

УДК 528.33:551.24

ДОСЛІДЖЕННЯ ГІДРОСТАТИЧНОГО СТАНУ ДЛЯ ТРИВИМІРНОГО РОЗПОДІЛУ МАС ДРУГОГО ПОРЯДКУ СФЕРИЧНОЇ ТА ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ЗЕМЛІ

М. Фис, П. Черняга, А. Бридун

Національний університет "Львівська політехніка"

Ключові слова: гравітаційна енергія, потенціал, розподіл мас, еліпсоїд, апроксимація.

Постановка проблеми

Перерозподіл мас надр планети під дією гравітаційної сили здійснюється за принципом мінімуму її енергії. Розроблення методів його реалізації дає інструмент для отримання кількісних характеристик під час дослідження стану речовини планетарного тіла (стану гідростатичної або динамічної рівноваги).

Зв'язок з важливими науковими та практичними завданнями

Встановлення механізму переміщення мас у середині планети дає ключ до інтерпретації планетарних динамічних процесів. Відхилення або стан гідростатичної рівноваги дає змогу встановлювати причину неоднорідності гравітаційного поля небесного тіла та дає можливість прогнозувати скупчення аномальних мас.

Аналіз основних досліджень і публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Стан гідростатичної рівноваги планетарного тіла використовується в різних дослідженнях. Така умова є визначальним фактором для побудови фігур планет [2, 7]. Вона ж відіграє важливу роль у визначенні компонент напруженого стану речовини Землі [7, 10].

Невирішені частини загальної проблеми

Дослідження виконано для часткового випадку. При цьому не вдалось подати оцінку точності при визначенні потенціалу еліпсоїдальної планети. Для поставленої в [5] задачі в загальному випадку не зроблено спробу її розв'язання.

Постановка завдання

Встановити умови, за яких планета перебуває в стані гідростатичної рівноваги на прикладі Землі з розподілом мас, що відповідає референційній моделі PREM [8], а також дослідити поведінку речовини під час їх виконання.

Виклад основного матеріалу

Тривимірну функцію розподілу густини надр Землі другого порядку можна зобразити так:

$$\delta_2(x, y, z) = \delta^0(\rho) + b_{000} + b_{200}W_{200} + b_{020}W_{020} + b_{002}W_{002} + b_{110}W_{110} + b_{101}W_{101} + b_{011}W_{011}, \quad (1)$$

де $\delta^0(\rho)$ – одновимірний розподіл (сферично-симетрична модель PREM [1]), а b_{mnk} – коефіцієнти

розкладу за багаточленами W_{mnk} [9], які до другого порядку визначаються за динамічним стисненням H та стоксовими сталими C_{nk}, S_{nk} ($n \geq 2$):

$$b_{000} = \delta_c \left(1 - \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta_c(\rho) \rho^2 d\rho \right) = \delta_c \left(1 - \frac{3}{\delta_c} M_2 \right),$$

$$\begin{cases} \frac{2b_{002}}{a_e^2} - \left(\frac{b_{200}}{a_e^2} + \frac{b_{020}}{a_e^2} \right) = \\ = \delta_c \left(35C_{20} - \left(\gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) (7b_{000} - 35M_4) \right), \\ \frac{b_{200}}{a_e^2} - \frac{b_{020}}{a_e^2} = \delta_c (70C_{22} - (\alpha^2 - \beta^2)(14b_{000} + 70M_4)), \\ \frac{b_{110}}{a_e^2} = 70\delta_c S_{22}, \quad \frac{b_{101}}{a_e^2} = 35\delta_c C_{21}, \quad \frac{b_{001}}{a_e^2} = 35\delta_c S_{21}. \end{cases} \quad (2)$$

Введемо позначення: δ_c – середня густина

розподілу мас; $M_n = \int \frac{\delta_0(\rho)\rho^n}{\delta_c} d\rho$ – одновимірні степеневі моменти густини $\delta^0(\rho)$,

$$d_0 = \delta_c (70C_{22} - (\alpha^2 - \beta^2)(14b_{000} + 70M_4)),$$

$$d_1 = 7\delta_c \left(5C_{20} - \gamma^2 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)(b_{000} + 5M_4) \right),$$

$$\alpha = \frac{A}{a_e}, \quad \beta = \frac{B}{a_e}, \quad \gamma = \frac{C}{a_e},$$

де A, B, C – півосі еліпсоїда; a_e – екваторіальний радіус.

З рівнянь системи (2) одержимо:

$$\frac{b_{200}}{a_e^2} = d_0 + \frac{b_{020}}{a_e^2},$$

$$\frac{b_{002}}{a_e^2} = \left(\frac{d_0 + d_1}{2} + \frac{b_{020}}{a_e^2} \right).$$

Тоді формула (1) запишеться так:

$$\delta_2(P) = \delta_b(P) + \frac{b_{020}}{a_e^2} \Delta(W_2(P)),$$

$$\delta_b = \delta^0(\rho) + b_{000} + b_{110}W_{110} + b_{101}W_{101} + b_{011}W_{011} + d_0W_{200} + \frac{d_0 + d_1}{2}W_{002},$$

$$\Delta W_2 = a^2W_{200} + b^2W_{020} + c^2W_{002} = \frac{1}{2}(5\rho^2 - 3)$$

Потенціал такого розподілу обчислюють так:

$$V_2(\rho) = V_b(\rho) + \frac{b_{002}}{a_e^2} \Delta V_2(\rho),$$

$$\Delta V_2(P) = f \int_{\tau} \frac{\Delta W_2}{r} d\tau = \frac{f}{2} \int_{\tau} \frac{5\rho^2 - 3}{r} d\tau,$$

$$V_b(P) = f \int_{\tau} \frac{\delta^0(\rho) + b_{000} + b_{110}W_{110} + b_{101}W_{101}}{r} d\tau +$$

$$+ f \int_{\tau} \frac{b_{001}W_{001} + d_0W_{200} - \frac{d_0 + d_1}{2}W_{002}}{r} d\tau,$$

або в інших позначеннях:

$$V_b(P) = U^0(\rho) + b_{000}U_{000}(P) + b_{110}U_{110} +$$

$$+ b_{101}U_{101} + b_{011}U_{011} + d_0U_{200} + \frac{d_0 + d_1}{2}U_{002}.$$

Енергія розподілу δ_2 з відповідним потенціалом V_2 визначається [6]:

$$E = \frac{1}{2} \int_{\tau} \delta U d\tau = -\frac{1}{2} \int_{\tau} (\delta_g + \Delta W_2 b_{020}) (V_g + b_{020} \Delta V_2) d\tau,$$

мінімум якої досягається за умови: $\frac{\partial E}{\partial b_{020}} = 0$, звідки

$$\frac{b_{020}}{a_e^2} = -\frac{\int_{\tau} [\delta_g \Delta V_2 + V_g \Delta W_2] d\tau}{\int_{\tau} \Delta W_2 \Delta V_2 d\tau}. \quad (3)$$

Визначимо елементи формули (3). Маємо:

$$\Delta V_2 = \frac{f}{2} \int_{\tau} \frac{5\rho^2 - 3}{r} d\tau = \frac{f}{2} (5U_2 + 3U_0),$$

де

$$U_l = \frac{1}{l+1} \frac{3V_e}{4} \int_{\xi(0)} (S_0 - \rho^{2l+2} S_{l+1}) \frac{dU}{Q(u)},$$

$$S_l = \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2t_1+2t_2+1} \theta \cos^{2t_3} \theta \cos^{2t_1} \lambda \sin^{2t_2} \lambda d\lambda d\theta}{(l!)^{-1} t_1! t_2! t_3! (M_{t_1 t_2 t_3})^{-1}},$$

$$M_{t_1 t_2 t_3} = \int_0^{\infty} \frac{a^{2t_1} b^{2t_2} c^{2t_3} du}{(a^2 + u)^{t_1 + 1/2} (b^2 + u)^{t_2 + 1/2} (c^2 + u)^{t_3 + 1/2}}.$$

Алгоритм обчислення значень $M_{t_1 t_2 t_3}$ для тривісного еліпсоїда наведено в роботі [3], для двовісного – в [4], а для кулі ці величини такі:

$$S_l = \frac{2}{(2l+3)R}.$$

Продовжимо перетворення:

$$\Delta V_2 = \frac{3}{4} fV_e \left[-\frac{S_0}{2} + 3S_1 \rho^2 - 5\frac{S_2}{2} + \rho^4 \right],$$

$$\int_{\tau} \Delta V_2 \Delta W_2 d\tau = \frac{9}{14} fV_e^2 \left(\frac{3S_1}{5} - \frac{5}{9} S_2 \right).$$

Визначимо елементи чисельника рівності (3):

$$\int_{\tau} V_a \Delta W_2 d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} (U^0(\rho) + b_{000}U_{000}(\rho) +$$

$$+ b_{110}U_{110} + b_{101}U_{101} + b_{011}U_{011} + d_0U_{200} +$$

$$+ \frac{d_0 + d_1}{2}U_{002}) (5\rho^2 - 3) d\tau, \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} fV_e \int_{\tau} \delta_a \Delta V_2 d\tau = \int_{\tau} (\delta^0(\rho) + b_{000} + b_{110}W_{110} +$$

$$+ b_{101}W_{101} + d_0W_{200} + \frac{d_0 + d_1}{2}W_{002} + b_{011}W_{011}) \times$$

$$\times \left(-\frac{S_0}{2} + 3S_1 \rho^2 - 5\frac{S_2}{2} \rho^4 \right) d\tau. \quad (5)$$

Неважко переконатись у виконанні рівностей:

$$\int W_{110} \Delta V_2 d\tau = \int W_{101} \Delta V_2 d\tau = \int W_{011} \Delta V_2 d\tau = 0.$$

Далі визначаємо інші елементи рівності (5):

$$\int_{\tau} \delta^0(\rho) \Delta V_2 d\tau = \frac{9}{4} fV_e^2 \left(-\frac{S_0}{2} M_2 + 3S_1 M_4 - 5\frac{S_2}{2} M_6 \right),$$

$$\int_{\tau} \Delta V_2 d\tau = \frac{3fV_e^2}{4R} \left(-\frac{S_0}{2} + S_1 \frac{9}{5} - \frac{15S_2}{14} \right),$$

$$\int_{\tau} W_{200} \Delta V_2 d\tau = \frac{3fV_e^2}{2a^2} \left(\frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right).$$

$$\int_{\tau} \Delta V_2 d\tau = -\frac{6fV_k^2}{35R}.$$

Аналогічно одержуємо

$$\int_{\tau} W_{002} \Delta V_2 d\tau = \frac{3fV_e^2}{2c^2} \left(\frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right).$$

Визначимо члени першого доданка рівності (4):

$$\int_{\tau} U^0(P) \Delta W_2 d\tau = -\frac{9fV_e^2}{70} S_1.$$

Визначення членів $\int U_{mnk} \Delta W_2 d\tau$ здійснюємо за допомогою формули:

$$U_{mnk} = \frac{3(-1)^N \cdot V_e}{4(N+1)2^N m! n! k!}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \left(\int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)} \right)$$

Насамперед виконуються рівності:

$$\int_{\tau} U_{110} \Delta W_2 d\tau = \int_{\tau} U_{101} \Delta W_2 d\tau = \int_{\tau} U_{011} \Delta W_2 d\tau = 0,$$

що впливає з зображення функцій вигляду U_{mnk} , наприклад:

$$U_{101} = 3xy(M_{110} - x^2 M_{210} - y^2 M_{120} - z^2 M_{111})$$

Визначимо вирази $\int_{\tau} U_{200} \Delta W_2 d\tau$ і $\int_{\tau} U_{002} \Delta W_2 d\tau$.

Знайдемо перший з них, для чого представимо

$$U_{002} = \frac{1}{24} \frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^{\infty} (1 - 3r^2 + 3r^4 - r^6) \frac{du}{Q(u)},$$

де

$$r^2 = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} (r^2) = \frac{2}{a^2 + u},$$

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2} (r^2) \frac{5\rho^2 - 3}{2} d\tau = \left(\frac{5\rho^5}{5} - \frac{3\rho^3}{3} \right) \Big|_0^1 M_{10} = 0,$$

Далі маємо:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} (r^4) = \frac{4\rho^4}{a^2 + u} \left(\left(\frac{3a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{b^2 + u} \right) \times \sin^2 \theta + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right).$$

Звідси

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2} (r^4) (5\rho^2 - 3) d\tau = \frac{8V}{35} (3M_{200} + M_{110} + M_{101}).$$

А також

$$\frac{\partial}{\partial x^2} (r^6) = \frac{6\rho^6}{a^2 + u} \times \left(\left(\frac{5a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{b^2 + u} \right) \sin^2 \theta + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right) \times \left(\left(\frac{a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 + u} + \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{b^2 + u} \right) \sin^2 \theta + \frac{c^2 \cos^2 \theta}{c^2 + u} \right),$$

отже

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2} (r^6) \frac{(5\rho^2 - 3)}{2} d\rho = \frac{8}{105} V \times \left[(5M_{300} + 2M_{210} + 3M_{120}) + 3M_{102} + 2(M_{201} + M_{111}) \right].$$

Для двовісного еліпсоїда формули набувають дещо простішого вигляду:

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2} (r^4) (5\rho^2 - 3) d\tau = \frac{8V}{35} (4M_{20} + M_{11}),$$

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^2} (r^6) (5\rho^2 - 3) d\tau = \frac{8V}{21 \cdot 5} (20M_{30} + 6M_{21} + 3M_{12}),$$

$$\int_{\tau} U_{200} W_2 d\tau = \frac{V}{105} \left(3(4M_{20} + M_{11}) - \frac{1}{3} (20M_{30} + 6M_{21} + 3M_{12}) \right).$$

Безпосередні обчислення для кулі K з радіусом R з урахуванням рівностей:

$$S_0 = \frac{2}{R}, S_1 = \frac{2}{3R}, S_2 = \frac{2}{5R},$$

дають ті самі значення, що є добрим контролем наведених обчислень.

Залишилося визначити

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} U^0(\rho) (5\rho^2 - 3) d\tau.$$

Оскільки потенціал кусково-неперервного радіального розподілу $\delta^0(\rho)$ не визначається в замкнутому вигляді для еліпсоїда, то використаємо його представлення через поліноми Лежандра:

$$U^0(\rho) = f \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} U_{2l}(\rho),$$

звідки

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} U_{2l}(\rho) (5\rho^2 - 3) d\tau = -\frac{3fV^2}{8(l+1)} S_{l+1} \left(\frac{5}{2l+7} - \frac{3}{2l+5} \right),$$

зокрема для кулі

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} U^0(\rho) (5\rho^2 - 3) d\tau = \frac{9fV^2}{4R}$$

$$f \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sum_{l=0}^n d_{2l}^{2n} \frac{1}{2l+3} \left(\frac{5}{2l+7} - \frac{3}{2l+5} \right) \frac{1}{l+1}.$$

Перевірку останньої формули здійснюємо, використовуючи замкнені формули обчислення внутрішнього потенціалу кульової планети [6] за допомогою рівності:

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} U^0(\rho) (5\rho^2 - 3) d\tau = \sum_{i=0}^{nk} \int_{\tau} (U_z^i(\rho) + U_p^i(\rho) + U_b^i(\rho)) \frac{5\rho^2 - 3}{2} d\tau,$$

елементи якої визначаються так

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} U_b^i(\rho) (5\rho^2 - 3) d\tau = \frac{fV}{2} = \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{i=1}^4 \frac{a_{l,i+2}}{i+2} (\rho_l^{i+2} - \rho_{l-1}^{i+2}) (\rho_l^5 - \rho_{l-1}^5 - \rho_l^3 + \rho_{l-1}^3),$$

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} U_z^l(\rho) (5\rho^2 - 3) d\tau = \sum_{i=0}^l (M_{G_i} - M_{\tau_e}) \times \left(\frac{5\rho_l^4}{4} - \frac{3\rho_l^2}{2} - \frac{5\rho_{l-1}^4}{4} + \frac{3\rho_{l-1}^2}{2} \right),$$

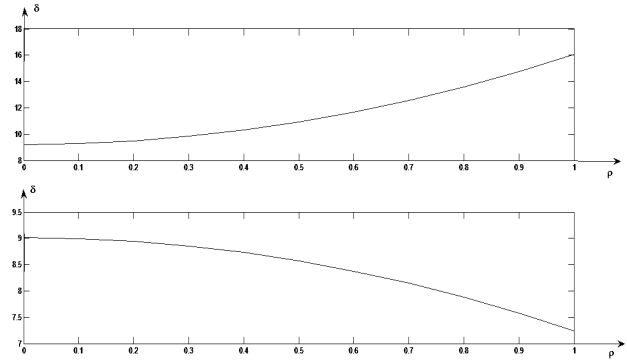
$$\frac{1}{2} \int_{\tau} U_b^l(\rho)(5\rho^2 - 3)d\tau = \frac{3}{2} fV \sum_{i=1}^4 \frac{a_{l,i+2}}{i+2} \times$$

$$\times \left((\rho_l^{i+2} - \rho_{l-1}^{i+2}) (\rho_l^5 - \rho_{l-1}^5 - \rho_l^3 + \rho_{l-1}^3) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{i+3} \left(\frac{5}{l+7} (\rho_l^{l+7} - \rho_{l-1}^{l+7}) - \frac{3}{l+5} (\rho_l^{l+5} - \rho_{l-1}^{l+5}) \right) \right).$$

Використовуючи наші дослідження, за формулами знаходимо коефіцієнти розкладу b_{mjk} , що відповідають моделі PREM, а також для однорідної моделі з густиною $\delta_0 = const = 5.514 \frac{г}{см^3}$.

Для однієї географічної точки по глибині знайдемо значення функції розподілу мас.



Графіки розподілів мас гідростатично врівноваженої Землі з розподілом за моделлю PREM (а) та однорідної (б) у точці з координатами $\phi = 0^0, \lambda = 0^0$

Перелік обчислених формул, необхідних для визначення значення мінімуму енергії Землі

	Тривісний еліпсоїд	Двовісний еліпсоїд	Куля
ΔW_2	$\frac{1}{2}(5\rho^2 - 3)$	$\frac{1}{2}(5\rho^2 - 3)$	$\frac{1}{2}(5\rho^2 - 3)$
ΔU_2	$-\frac{S_0}{2} + 3S_1\rho^2 - 5\frac{S_2}{2}\rho^4$	$-\frac{S_0}{2} + 3S_1\rho^2 - 5\frac{S_2}{2}\rho^4$	$-\frac{3}{4}fV\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho^4 - \rho^2\right)$
$\int_{\tau} \Delta U_2 \Delta W_2 d\tau$	$\frac{9}{14} \frac{fV^2}{R} \left(\frac{3S_1}{5} - \frac{5S_2}{9} \right)$	$\frac{9}{14} \frac{fV^2}{R} \left(\frac{3S_1}{5} - \frac{5S_2}{9} \right)$	$\frac{2}{35} \frac{fV^2}{R}$
$\int_{\tau} \Delta U_2 d\tau$	$\frac{3}{4} \frac{fV^2}{R} \left(-\frac{S_0}{2} + \frac{9S_1}{5} - \frac{15S_2}{14} \right)$	$\frac{3}{4} \frac{fV^2}{R} \left(-\frac{S_0}{2} + \frac{9S_1}{5} - \frac{15S_2}{14} \right)$	$-\frac{6}{35} \frac{fV^2}{R}$
$\int_{\tau} \Delta W_2 \Delta U_2 d\tau$	$\frac{3}{2} \frac{fV^2}{a^3} \left(\frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{3}{2} \frac{fV^2}{a^3} \left(\frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{4}{105} \frac{fV^2}{R^3}$
$\int_{\tau} \Delta W_{200} \Delta U_2 d\tau$	$\frac{3}{2} \frac{fV^2}{a^3} \left(\frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{3}{2} \frac{fV^2}{a^3} \left(\frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{4}{105} \frac{fV^2}{R^3}$
$\int_{\tau} \Delta U_0 \Delta W_2 d\tau$	$-\frac{9}{70} \frac{fV^2}{a} S_1$	$-\frac{9}{70} \frac{fV^2}{a} S_1$	$-\frac{3}{35} \frac{fV^2}{R}$
$\int_{\tau} \Delta U_2 \Delta W_{200} d\tau$	$\frac{3}{14} fV^2 \left(\frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{3}{14} fV^2 \left(\frac{3S_1}{35} - \frac{5S_2}{63} \right)$	$\frac{4}{105} fV^2$

Висновки

Результати обчислень узгоджуються з результатами, одержаними в монографії [1], про ненадійність знайдених розподілів, а також про те, що маси прагнуть випливати до поверхні планети. Оскільки визначені функції розміщення мас не відповідають реальним, то можна з великою вірогідністю стверджувати, що стан Землі далеко не відповідає стану гідростатичної рівноваги хоча б для випадку представлення розподілу мас у вигляді багаточлена другого порядку.

Література

1. Мориц Г. Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли / Г. Мориц. – К., 1994. – 240 с.
2. Жарков В.Н. Физика планетарных недр / В.Н. Жарков, В.П. Трубицин. – М.: Наука, 1980. – 448 с.
3. Фис М.М. Розклад гравітаційного поля тривісної еліпсоїдальної планети з використанням ортогональних одного класу не гармонійних функцій / М.М. Фис // Геодезія, картографія і

- аерофотознімання. – Львів. – 2011. – Вип. 74. – С. 34–37.
4. Фис М. Про один метод визначення потенціалу неоднорідної еліпсоїдальної планети / М. Фис, О. Заяць, Р. Фоца, В. Волос // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2005. – С. 236–239.
5. Фис М. Метод дослідження гідростатичної рівноваги трьохвимірної еліпсоїдальної планети / М. Фис, В. Нікулішин // Матеріали XV міжнародного наук.-техн. симпозіуму “Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища GPS- і GIS-технології”. – 13–18 вересня 2010. – Алушта (Крим). – С. 258–259.
6. Фис М. Аналіз впливу еліпсоїдальності фігури Землі на її внутрішню структуру на прикладі моделі PREM / М. Фис, В. Нікулішин // Геодинаміка. – Львів. – 2011. – № I(10). – С. 17–21.
7. Хаббард У. Внутреннее строение планет / У. Хаббард. – М.: Мир, 1987. – 328 с.

8. Dziewonski A.M., Anderson D.L. Preliminary reference Earth model // *Physics of the Earth and Planet. Inter.* – 1981. – 25. – P. 297–356.
9. Мещеряков Г.А. Определение плотности земных недр рядами по биортогональным системам много-членов // в кн. " Теория и методы интерпретации гравитационных и магнитных полей" / Г.А. Мещеряков, М.М. Фыс. – К., 1981. – С. 329–334.
10. Marchenko A.N. Hydrostatic/isostatic earth's reference models of IAG Special Commission 1 for the period 1999–2003 // *Geodynamics* 1(4). – 2004. – P. 75–78.

Дослідження гідростатичного стану для тривимірного розподілу мас другого порядку сферичної та еліпсоїдальної Землі
 М. Фис, П. Черняга, А. Брыдун

Запропоновано метод дослідження стану речовини в середині кульової та еліпсоїдальної Землі, функція розподілу якої є багаточленом другого степеня і референційної моделі PREM.

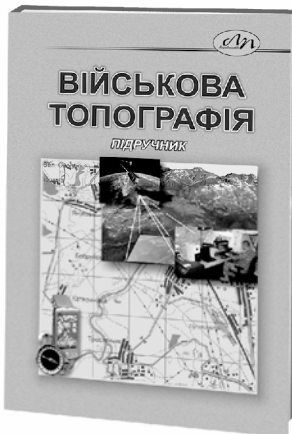
Исследования гидростатического состояния для трехмерного распределения масс второго порядка сферической и эллиптической Земли
 М. Фыс, П. Черняга, А. Брыдун

Предложен метод исследования состояния вещества в середине сферической и эллипсоидальной Земли, функция распределения которой – многочлен второй степени, а также референционной модели PREM.

Research hydrostatic conditions for three-dimensional distribution of the masses of the second order of spherical and elliptical Earth
 M. Fys, P. Chernyaha, A. Brydun

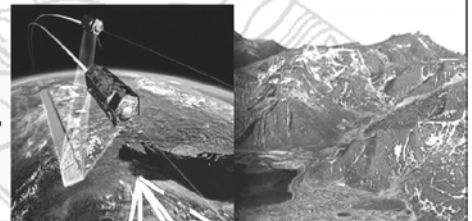
The investigation methods of substance inside spherical and ellipsoidal Earth with the distribution function which is a polynomial of the second degree and reference frame model PREM is proposed.

Прийшов, побачив, переміг



- теоретичні і практичні положення
- військової топографії
- карти армій інших держав
- супутникові та автономні системи навігації наземних рухомих об'єктів, нових вітчизняних програмних продуктів
- застосування цифрових та електронних карт
- використання військових ГІС

Підручник.
 За ред. П. П. Ткачука та І. С. Тревого.
 Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. 416 с.
 ISBN 978-617-607-026-9



Навчальний посібник.
 Волосяцький Б. І. Друге видання, виправлене і доповнене.
 Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. 292 с.
 ISBN 978-966-553-701-4

- методи і засоби польових вимірювань
- аналіз точності одержаних результатів, специфіка робіт з інвентаризації територіальних, господарських земле-, водо-, лісокористувань, оцінки окремих ділянок
- методика геодезичних робіт для реалізації проектів протиерозійного захисту земель
- геодезичне забезпечення рекультивації порушених земель



Геодезичне забезпечення використання природних ресурсів