_i, \lambda'_i) \in \Delta'$ . Якщо порушення взаємного положення точок  $M_i$  внаслідок деформації зумовлює спотворення ортогональності меридіанів і паралелей в межах областей  $\Delta$  і  $\Delta'$ , то різниця

$$\chi - \psi = \mathcal{G} \quad (35)$$

або кут

$$\varepsilon = \mathcal{G} - \frac{\pi}{2} \quad (36)$$

є показниками такого спотворення. Для тангенса різниці (35) з урахуванням (33) та (34) одержимо:

$$\operatorname{tg} \mathcal{G} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial v}{\partial \theta}}{\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda}} = \frac{h}{f}; \quad (37)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda}}{\frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda}} = -\frac{f}{h}. \quad (38)$$

Розкриті тут напрями і величини кутових спотворень показано на рис. 2. Для вирішення поставленої у роботі проблеми величини кутових спотворень можуть мати двояке застосування. З одного боку, кут  $\varepsilon$  є показником розвороту області  $\Delta$  внаслідок

деформації. Величина  $\frac{\varepsilon}{2}$  уподібнюється аналогічному їй показнику  $\omega$  розвороту ділянки як абсолютно твердого тіла у теорії пружності. З іншого боку, азимути  $\psi$  та  $\chi$  можуть мати пряме застосування для інтерпретації геодинамічних процесів планетарного масштабу у їх взаємозв'язку з розв'язками задач фізичної геодезії, пов'язаними з виявленням руху полюсів. Для розв'язання такої задачі достатньо окреслити відображувану областю  $\Delta$  півсферу, але необхідно забезпечити належний об'єм та густоту геодезичних пунктів, оскільки останні визначають точність реалізації відображення (3) рядами сферичних функцій (2).

### Висновок

Одержані рішення розширюють коло практичного застосування загальної теорії поверхонь. Параметри, якими оперують, описуючи властивості відображення поверхонь, мають виключно геометричне

походження. У застосуванні до геодинамічних задач за сутністю вони уподібнюються фізичним параметрам деформації земної поверхні, які ґрунтуються на теорії пружності. Цим підтверджується взаємозв'язок обох фундаментальних теорій, якщо інтерпретувати з їх позицій результати розв'язання кінематичних задач. Разом з тим, вирішення поставленої проблеми з позицій теорії поверхонь має значно ширші перспективи. У роботі це обґрунтовано на прикладі оцінювання деформацій земної поверхні, віднесеної до геосфери. Вибір такої найпростішої моделі Землі – лише перша спроба вираження нелінійних деформацій її поверхні у межах загальної теорії відображення криволінійних поверхонь. Вибір вмотивований, з одного боку, наявністю усталених розв'язків задач фізичної геодезії відносно геосфери, з іншого – однозначністю функціонального представлення на ній емпіричних рядів даних різних силових полів. Застосовуючи до описування геодинамічних процесів дані геодезичних спостережень фізичної поверхні Землі в геоцентричній системі координат  $\theta, \lambda$ , шляхом апроксимації останніх рядами сферичних функцій і подальшого опрацювання згідно із запропонованою методикою розкриваються нові перспективи вирішення поставленої проблеми. Дослідження полів деформації Землі регіонального і глобального масштабів дають підстави очікувати надійних об'єктивних результатів інтерпретації геодинамічних процесів.

### Література

1. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики / О.М. Марченко, К.Р. Третьак, А.Я. Кульчицький та ін. / за заг. ред. О.М. Марченка та К.Р. Третьака. – Л.: Львівська політехніка, 2012. – 308 с.
2. Есиков Н.П. Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности / Н.П. Есиков. – Новосибирск: Наука, 1979. – 173 с.
3. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1, 2 / В.Ф. Каган. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1947–1948. – 919 с.
4. Ландау Л.Д. Механика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Гостехиздат, 1953. – 788 с.
5. Мещеряков Г.А. Теоретические основы математической картографии / Г.А. Мещеряков. – М.: Недра, 1968. – 160 с.
6. Мориц Г. Современная физическая геодезия / Г. Мориц / пер. англ. П.П. Медведева под ред. Ю.М. Неймана. – М.: Недра, 1983. – 392 с.
7. Норден А.П. Теория поверхностей / А.П. Норден. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 261 с.
8. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден / пер. с англ. А.М. Васильева под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1976. – 465 с.
9. Пеллинен Л.П. Высшая геодезия (Теоретическая геодезия) / Л.П. Пеллинен. – М.: Недра, 1978. – 264 с.
10. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии / П.К. Рашевский. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 428 с.
11. Шимбирев Б.П. Теория фигуры Земли / Б.П. Шимбирев. – М.: Недра, 1975. – 432 с.

12. Янке Е. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш / пер. с нем. под ред. Л.И. Седова. – М.: Наука, 1964. – 344 с.

### Оцінювання деформацій земної поверхні, редукованої на геосферу

О. Тадеєв

Запропоновано розв'язання задачі оцінки деформацій земної поверхні в геоцентричній координатній системі на геосфері. Доцільність розв'язання обгрунтована взаємозв'язками поля деформацій з силовими полями Землі, враховуючи усталені методики їх представлення рядами сферичних функцій. В основу вираження параметрів деформації покладено теорію відображення поверхонь. Визначено зміст і диференційні формули, які розкривають різні параметри деформації.

### Оценка деформаций земной поверхности, редуцированной на геосферу

А. Тадеев

Предложено решение задачи оценки деформаций земной поверхности в геоцентрической координатной системе на геосфере. Целесообразность решения обоснована взаимосвязью поля деформаций с силовыми полями Земли, учитывая традиционные методики их представления рядами сферических функций. В основу выражения параметров деформации положено теорию отображения поверхностей. Определены сущность и дифференциальные формулы, раскрывающие разные параметры деформации.

натной системе на геосфере. Целесообразность решения обоснована взаимосвязью поля деформаций с силовыми полями Земли, учитывая традиционные методики их представления рядами сферических функций. В основу выражения параметров деформации положено теорию отображения поверхностей. Определены сущность и дифференциальные формулы, раскрывающие разные параметры деформации.

### Estimation of ground surface deformations transferred to geosphere

O. Tadyeyev

The solution to the problem of estimation of ground surface deformations on the geocentric coordinate system in the geosphere is suggested. The feasibility of the solution is justified by interrelationships between the deformation field and force fields of the Earth, taking into account well-established methods of their presenting by series of spherical functions. The theory of surface reflection is the basis of the deformation parameter expression. The contents and differential formulas revealing different parameters of deformation are defined.



**АЕРОКОСМІЧНІ ЗНІМАЛЬНІ СИСТЕМИ**  
Навчальний посібник. Бурштинська Х. В., Станкевич С. А.  
Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. 292 с.  
ISBN 978-966-553-951-3

**Земля здалеку і зблизька**

- загальна модель дистанційного зондування Землі
- основні типи космічних та авіаційних літальних апаратів
- принципи формування зображень
- багатоспектральні та гіперспектральні знімальні системи



**ДИВИТИСЯ НА ПЛАНЕТУ ОЧИМА АСТРОНАВТА**

- теоретичні основи фотограмметрії
- комп'ютерне опрацювання цифрових зображень
- цифровий фотограмметричний знімок
- побудова цифрових моделей об'єктів
- аналітична фототріангуляція
- технології цифрової фотограмметрії
- космічна фотограмметрія

Підручник. Дорожинський О. Л., Тукай Р.  
Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2008. 332 с.  
ISBN 978-966-553-688-8