УДК 528.2/3:551.24

ОЦІНЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ЗЕМНОЇ ПОВЕРХНІ ЗА ДАНИМИ В ГЕОДЕЗИЧНИХ КРИВОЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

О. Тадєєв
Національний університет водного господарства та природокористування

Ключові слова: деформації земної поверхні, теорія відображення поверхонь, геосфера, земний еліпсоїд обертання, геодезичні координатні системи.

Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими та практичними завданнями

Оцінювання деформацій земної поверхні – одна з головних задач сучасної геодинаміки. Її розв'язують методами геодезії, геофізики, геотектоніки та багатьох інших наук про Землю. Об'єкти їх прикладних досліджень утворюють єдину динамічну систему. Тому показники різнобічного моніторингу Землі, зіставлення та пошук взаємозв'язків силових полів даних різного фізичного походження, міждисциплінарна кооперація і комплексна інтерпретація кінцевих результатів дають змогу не лише визначити деформований стан земної кори та її фізичної поверхні, а й виявити генезис геодинамічних процесів та дослідити еволюцію Землі загалом. З позиції задоволення суспільних потреб це забезпечує оцінювання ризиків з погляду безпеки життєдіяльності та прогноз ймовірних катастрофічних наслідків. У прикладному сенсі синтез результатів досліджень різних природничих наук для вирішення проблем геодинаміки є необхідною умовою строгого розв'язання традиційних і нових задач фізичної геодезії, наприклад, редукції вимірів у єдину систему відліку координат і гравітації.

Методи геодезичного моніторингу геодинамічних процесів, як основне джерело кількісного вираження їх просторово-часової структури, передбачають повторні спостереження геодезичних мереж, опрацювання даних та інтерпретацію одержаних результатів. Активний розвиток та запровадження у геодезичне виробництво сучасних супутникових навігаційних технологій, реалізованих у глобальних мережах перманентних GNSS-станцій, забезпечили формування потужної бази даних спостережень. Супутникові засоби координування фізичної поверхні Землі гарантують визначення представницьких показників зміщень станцій спостережень. Ці дані дають змогу оцінити сучасні рухи земної поверхні різного масштабу та відобразити їх тими чи іншими картографічними моделями, описати динаміку літосферних плит тощо. Разом з тим, теоретична основа та методи опрацювання даних з метою визначення деформацій поверхні й подальшого аналізу одержаних результатів залишаються практично незмінними впродовж останніх десятиліть. З урахуванням сьогоднішніх реалій, означена задача потребує щонайменше вдосконалених рішень. Аналіз сутності, недоліки традиційних методик та деякі перспективи альтернативних підходів до вирішення проблеми розкрито у статті [6].

Аналіз досліджень та невирішені частини загальної проблеми

Рухи земної поверхні, які виражені числово за результатами повторних геодезичних спостережень, можна ідентифікувати як перетворення фізичної поверхні Землі, редукованої на ту чи іншу відносну відлікову поверхню. Будь-яка із загальноприйнятих у геодезії відлікових поверхонь має геометричну сутність і зумовлює встановлення відповідної координатної системи для геодезичних пунктів, які підлягають спостереженням. Така мотивація дає підстави розглядати проблему з геометричної позиції безвідносно до походження і характеру рухів земної поверхні. У статтях [6, 7] проблему окреслено з позицій проективно-диференціальної геометрії. Обґрунтовано теоретичні основи і правомірність вибраного підходу. Для пошуку шляхів вирішення проблеми з метою оцінювання деформацій використано теорію поверхонь [2] та деякі рішення щодо врахування спотворень у разі їх відображення [3].

У статті [7] визначено шляхи вирішення проблеми на засадах загальної теорії відображень і здійснено систематизацію рішень у типових геодезичних модельних системах координат з віднесенням результатів опрацювання даних до відповідних відлікових поверхонь. Рішення узгоджено з умовами параметризації поверхонь загальної теорії відображень. Проведено аналіз змісту характеристик спотворення поверхонь під час їх відображення (характеристик деформації) і їх порівняння з відповідними аналогами, якими оперують, розв'язуючи геодинамічні задачі на засадах класичної теорії деформації суцільного середовища [1]. Наведена систематизація враховує перспективи застосування результатів опрацювання даних для інтерпретації геодинамічних процесів різних масштабів. Також у статті визначено загальний алгоритм розв'язання задачі.

Розв'язання задачі на площині в прямокутній системі координат, основане на теорії квазіконформних відображень поверхонь з рімановою параметризацією, розкрито у статті [4]. Доведено, що за умови реалізації відображення функціями лінійного вигляду, які є основою афінного перетворення прямокутних координат у лінійній теорії деформації суцільного середовища, точність пропонованого рішення вища. Основною ж його перевагою є можливість розв'язання задачі безвідносно до аналітичної форми функцій відображення, аби лише вони задовольняли умови гомеоморфізму.

У статті [5] здійснено першу спробу розв'язання задачі оцінювання деформацій земної поверхні у криволінійних системах координат. Розкрито розв'язання у геоцентричній сферичній системі з редукцією результатів на геосферу. Така модель традиційно застосовується для описування даних силових полів Землі у фізичній геодезії. Якщо її застосувати для вирішення поставленої проблеми і подати поле деформацій земної поверхні рядами сферичних функцій, у підсумку розкриваються перспективи пошуку взаємозв'язків полів даних різного фізичного змісту в межах однієї моделі. Це спрощує сумісну інтерпретацію результатів як для потреб геодинаміки, так і для дослідження фігури Землі загалом.

Геосфера – найпростіша криволінійна геодезична відлікова поверхня. На практиці для розв'язання геодезичних задач частіше використовується інша математично правильна поверхня, яка відповідає моделі земного еліпсоїда обертання з геодезичною системою координат. Тому відповідний інтерес викликає розв'язання задачі оцінювання деформацій земної поверхні, редукованої на еліпсоїд.

Постановка завдання

Мета роботи – виразити параметри деформації земної поверхні, редукованої на земний еліпсоїд обертання, і порівняти результати з аналогічними на геосфері. Теоретична основа рішення – загальна теорія відображення поверхонь обертання з ізометричною параметризацією. Оскільки сферична та геодезична координатні системи однотипні з ізометричною, хід виконання завдання очікується ідентичним розкритому в статті [5].

Виклад основного матеріалу досліджень

Загальний алгоритм вирішення завдання містить два блоки задач [7].

Перший блок – задача апроксимації функцій за заданим емпіричним розподілом координат станцій спостережень з метою визначення закону відображення поверхонь. Згідно із загальною теорією [2], якщо ізометрична поверхня відображається на ізометричну їй поверхню, то клас функцій, які реалізовують відображення, – гармонічного типу. Такі функції мають властивості гомеоморфізму, що унеможливлює строге розв'язання поставленої задачі з погляду вимог теорії поверхонь. Тому прийняття рішення щодо вибору аналітичної форми функцій та встановлення відповідних емпіричних формул повинно бути аргументовано з погляду коректності його постановки – або змістом вирішуваної проблеми, або формально за показниками точності апроксимації.

Задачі другого блока – вираження та оцінювання точності параметрів деформації земної поверхні за встановленими на попередній стадії емпіричними формулами. З погляду поставленого у роботі завдання – це ключові рішення.

Основою формування поля деформації та вираження його параметрів є тензор відображення – симетрична матриця коефіцієнтів першої квадратичної (метричної) форми, яка відповідає лінійному елементові ds' на поверхні відображення S' і виражена за елементом ds вихідної поверхні S. Матриця має сталу структуру та алгоритм побудови для будь-яких поверхонь і цілком визначається функціями відображення. Її компоненти є частинними похідними функцій координат деформованої поверхні за її вихідними координатами і виражають перетворення, якого зазнають коефіцієнти метричної форми вихідної (недеформованої) поверхні за диференційованої трансформації її координат. Тензор задано в окремій точці поверхні. Якщо його визначити для всієї області відображення, то утвориться тензорне поле, яке й визначає поле деформації з властивими йому параметрами [7].

Загальна теорія розглядає поверхні обертання в криволінійній координатній системі з ізометричними широтою q та довготою λ. В ізометричній параметризації лінійний елемент поверхні

$$ds^2 = r^2(dq^2 + d\lambda^2),$$

де r – радіус паралелі на широті q [2].

Геодезичні задачі на геосфері прийнято розв'язувати в геоцентричній сферичній системі з широтою φ (або полярною віддаллю $\theta = \pi/2 - \varphi$) та довготою λ. Геосфера має сталу кривину радіуса R. Враховуючи взаємозв'язки диференціалів ізометричної та сферичної широт

$$dq = \frac{R}{r} d\varphi = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{R}{r} d\theta = \frac{d\theta}{\sin\theta},$$

лінійний елемент геосфери виражає формула

$$ds^2 = r^2\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 d\theta^2 + d\lambda^2\right), \qquad (1)$$

де $r = R\cos\varphi = R\sin\theta$ – радіус паралелі на широті φ.

На земному еліпсоїді найоптимальнішою є геодезична координатна система з широтою B та довготою L. Кривину поверхні в будь-якій її точці визначають головні радіуси – меридіанного перерізу M та перерізу першого вертикала N. Враховуючи взаємозв'язок

$$dq = \frac{M}{r} dB,$$

де $r = N\cos B$ – радіус паралелі на широті B, для лінійного елемента еліпсоїда одержуємо рівність

$$ds^2 = r^2\left(\left(\frac{M}{r}\right)^2 dB^2 + dL^2\right). \qquad (2)$$

Величини, які виражають формули (1) або (2), є метричними мірами відповідних їм поверхонь.

Виділимо на поверхні S деяку замкнену неперервну область Δ, яку визначає скінченну кількість геодезичних пунктів з координатами θ, λ або B, L. Якщо земна поверхня зазнала деформації, то положення тих самих пунктів визначатимуть координати θ', λ' або B', L', а область $\Delta \subset S$ трансформується в область Δ' поверхні S'. За умови збереження у Δ' властивості замкненої неперервної області поверхня S відобразилась на S'. Якщо співвідношення між координатами пунктів θ, λ і θ', λ' (або між B, L і B', L') виражають функції

$$\left.\begin{aligned} \theta' &= u(\theta, \lambda) \\ \lambda' &= v(\theta, \lambda) \end{aligned}\right\}$$

або

$$\left.\begin{aligned} B' &= u(B,L) \\ L' &= v(B,L) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

і такі функції гомеоморфні, то вони разом з метричними мірами (1) або (2) дають змогу описати зміну внутрішньої геометрії окресленої пунктами області відображення і тим самим сформувати поле деформації з властивими йому параметрами. Розв'язання такої задачі на геосфері викладено у статті [5]. Типізуємо його для моделі земного еліпсоїда обертання і порівняємо результати.

З метою формування тензора деформації метричну форму поверхні відображення

$$ds'^2 = r'^2\left(\left(\frac{M'}{r'}\right)^2 dB'^2 + dL'^2\right) \qquad (4)$$

виражаємо через координати вихідної поверхні S. Враховуючи заміну змінної $q = q(B)$, функції відображення поверхонь з ізометричною параметризацією

$$\left.\begin{aligned} q' &= u(q,\lambda) \\ \lambda' &= v(q,\lambda) \end{aligned}\right\}$$

перетворюємо на геодезичну систему:

$$\left.\begin{aligned} q'(B') &= u(q(B),L) \\ L' &= v(q(B),L) \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Виражаємо повні диференціали функцій (5):

$$\frac{M'}{r'}dB' = \frac{\partial u}{\partial B}dB + \frac{\partial u}{\partial L}dL;$$

$$dL' = \frac{\partial v}{\partial B}dB + \frac{\partial v}{\partial L}dL.$$

Підстановка останніх до метричної форми (4) у підсумку забезпечує рівність

$$ds'^2 = r'^2(edB^2 + 2\,fdBdL + gdL^2),$$

де

$$\left.\begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial u}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial B}\right)^2 \\ f &= \frac{\partial u}{\partial B}\frac{\partial u}{\partial L} + \frac{\partial v}{\partial B}\frac{\partial v}{\partial L} \\ g &= \left(\frac{\partial u}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial L}\right)^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Коефіцієнти (6) формують тензор перетворення метричної форми вихідної поверхні внаслідок її відображення (тензор деформації):

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Його детермінант

$$h^2 = eg - f^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial B}\frac{\partial v}{\partial L} - \frac{\partial u}{\partial L}\frac{\partial v}{\partial B}\right)^2.$$

Загальна теорія поверхонь накладає умову: $h^2 > 0$. Оскільки ця умова може порушуватись у полюсах еліпсоїда, то ці точки не потрібно брати до уваги під час опрацювання даних.

Тензор (7) визначає поле деформації області $\Delta \subset S$. Наведемо формули, які виражають його параметри. За аналогією з [5], поділимо параметри на три групи залежно від їх змісту і призначення.

1. *Показники лінійних спотворень області* Δ. Загалом масштаб відображення, заданого функціями (3), є наслідком відношення метричних форм (4) і (2):

$$\mu^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = e\frac{r'^2}{M^2}\cos^2 A + f\frac{r'^2}{Mr}\sin 2A + g\frac{r'^2}{r^2}\sin^2 A.$$

Коефіцієнт (або модуль) лінійного розширення μ характеризує зміну довжини лінійного елемента ds з переходом до ds' в точці B, L у напрямі, заданому азимутом

$$A = arctg\frac{rdL}{MdB}.$$

Розв'язок рівняння $\frac{d(\mu^2)}{dA} = 0$ розкриває головні напрями спотворень $A_\circ$ і $A_\circ + \pi/2$:

$$A_\circ = \frac{1}{2}arctg\frac{2\,fMr}{er^2 - gM^2}.$$

Головні напрями визначають екстремальні масштаби відображення у заданій точці вихідної поверхні, які виражаються коефіцієнтами максимального $\mu_{\max} = a$ і мінімального $\mu_{\min} = b$ розширень:

$$a^2 = \frac{r'^2}{2M^2r^2}\left(er^2 + gM^2 + \sqrt{(er^2 - gM^2)^2 + 4f^2M^2r^2}\right);$$

$$b^2 = \frac{r'^2}{2M^2r^2}\left(er^2 + gM^2 - \sqrt{(er^2 - gM^2)^2 + 4f^2M^2r^2}\right).$$

Масштаби відображення у напрямах меридіанів і паралелей, якщо $A = 0$ і $A = \pi/2$, характеризують коефіцієнти

$$\mu_0^2 = m^2 = \frac{r'^2}{M^2}e;$$

$$\mu_{\pi/2}^2 = n^2 = \frac{r'^2}{r^2}g.$$

Зараховані до цієї групи параметри поля деформації на геосфері розкривають такі формули [5]:

$$\mu^2 = e\frac{r'^2}{R^2}\cos^2 A + f\frac{r'^2}{Rr}\sin 2A + g\frac{r'^2}{r^2}\sin^2 A;$$

$$A = arctg\frac{rd\lambda}{Rd\theta};$$

$$A_\circ = \frac{1}{2}arctg\frac{2\,fRr}{er^2 - gR^2};$$

$$a^2 = \frac{r'^2}{2R^2r^2}\left(er^2 + gR^2 + \sqrt{(er^2 - gR^2)^2 + 4f^2R^2r^2}\right);$$

$$b^2 = \frac{r'^2}{2R^2r^2}\left(er^2 + gR^2 - \sqrt{(er^2 - gR^2)^2 + 4f^2R^2r^2}\right);$$

$$m^2 = \frac{r'^2}{R^2}e; \quad n^2 = \frac{r'^2}{r^2}g.$$

Зважаючи на перспективу порівняння формул обчислення параметрів поля деформації на геосфері та еліпсоїді, варто звернути увагу на розбіжності у вираженні радіусів паралелей r на цих поверхнях.

2. *Показники кутових спотворень системи координатних ліній та області* Δ. Загальна теорія відображення [2] дає змогу кутовими мірами виражати спотворення системи координатних ліній, якими параметризована поверхня. За основу беруть відношення диференціалів проекцій координатних ліній на поверхні відображення, які виражені в координатній системі вихідної поверхні. Для явного вираження таких відношень необхідною умовою є встановлення функцій, які реалізовують відображення. На поверхнях обертання систему координатних ліній утворюють меридіани і паралелі. Їх мережа в ізометричній параметризації збігається з такою самою як у сферичній, так і в геодезичній. Різняться між собою лише системи координат відносно меридіанів і паралелей на різних поверхнях. Вони встановлені з міркувань оптимального описування абсолютного положення точок на тій чи іншій поверхні. Отже, обґрунтування розв'язання цієї частини задачі на геосфері та еліпсоїді тотожні. Наводимо кінцевий результат розв'язання – формули для вираження різних показників кутових спотворень геодезичної координатної системи. Отже,

$$tg\psi = \left(\frac{\partial v}{\partial B}\right) \Big/ \left(\frac{\partial u}{\partial B}\right);$$

$$tg\chi = \left(\frac{\partial v}{\partial L}\right) \Big/ \left(\frac{\partial u}{\partial L}\right).$$

ψ та χ – азимути проекцій меридіанів і паралелей вихідної поверхні в разі переходу на поверхню відображення відповідно до функцій (3). Якщо деформації вихідної поверхні, представлені цими функціями, зумовили спотворення ортогональності меридіанів і паралелей на поверхні відображення, то різниця

$$\vartheta = \chi - \psi$$

або кут

$$\varepsilon = \vartheta - \frac{\pi}{2}$$

є показниками такого спотворення. Явне вираження цих показників забезпечують формули

$$\vartheta = arctg\frac{h}{f}; \quad \varepsilon = -arctg\frac{f}{h}.$$

Формули вираження показників ϑ і ε на еліпсоїді та геосфері ідентичні.

З погляду змісту, яким наділені параметри цієї групи, вони можуть мати двояке практичне застосування. Перше, очевидне, – встановлення руху полюсів Землі і, разом з показниками лінійних спотворень, деформацій координатних систем. Стосовно розв'язання задач геодинаміки пряме відношення до інтерпретації полів деформації земної поверхні має величина кута $\varepsilon/2$ – показник обертання області відображення Δ.

3. *Показники спотворення площі області* Δ. Масштаб площі виражає відношення диференціалів dp'/dp. $dp = MrdBdL$ – елементарна площа вихідної поверхні довкола заданої точки, яка є областю зміни координат B, L і відповідає парам їх значень. $dp' = M'r'dB'dL'$ – відповідна їй площа на поверхні відображення. Наслідок такого відношення виражається коефіцієнтом відносної зміни площі відображуваної області

$$p = \frac{r'^2}{Mr}h. \tag{8}$$

Формулу (8) можна також одержати з добутку

$$p = ab.$$

Коефіцієнт відносної зміни площі області відображення геосфери виражає формула

$$p = \frac{r'^2}{Rr}h.$$

Висновки та перспективи подальших досліджень

1. Подані в роботі розрахункові формули дають змогу оцінювати деформації земної поверхні за результатами спостережень, які виражені в геодезичній системі координат. Оцінки деформацій відносяться до земного еліпсоїда обертання.

2. Методика оцінювання деформацій земної поверхні, редукованої на еліпсоїд, а також методики [4] та [5] ґрунтуються на теорії відображення поверхонь. Такий підхід до вирішення проблеми, альтернативний щодо традиційного, значно розширює інформативні можливості геодезичних методів моніторингу геодинамічних процесів у частині інтерпретації деформаційних полів.

3. Порівняння формул розрахунку параметрів деформації земної поверхні, редукованої на еліпсоїд та геосферу, показує такі відмінності. Перша, явна, зводиться до врахування кривини поверхонь з різною параметризацією. Останнє рівною мірою стосується також відповідних розрахункових формул на площині [4], де кривина нульова, а функції, які її виражають, $\lambda(u,v) \equiv 1$. Друга відмінність закладена у компонентах тензора, якими виражаються параметри поля деформації. Тензор визначається функціями відображення поверхонь. Отже, ця відмінність теж зумовлена параметризацією поверхні та показниками її кривини.

4. Подібний до попереднього висновок сформульовано у монографії [3], але за результатами інших прикладних досліджень на засадах теорії відображення поверхонь – пошуку оптимальних проекцій різних поверхонь на площину в математичній картографії. Ідентичність висновків засвідчує достовірність одержаних нами результатів.

5. Факти, обґрунтовані у попередніх рубриках, дають підстави здійснювати трансформацію полів деформації, які віднесені до однієї відлікової геодезичної поверхні, на будь-яку іншу потрібну поверхню. Цього можна досягти за умови вираження взаємозв'язків параметрів кривини різних поверхонь та їх координатних систем. Гіпотетично встановлення таких взаємозв'язків – нескладна математична задача. Означена трансформація має очевидну перспективу в зв'язку з необхідністю врахування геодинамічних ефектів, зокрема поля деформації планетарного масштабу, під час встановлення (уточнення) фігури Землі.

Література

1. Есиков Н. П. Современные движения земной поверхности с позиций теории деформации / Н. П. Есиков. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1991. – 226 с.

2. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1, 2 / В. Ф. Каган. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1947-1948. – 919 с.
3. Мещеряков Г. А. Теоретические основы математической картографии / Г. А. Мещеряков. – М.: Недра, 1968. – 160 с.
4. Тадєєв О. А. Оцінювання деформацій земної поверхні з позицій теорії квазіконформних відображень / О. А. Тадєєв // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2013. – № 78. – С. 140–145.
5. Тадєєв О. Оцінювання деформацій земної поверхні, редукованої на геосферу / О. Тадєєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2013. – № II(26). – С. 46–52.
6. Тадєєв О. А. Проблема оцінки деформованого стану земної поверхні за геодезичними даними / О. А. Тадєєв, О. О. Тадєєва, П. Г. Черняга // Геодинаміка. – 2013. – № 1(14). – С. 5–10.
7. Тадєєв О. А. Шляхи вирішення задачі оцінювання деформацій земної поверхні за геодезичними даними / О. А. Тадєєв // Вісник геодезії та картографії. – 2013. – № 5(86). – С. 21–26.

Оцінювання деформацій земної поверхні за даними в геодезичних криволінійних системах координат

О. Тадєєв

Розкрито розв’язання задачі оцінювання деформацій земної поверхні за результатами спостережень, які виражені в геодезичній (еліпсоїдальній) системі координат. Вираження параметрів деформації ґрунтується на теорії відображення поверхонь. Результати розв’язання на земному еліпсоїді обертання порівняно з аналогічними результатами на геосфері.

Оценка деформаций земной поверхности по данным в геодезических криволинейных системах координат

А. Тадеев

Раскрыто решение задачи оценки деформаций земной поверхности по результатам наблюдений, которые выражены в геодезической (эллипсоидальной) системе координат. Выражение параметров деформации основано на теории отображения поверхностей. Результаты решения на земном эллипсоиде вращения сравнены с аналогичными результатами на геосфере.

Estimation of earth surface deformations according to the data in geodetic curvilinear coordinate systems

A. Tadyeyev

The solution of the task of estimation the earth surface deformations by the measuring data which are expressed in the geodetic (ellipsoidal) coordinate system is disclosed. Expression of deformation parameters is based on the theory of the surfaces reflection. Results of the solution on the earth ellipsoid of revolution compared with similar results in the geosphere.