УДК 528.33:551.24

ОБҐРУНТУВАННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ЛІНІЙНИХ ВІДРІЗКІВ ВИМІРЮВАННЯМ ЛІНІЙ ДО ЇХ КІНЦІВ ЕЛЕКТРОННИМ ТАХЕОМЕТРОМ

М. Фис, І. Покотило, А. Бридун, Н. Ярема
Національний університет ”Львівська політехніка”

Ключові слова: лінійний інтервал, компарування нівелірних рейок, компаратор, електронний тахеометр; середньоквадратична похибка; взірцевий базис; спостереження за деформаціями.

Постановка проблеми

Використовуючи можливості сучасних тахеометрів, раніше вже проведено дослідження можливості визначення лінійних інтервалів через вимірювання відстаней до їх кінців та кутів із застосуванням відбивних плівок [2].

Аналіз отриманих результатів показав залежність середньоквадратичної похибки довжини визначуваного лінійного відрізка від точності виміряного кута та відстані від електронного тахеометра до кінців цього відрізка. Запропонований метод забезпечує необхідну точність компарування нівелірних рейок, призначених для нівелювання III–IV класів. Разом з тим, у цій методиці розглянуто частковий випадок такого визначення, в зв’язку з чим виникає можливість дослідити інші варіанти розв’язання такої задачі.

Аналіз основних досліджень і публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Визначення малих відстаней з високою точністю [3] потребує спеціального приладдя та спорядження. Обчислення величин метрової довжини з високою точністю вимагає еталону [3], який має бути перевірений у Харківському метеорологічному інституті. В нашому випадку компарування шашкових рейок здійснено контрольним метром або інварною рейкою на компараторі МК-1. Для вимірювання фазової частоти потрібне спеціальне приладдя. В роботах [1, 4] запропонований метод, який дає змогу обчислювати лінійні величини з високою точністю за допомогою електронного тахеометра.

Виклад основного матеріалу

Дослідження, наведені в роботі [4], дають обґрунтоване підтвердження умови рівності двох сторін під час визначення похибки обчислення плеча. У зв’язку з цим сформулюємо задачу в загальному вигляді: за визначеними (виміряними) сторонами a_1, a_2 і кутом α між ними за теоремою косинусів можна знайти сторону $l=\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\alpha}$, середньоквадратична похибка обчислення l визначається за формулою:

$$m_l=\frac{1}{l}\sqrt{\begin{aligned}&\left(a_1-a_2\cos\alpha\right)^2 m_{a_1}{}^2+\left(a_2-a_1\cos\alpha\right)^2 m_{a_2}{}^2\\&+a_1^2a_2^2\sin^2\alpha\; m_\alpha^2\end{aligned}},\qquad(1)$$

звідки

$$m_l l=\sqrt{\begin{aligned}&\left(a_1-a_2\cos\alpha\right)^2 m_{a_1}{}^2+\left(a_2-a_1\cos\alpha\right)^2 m_{a_2}{}^2\\&+a_1^2a_2^2\sin^2\alpha\; m_\alpha^2\end{aligned}}.\qquad(2)$$

Значення m_l залежить від величин a_1, a_2 та α, а отже, можна встановити умову його мінімальності (за винятком очевидного мінімуму $m_\alpha=0$). Існує екстремум функції трьох змінних:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(m_l)}{\partial a_1}=\dfrac{1}{m_l l^2}\left[\begin{aligned}&(a_1-a_2\cos\alpha)m_{a_1}{}^2-\cos\alpha(a_2-a_1\cos\alpha)m_{a_2}{}^2\\&+a_1a_2^2\sin^2\alpha\, m_\alpha^2-m_l^2(a_1-a_2\cos\alpha)\end{aligned}\right]=0\\[2ex]\dfrac{\partial(m_l)}{\partial a_2}=\dfrac{1}{m_l l^2}\left[\begin{aligned}&-\cos\alpha(a_1-a_2\cos\alpha)m_{a_1}{}^2+(a_2-a_1\cos\alpha)m_{a_2}{}^2\\&+a_1^2a_2\sin^2\alpha\, m_\alpha^2-m_l^2(a_2-a_1\cos\alpha)\end{aligned}\right]=0\\[2ex]\dfrac{\partial(m_l)}{\partial\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{m_l l^2}\left[\begin{aligned}&(a_1-a_2\cos\alpha)a_2m_{a_1}{}^2+(a_2-a_1\cos\alpha)a_1m_{a_2}{}^2\\&+a_1^2a_2^2\cos\alpha\, m_\alpha^2-a_1a_2\, m_l^2\end{aligned}\right]=0\end{cases}\qquad(3)$$

Встановлено, що нелінійна система рівнянь (3), як підтвердили числові експерименти, розв’язків не має.

Введемо додаткові умови для його існування, а саме розв’яжемо задачу на умовний екстремум, для цього введемо функцію Лагранжа:

$$m_l(a_1,a_2,\alpha,\lambda)=-\lambda\left(l-\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\alpha}\right)+$$
$$+\frac{1}{l}\sqrt{\left(a_1-a_2\cos\alpha\right)^2 m_{a_1}{}^2+\left(a_2-a_1\cos\alpha\right)^2 m_{a_2}{}^2+a_1^2a_2^2\sin^2\alpha\, m_\alpha^2}.\qquad(4)$$

У цьому випадку система рівнянь (3) набуде вигляду:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(m_l)}{\partial a_1}=\\ =\dfrac{1}{m_l l^2}\left[\begin{aligned}&(a_1-a_2\cos\alpha)\cdot m_{a_1}{}^2-\cos\alpha(a_2-a_1\cos\alpha)\cdot m_{a_2}{}^2\\&+a_1a_2^2\sin^2\alpha\cdot m_\alpha^2-m_l{}^2\cdot(a_1-a_2\cos\alpha)\end{aligned}\right]\\ -\dfrac{\lambda}{l}(a_1-a_2\cos\alpha)=0\\ \dfrac{\partial(m_l)}{\partial a_2}=\\ \dfrac{1}{m_l l^2}\left[\begin{aligned}&-\cos\alpha(a_1-a_2\cos\alpha)\cdot m_{a_1}{}^2+(a_2-a_1\cos\alpha)\cdot m_{a_2}{}^2\\&+a_1^2a_2\sin^2\alpha\cdot m_\alpha^2-m_l{}^2\cdot(a_2-a_1\cos\alpha)\end{aligned}\right]\\ -\dfrac{\lambda}{l}(a_2-a_1\cos\alpha)=0\\ \dfrac{\partial(m_l)}{\partial\alpha}=\\ \dfrac{\sin\alpha}{m_l l^2}\left[\begin{aligned}&(a_1-a_2\cos\alpha)a_2\cdot m_{a_1}{}^2+(a_2-a_1\cos\alpha)a_1\cdot m_{a_2}{}^2\\&+a_1^2a_2^2\cos\alpha\cdot m_\alpha^2-m_l{}^2\cdot a_1a_2\end{aligned}\right]\\ -\dfrac{\lambda}{l}a_1a_2=0\\ l=\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\alpha}\end{cases}\qquad(5)$$

Виконавши алгебраїчні перетворення, систему рівнянь (5) запишемо так:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1a_2}{m_l l^2}\begin{bmatrix} (a_1-a_2\cos\alpha){m_{a_1}}^2-\cos\alpha(a_2-a_1\cos\alpha){m_{a_2}}^2 \\ +a_1a_2^2\sin^2\alpha\cdot m_\alpha^2-(a_1-a_2\cos\alpha) \\ \left((a_1-a_2\cos\alpha)a_2{m_{a_1}}^2+(a_2-a_1\cos\alpha)a_1{m_{a_2}}^2+a_1^2a_2^2\cos\alpha\cdot m_\alpha^2\right) \end{bmatrix}=0 \\ \\ \dfrac{a_1a_2}{m_l l^2}\begin{bmatrix} -\cos\alpha(a_1-a_2\cos\alpha){m_{a_1}}^2+(a_2-a_1\cos\alpha){m_{a_2}}^2 \\ +a_1^2a_2\sin^2\alpha\cdot m_\alpha^2-(a_2-a_1\cos\alpha)(a_1-a_2\cos\alpha)a_2{m_{a_1}}^2 \\ +(a_2-a_1\cos\alpha)a_1{m_{a_2}}^2+a_1^2a_2^2\cos\alpha\cdot m_\alpha^2 \end{bmatrix}=0 \\ \cos\alpha=\dfrac{a_1^2+a_2^2-l^2}{2a_1a_2} \end{cases} \qquad (6)$$

З двох перших рівнянь системи (6) з використанням третього рівняння вилучаємо вирази, залежні від α.

Введемо позначення $d=l^2+a_2^2$, $r=a_2^2-l^2$, тоді, згідно з позначеннями, отримаємо:

$$\cos\alpha=\frac{a_1^2+r}{2a_1a_2},\quad \sin^2\alpha=\frac{-a_1^4+2a_1^2d-r^2}{4a_1^2a_2^2},$$

$$a_1-a_2\cos\alpha=\frac{a_1^2-r}{2a_1},\quad a_2-a_1\cos\alpha=\frac{d-a_1^2}{2a_1},$$

$$\cos\alpha\left(a_1-a_2\cos\alpha\right)=\frac{a_1^4-r^2}{4a_1^2a_2},$$

$$\cos\alpha\left(a_2-a_1\cos\alpha\right)=\frac{-a_1^4+a_1^2\left(d-r\right)+rd}{4a_1a_2^2}.$$

Нехай

$$c_0=\frac{1}{2}\left(-m_{a_2}^2+a_2^2m_\alpha^2\right), c_1=0,$$

$$c_2=\frac{1}{2}\left(a_2^2m_{a_1}^2+dm_{a_2}^2+ra_2^2m_\alpha^2\right), c_3=0,$$

$$c_4=-\frac{1}{2}ra_2^2m_{a_1}^2,$$

а також

$$b_0=\frac{1}{4}\left(m_{a_2}^2-a_2^2m_\alpha^2\right), b_1=0,$$

$$b_2=\frac{1}{4}\left(2a_2^2m_{a_1}^2-\left(d-r\right)m_{a_2}^2+2da_2^2m_\alpha^2\right),$$

$$b_3=0, b_4=\frac{1}{4}\left(2ra_2^2m_{a_1}^2-rdm_{a_2}^2-r^2a_2^2m_\alpha^2\right),$$

і

$$u_0=\frac{m_\alpha^2}{4}, u_1=0, u_2=\frac{1}{4}\left(-m_{a_1}^2-2m_{a_2}^2+2dm_\alpha^2\right),$$

$$u_3=0, u_4=\frac{1}{4}\left(2dm_{a_2}^2-r^2m_\alpha^2\right),$$

$$u_5=0, u_6=\frac{r^2}{4}m_\alpha^2.$$

Тоді для розв'язання системи введемо позначення:

$$v_1=b_0-\frac{c_0}{2},\quad v_2=b_1-\frac{c_1}{2},\quad v_3=b_2-\frac{c_2}{2}+\frac{rc_0}{2},$$

$$v_4=b_3-\frac{c_3}{2}+\frac{rc_1}{2},\quad v_5=b_4-\frac{c_4}{2}+\frac{rc_2}{2},$$

$$v_6=\frac{rc_3}{2},\quad v_7=\frac{rc_4}{2};$$

$$w_1=a_2^2u_0+\frac{c_0}{2},\quad w_2=a_2^2u_1+\frac{c_1}{2},$$

$$w_3=a_2^2u_2+\frac{c_2}{2}-\frac{dc_0}{2},\quad w_4=a_2^2u_3+\frac{c_3}{2}-\frac{dc_1}{2},$$

$$w_5=a_2^2u_4+\frac{c_4}{2}-\frac{dc_2}{2},\quad w_6=a_2^2u_5-\frac{dc_3}{2},$$

$$w_7=a_2^2u_6-\frac{dc_4}{2}.$$

Система (6) зведеться до системи з двох алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{gathered} F\left(a_1,a_2\right)=\sum_{i=1}^{7}a_1^{7-i}v_i\left(a_2\right)=0 \\ G\left(a_1,a_2\right)=\sum_{i=1}^{7}a_1^{7-i}w_i\left(a_2\right)=0, \end{gathered} \qquad (7)$$

яка має спільний розв'язок відносно a_1, коли детермінант (7) (резольвента) [5], складений з коефіцієнтів $v_i\left(a_2\right)$, $w_i\left(a_2\right)$ дорівнює нулю.

Розв'язуючи його відносно змінної a_2, а далі після підстановки в одне з рівнянь системи і змінної a_1, одержимо результати, що збігаються з наведеними в роботі [1].

$$\det(a_2)=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \end{vmatrix}=0 \qquad (8)$$

Значення оптимальних значень сторін для визначення плеча

№	*l, мм*	m_{a_1}, *мм*	m_{a_2}, *мм*	$m_\alpha \times 1''$	a_1, *мм*	a_2, *мм*	m_l, *мм*
1	0,1	2	2	5	2,412	2,412	0,083
2	1,0	2	2	5	7,638	7,638	0,262
3	3,0	2	2	5	13,223	13,223	0,452
4	0,1	1	1	2	2,7000	2,7000	0,037
5	1,0	1	1	2	8,540	8,540	0,118
6	3,0	1	1	2	14,791	14,791	0,202

Висновки

Проведені дослідження дали можливість одержати формули для обчислень середньоквадратичної похибки лінійного інтервалу в загальному випадку. Числова реалізація алгоритму показала існування одного екстремуму для похибки визначення довжини сторони за даними вимірювань.

Значення похибки, одержаної за методикою, наведеною в цих та у попередніх дослідженнях, є практично однаковими. Тому надалі доцільно користуватись алгоритмом, наведеним раніше.

Знаходження оптимальних значень виміряних сторін та кута між ними визначається мінімальністю помилки обчислення лінійного інтервалу та може бути основою для розв'язання інших специфічних інженерних задач.

Література

1. Фис М. М. Обґрунтування точності визначення інтервалів мірних шкал за виміряними відстанями і кутами / Фис М. М., Літинський В. О., Покотило І. Я., Літинський С. В. // XVIII Міжнародний науково-технічний симпозіум "Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища". – 2013. – С. 22.
2. Тревого І. С. Особливості роботи та функціональне призначення відбивних плівок / Тревого І. С., Баландюк А. // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – Львів, 2013. – 1 (25). – С. 73–75.
3. Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов. – М.: Недра, 1990. – 167 с.
4. Літинський В. О. Розрахунок оптимальних значень вимірювальних віддалей для точного визначення довжин невеликих відрізків / Літинський В. О., Фис М. М., Покотило І. Я., Літинський С. В. // Геодезія, картографія та аерофотознімання. – 2014. – Вип. 79. – С. 42–47.
5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Корн Г., Корн Т. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
6. Фис М. М. Умови існування екстремумів похибки визначення сторони полігонометрії / Фис М. М., Літинський В. О., Літинський С. В. Покотило І. Я., Тарнавський В. Л. // Всеукраїнська науково-практична конференція "Геодезія, землеустрій, природокористування: присвячується пам'яті П. Г. Черняги". – Рівне, 2014.

Обґрунтування точності визначення лінійних відрізків вимірюванням ліній до їх кінців електронним тахеометром

М. Фис, І. Покотило, А. Бридун, Н. Ярема

Розглянуто загальний випадок визначення довжини плеча за виміряними сторонами та кута між ними і встановлено похибку її обчислення. Визначено умови, за яких вона набуває мінімального значення за довільного розміщення приладу. Встановлено відсутність існування екстремуму. Тому для коректного розв'язання задачі потрібні додаткові умови (наприклад, фіксація визначальної сторони). Побудований алгоритм дає можливість знаходити оптимальні значення сторін, за яких середньоквадратична похибка набуває мінімального значення. Під час числових експериментів встановлено єдиність існування розв'язку, який збігається з випадком фіксації тахеометра в створі вимірювальної сторони (вимірювальні сторони однакові). Для однакових вхідних даних результати обчислень за різними методиками практично збігаються. Методики, описані в роботі, можуть використовуватись для визначення довжин дециметрових та метрових інтервалів нівелірних рейок для II, III і IV класів нівелювання.

Обоснование точности определения линейных отрезков измерением линий к их концам электронным тахеометром

М. Фыс, І. Покотыло, А. Бридун, Н. Ярема

Рассмотрен общий случай определения длины плеча по измеренным сторонам и угла между ними и установлена погрешность ее вычисления. Определены условия, при которых она принимает минимальное значение в случае произвольного размещения прибора. Установлено отсутствие существования экстремума. Поэтому для корректности решения задачи нужны дополнительные условия (например, фиксация определяющей стороны). Построенный алгоритм дает возможность находить оптимальные значения сторон, при которых значение среднеквадратической погрешности минимальное. Путем численных экспериментов установлена единственность существования решения, которое совпадает со случаем фиксации тахеометра в створе измерительной стороны (измерительные стороны одинаковые). Для одинаковых исходных данных результаты вычислений по разным методикам практически совпадают. Методики, описанные в работе, могут быть использованы для определения длин дециметровых и метровых интервалов нивелирных реек, которые используют во II, III и IV классах нивелирования.

Justification accuracy of linear measurement lines segments to their end electronic total station

M. Fys, I. Pokotylo, A. Brydun, N. Yarema

In this paper is considered the general case of definition of shoulder length measured by the sides and the angle between them and established its calculation error. The conditions under which it takes a minimum value in the case of an arbitrary allocation unit are defined. Installed absence extremum existence. For the correctness of solving the problem additional conditions are required (for example, determining fixation side). The algorithm enables to find optimal values parties any middle-square error became the minimum value. By numerical experiments established the existence uniqueness of the solution that matches the case of fixing the alignment measuring total station side (measuring sides are the same). For identical data-in the results of calculations by different methods coincide. The procedure described in the paper can be used to determining the length decimeter and meter intervals leveling rods that are using in II, III and IV class leveling.