

УДК 528.92

## ВИЗНАЧЕННЯ ЩІЛЬНОСТІ РЕГУЛЯРНОЇ СІТКИ БІКУБІЧНОЇ СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ПРИ СТВОРЕННІ ЦМР

К. Бурак, В. Ковтун, Р. Левицький

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

**Ключові слова:** інтерполяція, бікубічний сплайн, ЦМР, регулярна сітка.

### Постановка проблеми

Як досліджено в [1], поверхня, побудована за допомогою бікубічної сплайн-інтерполяції (БСІ), відтворює рельєф з високою точністю, що дає змогу рекомендувати таке інтерполювання для точнішого відтворення реальних поверхонь. Вихідними даними для розрахунку бікубічного полінома, що визначає поверхню, є значення висот вузлів регулярної сітки, тому важливим питанням щодо використання БСІ для побудови цифрової моделі рельєфу (ЦМР) є вибір щільності регулярної сітки.

Зрозуміло, що за більшої щільності сітки точність відтворення рельєфу зростатиме. Розрахунок коефіцієнтів полінома БСІ є трудомістким процесом та займає багато часу навіть для сучасних комп'ютерів, до того ж зі збільшенням щільності сітки збільшується кількість вузлів та відповідно точок, висоти яких необхідно визначити, що призведе до надлишкових затрат машинного часу.

Тому постає проблема дослідження оптимальної щільності регулярної сітки, що використовується для побудови ЦМР в автоматичному режимі.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

У статті [3] автор вказує на проблему підбору відповідно до типу рельєфу густоти регулярної сітки, тому в статті запропоновано для побудови ЦМР використовувати дані, отримані комбінованим способом в процесі дигіталізації структурних ліній базисного й вершинного типів та горизонталей.

Своєю чергою, у [4] І. Г Черваньов пропонує для рівнинного рельєфу за масштабу карти в 1:50000 для побудови порівняно коректної ЦМР використовувати регулярну сітку, записуючи в пам'ять комп'ютера 400 точок на 1 км<sup>2</sup>, тобто сітку зі стороною в 50 м.

Неодноразово багато авторів аргументували, що оптимальним рішенням є створення ЦМР з урахуванням характерних елементів рельєфу [5, 6]. Однак М. Р. Kumlner [6] показав, що ЦМР, створена за квадратною сіткою, може бути і точнішою за триангуляційну нерегулярну сітку (ТІН).

Тому одним з головних питань, що постають під час побудови ЦМР, є вибір кроку сітки для побудови поверхні необхідної точності.

### Постановка завдання

Визначення достатнього розміру регулярної сітки для досягнення необхідної точності відтворення рельєфу та розрахунок кореляційних залежностей щільності регулярної сітки і точності відтворення рельєфу під час побудови ЦМР в автоматичному режимі.

### Виклад основного матеріалу

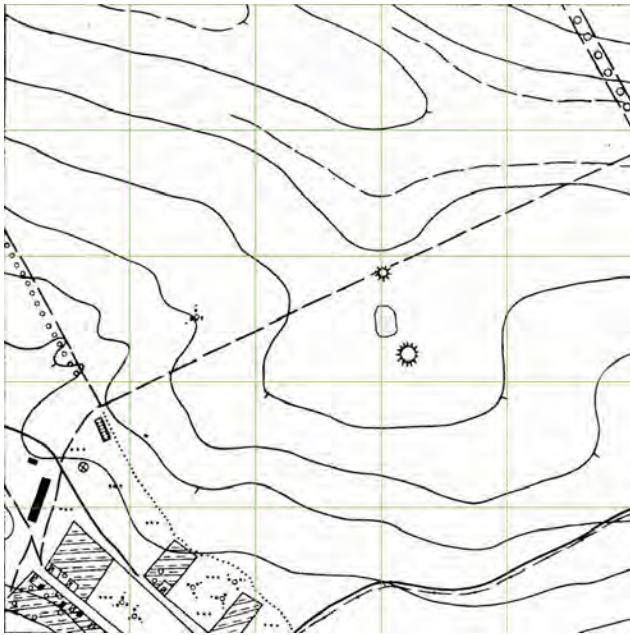
Автори використали приклад поверхні типового рельєфу, що взятий з [2], а саме еталонів для визначення складності рельєфу. Зазначимо, що в згаданій вище роботі досліджено рельєф першої категорії складності. В цій роботі наведено результати дослідження точності відображення рельєфу місцевості вищих категорій складності. Досліджено три зразки рельєфу, а саме 2-ї, 4-ї та 5-ї категорій складності. Для кожної з цих категорій створено ЦМР, яку задавали бікубічним поліномом.

Спосіб визначення точності відображення рельєфу поверхнею, що задана таким поліномом, описано в попередній роботі [1]. Аналіз точності полягав у знаходженні відхилень значень висот, отриманих за допомогою математичної моделі, в основі якої – лінійна інтерполяція, на вихідному картографічному матеріалі та значень, знайдених з використанням створеної програми.

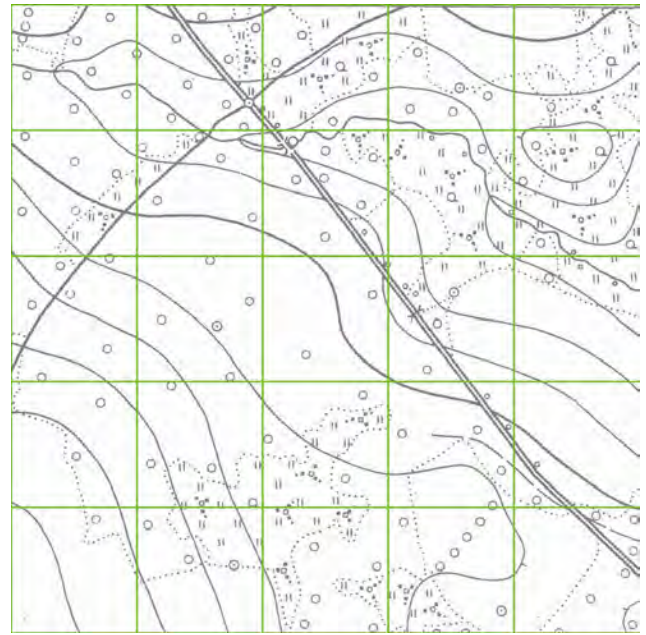
На рис. 1 зображено вихідні зразки рельєфу з нанесеними на них регулярними сітками з довжиною сторони 100 м. Сформувавши поверхні, задані поліномом, та використавши методику розрахунку точності, розроблену в [1], досліджено точність відображення ЦМР, створеної за допомогою БСІ. Отримані результати наведено в табл. 1. Приймаючи значення, отримані з математичної моделі, як ідеальні, виконано розрахунок СКП за формулою Гаусса:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}}. \quad (1)$$

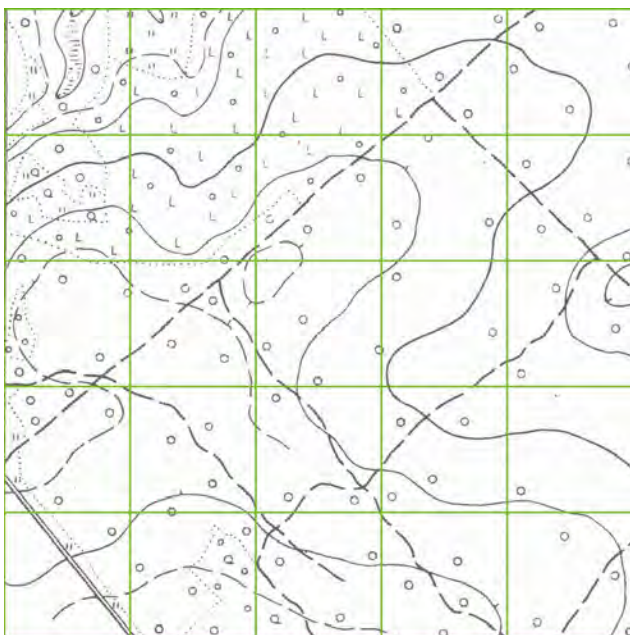
Проаналізувавши отримані результати, бачимо, що для рельєфу 2-ї категорії складності, поліном для ЦМР якої знайдено за допомогою розробленої нами програми БСІ за щільності регулярної сітки 100 м, побудований з СКП в 0,885 м, для 4-ї категорії – 1,339 м та для 5-ї категорії – 0,891 м.



а



б



в

Рис. 1. Вихідний картографічний матеріал 2-ї (а) 4-ї (б) та 5-ї (в) категорії зі 100-метровою сіткою

Щоб знайти залежності між густиною регулярної сітки та точністю відтворення ЦМР, виконано згущення регулярної сітки та розраховано зміну точності відтворення рельєфу. У разі використання регулярної сітки з розміром сторони 100 м отримано 36 вузлових точок та відповідно 25 квадратів. Якщо ущільнити сітку втричі, для отримання сітки зі стороною квадрата 33 м ми б отримали 256 вузлових точок та 225 квадратів. У зв'язку з величезним обсягом роботи, необхідної для згущення сітки на всю поверхню, для оцінки точності використовували два з 25 стометрових

квадратів, які мали найбільшу та найменшу СКП відтворення рельєфу (рис. 2). Такий спосіб дав нам змогу отримати максимальну та мінімальну можливу точність побудови поверхні на заданому рельєфі.

Згустивши регулярну сітку зі стороною 100 м, побудовану на прикладі рельєфу другої категорії складності, сіткою зі стороною 33 м, ми розрахували СКП відтворення рельєфу (результати наведено в табл. 2). СКП для 2-ї категорії складності становила 0,885 м. Як зазначено вище, для дослідження ми вибрали стометрові квадрати з максимальним значенням СКП (1,683 м) та мінімальним значенням СКП (0,140 м) після згущення цих квадратів сіткою зі стороною 33 м СКП<sub>min</sub> ми отримали 0,137 м, а СКП<sub>max</sub> – 0,597 м.

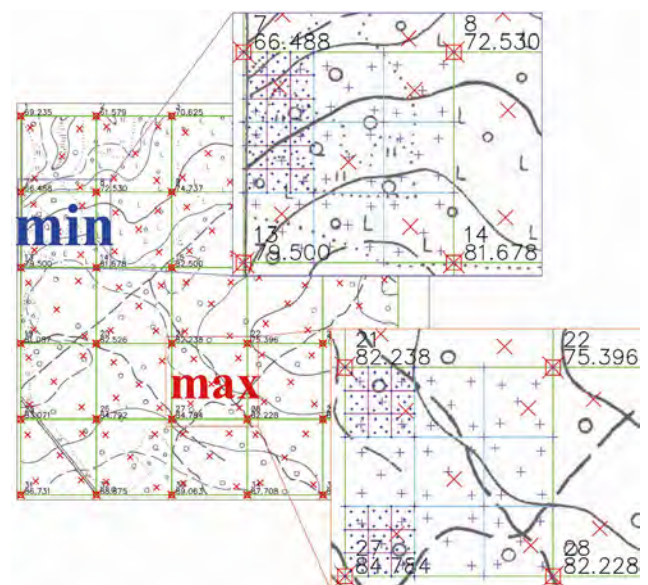


Рис. 2. Згущення регулярної сітки

Таблиця 1

**Розрахунок середньоквадратичної похибки знаходження висот на поверхні ЦМР, заданої бікубічним поліномом за щільності регулярної сітки 100 м**

№	2-га категорія складності			4-га категорія складності			5-га категорія складності		
	Н, м <i>Лінійна</i>	Bicubic spline interpolation		Н, м <i>Лінійна</i>	Bicubic spline interpolation		Н, м <i>Лінійна</i>	Bicubic spline interpolation	
		Н, м	Δ, м		Н,	Δ,		Н, м	Δ, м
1	251,987	252,041	0,054	70,168	70,244	0,076	75,614	75,902	0,288
2	253,651	254,414	0,763	67,897	67,800	-0,097	75,627	76,644	1,017
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
124	244,506	243,870	-0,636	81,463	80,519	-0,944	79,377	77,209	-2,168
125	245,931	245,607	-0,324	77,109	77,162	0,053	81,791	79,799	-1,992
СКП = 0,885 м			СКП = 1,339 м			СКП = 0,891 м			

Таблиця 2

**Розрахунок середньоквадратичних похибок відтворення ЦМР БСІ за щільності регулярної сітки 33 м**

2-га категорія складності (СКП=0,885 м при 100 м)							
СКП <sub>min</sub> = 0,140 м при 100 м				СКП <sub>max</sub> = 1,683 м при 100 м			
№	Н, м <i>Лінійна</i>	Bicubic spline interpolation		№	Н, м <i>Лінійна</i>	Bicubic spline interpolation	
		Н, м	Δ, м			Н, м	Δ, м
242	256,808	256,610	-0,198	303	240,864	240,741	-0,123
243	257,947	257,674	-0,273	304	241,209	241,104	-0,105
...	...	...	...	...	...	...	...
285	255,058	255,779	0,721	346	240,604	240,585	-0,018
286	255,534	255,571	0,037	347	238,663	239,579	0,916
СКП = 0,137 при 33 м				СКП = 0,597 при 33 м			

Таблиця 3

**Порівняльна таблиця середньоквадратичних похибок**

2-га категорія складності (СКП = 0,885 м)							
СКП <sub>min</sub> = 0,140 м							
№	Н, м	bicub_33, м	Δ, м	ΔΔ, м <sup>2</sup>	bicub_100, м	Δ, м	ΔΔ, м <sup>2</sup>
106	256,210	256,0726	-0,137	0,0189	256,4269	0,217	0,0470
107	258,842	258,9937	0,152	0,0230	258,8537	0,012	0,0001
108	252,691	252,6567	-0,034	0,0012	252,7708	0,080	0,0064
109	255,583	255,5404	-0,043	0,0018	255,3845	-0,199	0,0394
110	255,945	256,0012	0,056	0,0032	256,0147	0,070	0,0049
СКП = 0,098 м при 33 м				СКП = 0,140 м при 100 м			
СКП <sub>max</sub> = 1,683 м							
№	Н, м	bicub_33, м	Δ, м	ΔΔ, м <sup>2</sup>	bicub_100, м	Δ, м	ΔΔ, м <sup>2</sup>
216	239,667	239,4990	-0,168	0,028	239,9947	0,328	0,1074
217	242,541	242,3898	-0,151	0,023	243,2292	0,688	0,4736
218	236,477	237,4886	1,012	1,023	239,4128	2,936	8,6192
219	234,379	233,3012	-1,078	1,162	235,8850	1,506	2,2681
220	238,878	239,6486	0,771	0,594	240,5170	1,639	2,6865
СКП = 0,752 м при 33 м				СКП = 1,683 м при 100 м			

Також покращення точності простежено за допомогою розрахунку точності знаходження висот точок, які взято для оцінки якості відтворення рельєфу в 100-метровій та в 33-метровій сітках (табл. 3).

Отже, висоти тих самих точок місцевості залежно від кроку регулярної сітки знайдені з різною точністю. Для квадрата з мінімальною СКП точність покращилася з 0,140 м до 0,098 м, а для квадрата з максимальною СКП з 1,683 м до 0,752 м за використання втричі густішої регулярної сітки.

Для оцінки точності отриманих даних такі самі дослідження проведено для картографічного матеріалу четвертої (табл. 4) та п'ятої (табл. 5) категорій складності.

Тобто з використанням регулярної сітки з утричі меншою стороною було зменшено СКП до рівня точності відтворення рельєфу БСІ першої категорії складності. Отже, можемо припустити, що у разі згущення регулярної сітки утворюються квадрати сітки, що відображають ділянки простіших рельєфів,

що, як показують дослідження, відтворюються з вищою точністю. Наочно результати згущення наведено на рис. 3–5, де явно простежується зменшення СКП зі зменшенням розміру регулярної сітки.

Отже, СКП відтворення рельєфу другої категорії складності за допомогою БСІ з використанням 100-метрової сітки дорівнює 0,885 м, при 33-метровій сітці 0,433 м і 0,096 м для 11-метрової (рис. 3). З цього робимо очевидний висновок, що існує залежність між розміром сітки та точністю відтворення поверхні. Для знаходження цієї залежності розраховано коефіцієнт кореляції Пірсона та рівень її значущості. Відомо, що рівень значущості є мірою статистичної достовірності результатів обчислень. Коефіцієнт кореляції Пірсона між густиною сітки та СКП становить 0,685, що вказує на високу пряму залежність цих величин, а двостороння значущість дорівнює 0, що дає підстави говорити про те, що знайдена кореляція є статистично достовірною.

Таблиця 4

## Розрахунок середньоквадратичних похибок для 4-ї категорії

4-та категорія складності (СКП = 1,3395 м при 100 м)							
СКП <sub>min</sub> = 0,1249 м при 100 м				СКП <sub>max</sub> = 3,5095 м при 100 м			
№	Н, м Лінійна	Bicubic spline interpolation		№	Н, м Лінійна	Bicubic spline interpolation	
		Н, м	Δ, м			Н, м	Δ, м
55	93,2605	93,3867	0,1262	241	69,9596	69,6918	-0,2678
56	92,8988	93,0440	0,1452	242	70,8093	71,1884	0,3791
...	...	...	...	...	...	...	...
98	93,9944	93,9746	-0,0198	284	59,0941	58,6174	-0,4767
99	94,5903	94,5917	0,0014	285	61,0275	60,6557	-0,3718
		СКП = 0,067 м при 33 м				СКП = 0,367 м при 33 м	

Таблиця 5

## Розрахунок середньоквадратичних похибок для 5-ї категорії

5-та категорія складності (СКП = 0,891 м при 100 м)							
СКП <sub>min</sub> = 0,208 м при 100 м				СКП <sub>max</sub> = 1,866 м при 100 м			
№	Н, м Лінійна	Bicubic spline interpolation		№	Н, м Лінійна	Bicubic spline interpolation	
		Н, м	Δ, м			Н, м	Δ, м
53	81,745	81,717	-0,028	1	67,500	68,946	1,446
54	80,384	80,422	0,038	2	70,662	70,714	0,052
...	...	...	...	...	...	...	...
96	81,900	81,891	-0,009	44	81,767	81,744	-0,023
97	81,227	81,127	-0,099	45	81,758	81,651	-0,107
		СКП = 0,144 м при 33 м				СКП = 0,268 м при 33 м	

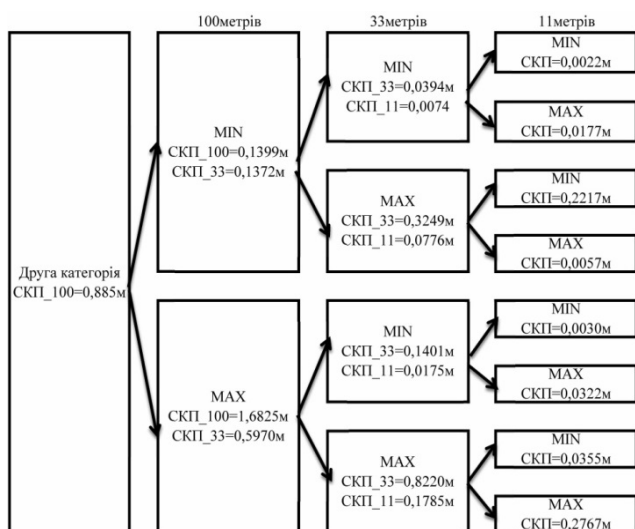


Рис. 3. Результати дослідження точності в разі зсування регулярної сітки (друга категорія складності)

Такі самі дослідження проведено для четвертої категорії складності рельєфу (рис. 4). Для цієї категорії складності точність відображення рельєфу за допомогою БСІ з використанням регулярної сітки з густиною 100 м становила 1,399 м, з використанням 33 м регулярної сітки СКП = 0,255 м, а для сітки з кроком у 11 м СКП знизилася до 0,088 м. Для картографічного зразка четвертої категорії складності також розраховано значення кореляції Пірсона та рівень значущості. Коефіцієнт Пірсона дорівнює 0,665 з відповідно рівнем значущості 0, що також свідчить про високу пряму залежність між СКП та густиною сітки.

Аналогічно для п'ятої категорії складності СКП при 100 метрах становила 0,891 м, при 33 м СКП = 0,214 м, та при 11 м СКП дорівнювала 0,038 м. Значення максимальних та мінімальних СКП відтворення поверхні квадратів наведено на рис. 5. Розраховано також коефіцієнт кореляції Пірсона, що дорівнював 0,759, та двосторонню значущість, що дорівнювала 0.

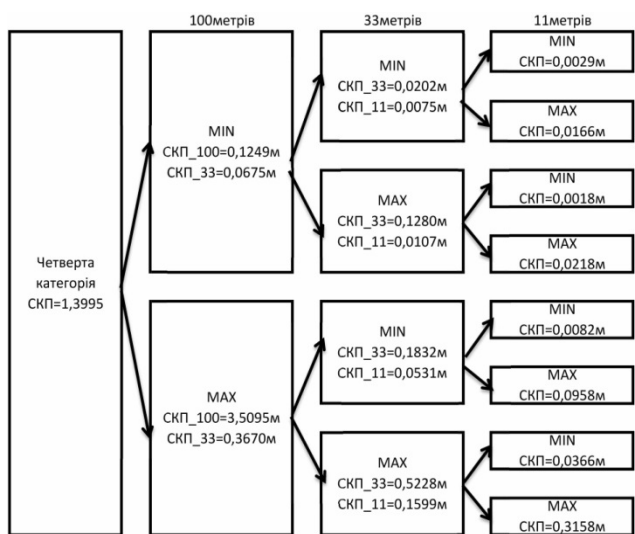


Рис. 4. Результати оцінки точності відтворення ЦМР при зсуванні регулярної сітки (четверта категорія складності)

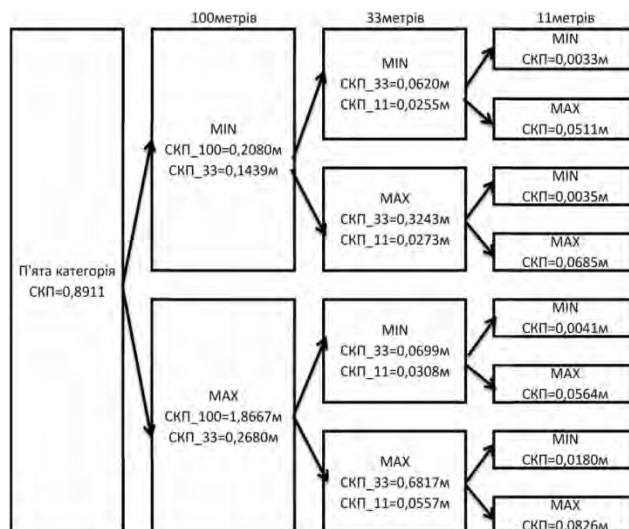


Рис. 5. Результати оцінки точності відтворення ЦМР при зсуванні регулярної сітки (п'ята категорія складності)

За допомогою відомих формул на основі проведених досліджень можемо встановити загальні кореляційні зв'язки між СКП знаходження висоти та категорією рельєфу і густиною сітки (табл. 6).

$$r_{L,n} = \frac{\sum_{i=1}^m (L_i - L)(n_i - n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (L_i - L)^2 \sum_{i=1}^m (n_i - n)^2}} \quad (2)$$

де  $L$  – крок регулярної сітки;  $n$  – категорія рельєфу;  $m$  – кількість пар результатів дослідження.

Проаналізувавши 237 пар значень (результати наведено в табл. 6), отримали двосторонню значущість на рівні 0,00, що дало підстави зробити висновок про те, що існує висока пряма залежність між СКП та густиною сітки.

Таблиця 6

Кореляційні зв'язки досліджуваних критеріїв

	Категорія	Густина	СКП
	рельєфу	сітки	
Категорія рельєфу	1	0	-0,022
Густина сітки	0	1	0,685
СКП	-0,022	0,685	1

За допомогою встановлених залежностей та розрахованих середньоквадратичних похибок всіх квадратів, що брали участь в дослідженні, ми отримали залежність СКП визначення висоти точки ЦМР, побудованої за допомогою БСІ, від кроку регулярної (квадратної) сітки та категорії складності рельєфу (рис. 6).

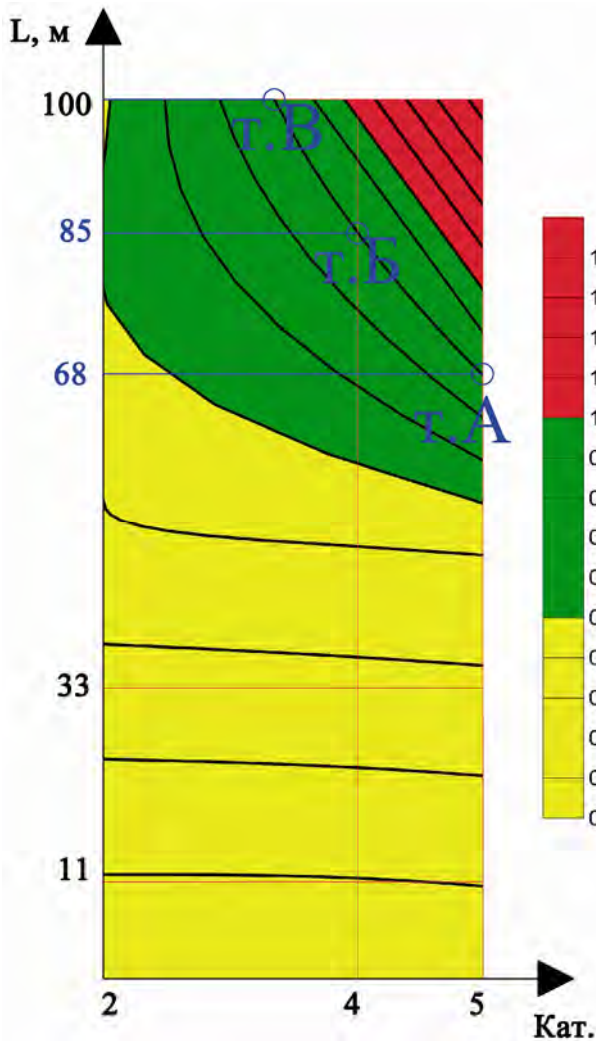


Рис. 6. Залежність точності визначення висоти точки ЦМР від кроку регулярної сітки та категорії складності рельєфу

Керуючись положеннями [8], що є обов'язковими для всіх підприємств, організацій та установ, які виконують топографо-геодезичні та картографічні роботи, незалежно від форм власності та їхньої відомчої належності, автори встановили необхідні розміри квадратної сітки для досягнення регламентованої точності (табл. 7). За допомогою рис. 6 встановимо графічним способом необхідні  $L$  для кожної категорії складності рельєфу. З табл. 7 відомо, що для плоскорівнинних районів робіт для карт масштабів 1:10000 СКП не повинна перевищувати 0,1 м, тож, використовуючи БСІ для побудови ЦМР для 2, 4 та 5 категорії складності рельєфу, потрібно використовувати регулярну сітку зі стороною 11 м. Для забезпечення точності для карт масштабів 1:50000 для рівнинних, пересічених та горбистих районів робіт з переважанням схилів місцевості до  $6^\circ$ , для 5-ї категорії складності достатньо використовувати сітку зі стороною 68 м (рис. 6 т. А), для 4-ї категорії – 85 м (рис. 6 т. Б), а також для відтворення ЦМР рельєфу 2-ї категорії можна використовувати й 100 м сітку (рис. 6 т. В).

### Нормативні вимоги щодо точності визначення висот

Райони робіт	Масштаби карт			
	1:10000	1:25000	1:50000	1:100000
	Середні помилки визначення висот точок, м			
Плоскорівнинні зі схилами місцевості до $2^\circ$	0,1	0,25	0,8	1,5
Те саме в залісених районах	0,2	0,5	0,8	1,5
Рівнинні, пересічені та горбисті райони з переважанням схилів місцевості до $6^\circ$	0,25	0,5	0,8	1,5
Те саме у відкритих районах із схилами місцевості до $4^\circ$	0,25	0,25	0,8	1,5
Низькогірні та середньогірні райони	0,5	0,5	1,2	2,5
Високогірні райони	–	1	2,6	5

### Висновки

Результатом проведених досліджень стала апостеріорна оцінка впливу розміру квадратної регулярної сітки та категорії складності рельєфу на середньоквадратичну похибку знаходження висоти цифрової моделі рельєфу, створеної бікубічною сплайн-інтерполяцією, та встановлені кореляційні залежності між цими параметрами. Створений графік залежності точності визначення висоти точки з ЦМР від кроку регулярної сітки та категорії складності рельєфу дає змогу вибрати оптимальні розміри регулярної сітки.

Доведена можливість використання БСІ для побудови ЦМР для 2, 4, 5 категорій складності рельєфу з нормативною точністю. Розраховані розміри регулярної сітки, що задовольняють нормативні вимоги щодо точності визначення висот у цих районах робіт.

### Література

1. Дослідження особливостей та точності побудови ЦМР за допомогою бікубічної сплайн-інтерполяції / К. Бурак, В. Ковтун, Р. Левицький, М. Ничвид // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2014. – Вип. 2. – С. 32–36. – Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/j-pdf/sdgn\\_2014\\_2\\_9.pdf](http://nbuv.gov.ua/j-pdf/sdgn_2014_2_9.pdf)
2. Единые нормы выработки (времени) на геодезические и топографографические работы. Часть II. Камеральные работы.; утв. Госкомтруд, ВЦСПС Пост.29/3-1.
3. Білоус Л.Ф. Цифрова модель рельєфу в географічному й геоінформаційному просторі // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия "География". – 2008. – Т. 21(60). – № 2. – С. 117–127.
4. Черванев И. Г. Структура рельефа и ее влияние на ландшафт // Физ. география и геоморфология. – 1983. – Вып. 30. – С. 104–107.
5. Коновалов Н. Е. Цифровое моделирование топографических условий местности для проектиро-

вания линейных сооружений // Тр. ГипродорНИИ. – 1974. – Вып. 8. – С. 21–33.

6. Mark D. M. Phenomenon-based data-structuring and digital terrain modelling // GeoProcessing. – 1979. – V. 1. – № 1. – P. 27–36.
7. Kumler M. P. An intensive comparison of triangulated irregular networks (TINs) and digital elevation models (DEMs) // Cartographica. – 1994. – V. 31. – № 2. – P. 1–99.
8. Основні положення створення та оновлення топографічних карт масштабів 1:10000, 1:25000, 1:50000, 1:100000, 1:200000, 1:500000, 1:1000000.

**Визначення щільності регулярної сітки бікубічної сплайн-інтерполяції при створенні ЦМР**

К. Бурак, В. Ковтун, Р. Левицький

Досліджено точність відтворення рельєфу ЦМР створеною авторами програмою БСИ на прикладі різних категорій складності рельєфу. Встановлено кореляційні залежності між розміром регулярної сітки, категорією складності рельєфу та СКП знаходження висоти. Створено графік залежності точності визначення висоти точки з ЦМР від кроку регулярної сітки та категорії складності рельєфу.

**Определение плотности регулярной сетки бикубической сплайн-интерполяции при создании ЦМР**

К. Бурак, В. Ковтун, Г. Левицкий

Исследовано точность воспроизведения рельефа ЦМР, созданной разработанной авторами программой БСИ на примере различных категорий сложности рельефа. Установлены корреляционные зависимости между размером регулярной сетки, категорией сложности рельефа и СКП нахождения высоты. Созданный график зависимости точности определения высоты точки ЦМР от шага регулярной сетки и категории сложности рельефа.

**Determination of the density of a bicubic spline interpolation regular grid when creating DEM**

K. Burak, V. Kovtun, R. Levytskyi

The article present the accuracy of DEM reproduction created by Bicubic Spline Interpolation on the example of different categories of relief complexity. Correlations are established between the size of regular grid, category of relief complexity and a mean-square error of height finding. The graph is drawn showing the dependence of accuracy of point height finding from DEM, the size of regular grid and category of relief complexity.

