УДК 519:330

ОПТИМІЗАЦІЯ УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМ РОЗВИТКОМ РЕГІОНУ

І.П. ТВЕРДОХЛІБ, І.В. ПАРАСЮК

Досліджено проблему оптимізації програмно-цільового управління економічним розвитком регіону на засадах інформаційного моделювання. Трактуючи регіон із трансформаційною економікою як багатовимірний лінійний автономний об'єкт, обґрунтовано динамічну модель мінімізації коштів на реалізацію сукупності регіональних програм розвитку. Встановлено необхідні умови існування мінімального розподілу обсягів затрат між програмами економічного розвитку регіону на заданому проміжку управління. Методом множників Лагранжа ідентифіковано два типи оптимальних стратегій економічного розвитку регіону залежно від розміщення оптимального управління у допустимій зоні: на її границі чи у внутрішній області. Отримано умови формування оптимального розподілу коштів на виконання сукупності програм для кожної із виділених типів стратегій економічного розвитку регіону.

ВСТУП

Регіон на сучасному етапі розвитку людства виступає як головний суб'єкт будь-якого державного утворення. Тому регіональна політика суттєво впливає на поступ країни і розробка ефективних регіональних політик є пріоритетним завданням уряду кожної держави. Зокрема, нагальною і наразі невирішеною проблемою в Україні є соціально-економічне регулювання ринкових процесів у її регіонах [1].

Розвиток як категорія економічної науки має декілька трактувань. Приміром, часто розглядають концепцію сталого розвитку [2]. Зарубіжний досвід математичного моделювання таких процесів висвітлено у [3]. Щодо регіонів, то розрізняють регіональний розвиток та розвиток регіону. Регіональний економічний розвиток — це така категорія економічної науки, за допомогою якої відстежують асиметрію поступу регіонів країни з метою її усунення [4]. Натомість економічний розвиток регіону трактується як якісні незворотні зміни в його економіці, накопичені за деякий проміжок часу [5]. Регіональні політики сучасних держав, зокрема країн ЄС [6–8], спрямовані як на вирівнювання соціально-економічного стану їх регіонів, так і на створення сприятливих умов для розвитку кожної території. Для обґрунтування і реалізації політики економічного розвитку регіону найчастіше застосовують програмно-цільовий метод управління [6–11;12]. В Україні обласні адміністрації так само корегують рух регіону через регіональні програми [13, 14].

Аналіз текстів програм та результатів моніторингів їх виконання засвідчує наявність двох головних проблем ефективного управління їхніх реалізацій. По-перше, розмитість цілей і нечіткість інформаційного відображення досяжності мети сукупністю статистичних показників, особливо у контексті програм [1, 13;14]. По-друге, обґрунтованість обсягів ресурсів, виділених на реалізацію соціально-економічної програми, бажає кращого [13].

Зазначені недоліки сучасної практики застосування програмно-цільового управління економічним розвитком регіону в Україні зумовлюють потребу розробки інструментів оптимізації управління процесом виконання регіональних програм. З цією метою в [15] обґрунтовано інформаційну модель управління процесом економічного розвитку регіону за допомогою сукупності соціально-економічних програм, яка уможливлює оцінювання досяжності цілей розвитку через призму значної множини статистичних показників. Дослідження властивостей цієї моделі і буде предметом розгляду цієї роботи.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ ЩОДО ОПТИМІЗАЦІЇ УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМ РОЗВИТКОМ РЕГІОНУ [15]

Нехай для деякого регіону R його адміністрація розглядає сукупність P_R програм соціально-економічного розвиту на період $[t_0;T]$, де t_0 — базовий рік, а T — рік завершення усіх програм. Соціально-економічний стан регіону характеризується множиною X показників. З кожною програмою $p_j \in P_R$ пов'язується підмножина показників $X_j \subseteq X$, які оцінюють стан економічного розвитку регіону в процесі її виконання, та множина цілей G_j економічного розвитку. Досяжність кожної цілі $g_l \in G_j$ може бути оцінена на підставі деякої підмножини $X_{jl} \subseteq X$ показників. На реалізацію програми $p_j \in P_R$ виділяються ресурси обсягом V_j у вартісному вимірі. Розподіл коштів за періодами у проміжку $[t_0;T]$ задається k-вимірним вектором $\vec{v}(t)$ виду

$$\vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_k(t)), \quad k = |P_R|, \tag{1}$$

причому значення координати $v_j(t)$ визначає обсяг виділеного ресурсу p_j-й програмі у період t. Початковий стан регіону R у базовий період $t_0 \in [t_0;T]$ задається n-вимірним вектором $\vec{x}(t_0)$ виду

$$\vec{x}(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)), \tag{2}$$

де $x_i(t_0)$ — значення показника $x_i \in X$ у базовий період t_0, а $n = |X|$. У результаті виконання програм P_R очікується, що стан регіону R буде характеризуватися у кінцевий період $T \in [t_0;T]$ вектором

$$\vec{x}(T) = (x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)). \tag{3}$$

Розглянемо простір $U(t)$ можливих векторів $\vec{v}(t)$. Очевидно, що $U(t) \subset E^k$, де E^k — k-вимірний евклідовий простір. Тоді під управлінням $u \in U$ будемо розуміти сукупність векторів або кортеж виду (4), де $\vec{v}(t)$ задає розподіл ресурсів між програмами $p_j \in P_R$ у період $t_\tau \in [t_0;T]$:

$$u = < \vec{v}(t_0), \vec{v}(t_1), \ldots, \vec{v}(t_\tau), \ldots, \vec{v}(T) >,$$

$$U := U(t_0) \times U(t_1) \times \ldots \times U(t_\tau) \times \ldots \times U(T). \tag{4}$$

Простір управління U формується на підставі очевидних обмежень:

$$v_j(t) \geq 0 \quad \forall (j = \overline{1,k}) \wedge (t \in [t_0;T]); \qquad \sum_{j=1}^{k} \sum_{t \in [t_0;T]} v_j(t) \leq V = \sum_{j=1}^{k} V_j, \qquad (5)$$

причому V — загальний обсяг ресурсів у вартісному вимірі, виділений на реалізацію сукупності P_R програм у інтервалі $[t_0;T]$.

Оптимальним управлінням $u^* \in U$ будемо вважати таке управління виду (4), яке формує оптимальну траєкторію економічного розвитку регіону на проміжку $[t_0;T]$ згідно з деяким вибраним критерієм W. Таке оптимальне управління має переводити регіон R після реалізації сукупності програм P_R із початкового стану $\vec{x}(t_0)$ у кінцевий $\vec{x}(T)$. Вимірювати економічний розвиток регіону на проміжку $[t_0;T]$ можна, очевидно, за допомогою вектора $\Delta\vec{x}(t_0;T)$, де

$$\Delta\vec{x}(t_0;T) = \vec{x}(T) - \vec{x}(t_0). \qquad (6)$$

Оскільки процес розвитку притаманний усім соціально-економічним системам і здійснюється навіть за відсутності спеціальних програм, то, знову ж, очевидно, можна записати рівність

$$\Delta\vec{x}(t_0;T) = \Delta_1\vec{x}(t_0;T) + \Delta_2\vec{x}(t_0;T), \qquad (7)$$

де $\Delta_1\vec{x}$, $\Delta_2\vec{x}$ — оцінка на інтервалі $[t_0;T]$ відповідно економічного розвитку регіону за відсутності спеціальних програм та додаткового ефекту від виконання сукупності програм P_R. Зрозуміло, що оцінка економічного розвитку регіону з урахуванням програм на проміжку $[t_0;T]$ у системі координат множини показників X неявно залежить від вектора $\vec{v}(t)$ розподілу ресурсів. Тобто

$$\Delta\vec{x}(t_0;T;\vec{v}(t_0),\ldots,\vec{v}(T)) = \Delta_1\vec{x}(t_0;T) + \Delta_2\vec{x}(t_0;T;\vec{v}(t_0),\ldots,\vec{v}(T)). \qquad (8)$$

Проблема визначення оптимального управління u^* економічним розвитком регіону може бути подана формалізовано наступною узагальненою оптимізаційною задачею: *для вибраного критерію* $W(u)$ *оцінювання економічного розвитку регіону і вибраної множини показників* X *оцінювання стану регіону знайти таке оптимальне управління* u^* *виду* (4) *реалізацією сукупності програм* P_R, *щоб*

$$\operatorname*{extr}_{u \in U} W(u) = W(u^*) \qquad (9)$$

за умов

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0, \qquad (10)$$

$$\vec{x}^0 + \Delta_1\vec{x}(t_0;T) + \Delta_2\vec{x}(t_0;T;u) = \vec{x}(T) \qquad (11)$$

та обмежень (5), де extr означає тип оптимізації (мінімум чи максимум).

Оптимізаційна модель (9)–(11), (5) є надто загальною і потребує уточнення. Зокрема треба конкретизувати критерій W, тип оптимізації у (9) та умову (11). Також суттєвою є проблема вибору норми вектора $\Delta\vec{x}(t_0;T)$ як міри економічного розвитку регіону на часовому інтервалі $[t_0;T]$.

Спочатку конкретизуємо умову (11). Щоб врахувати вплив $\Delta_1\vec{x}(t_0;T)$, уведемо такий показник як усереднений темп приросту значення $x_i \in X$. Він має характеризувати досягнуту до базового періоду швидкість зміни значення конкретного показника оцінювання стану економічного розвитку без врахування програм P_R. Позначимо цей темп приросту як a_i. Припускаємо його сталість на інтервалі $[t_0;T]$. Оцінку впливу управління $u \in U$ на величину $\Delta_2\vec{x}(t_0;T;u)$ здійснимо на підставі затратної еластичності програми $p_j \in P_R$. Позначимо через b_{ij} затратну еластичність j-ї програми економічного розвитку регіону у контексті i-го показника $x_i \in X$. Згідно із традиційним визначенням еластичності [16] величина b_{ij} буде задавати зміну значення i-го показника при зміні обсягу ресурсу j-ї програми на одиницю.

Очевидно, що також потрібно якось відстежувати вплив процесу виконання програм P_R на якість економічного зростання у регіоні. Автори програм через множину цілей зазначають орієнтири внеску програми у економічний розвиток [13]. Тому бажано відстежувати ступінь відповідності розвитку регіону передбаченням авторів. Така інформація уможливлює контроль процесу виконання програм. З цією метою уведемо вектор $\vec{y}(t)$ виду

$$\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_k(t)), \tag{12}$$

де $y_j(t)$ — узагальнена оцінка впливу програми $p_j \in P_R$ на економічний розвиток регіону у період $t \in [t_0;T]$.

Трактуючи регіон країни з точки зору теорії управління як багатовимірний лінійний об'єкт [17] із вхідним управлінням, що задається вектором змінних $\vec{v}(t) \in E^k$, та вихідним управлінням у формі вектора змінних $\vec{y}(t) \in E^k$ та вектором $\vec{x}(t) \in E^n$ змінних оцінювання його стану, а також вибравши за критерій W мінімізацію коштів на проміжку управління $[t_0;T]$, приходимо до такої економіко-математичної моделі [18] оптимізації затрат на реалізацію сукупності регіональних програм P_R, яка є конкретизацією метамоделі (9)–(11) з обмеженням (5): *для вибраної множини X показників оцінювання стану регіону знайти таке управління u^* виду* (4) *реалізацією сукупності програм P_R, щоб*

$$\min_{u \in U} \|u\|_1 = \min_{v_j(t)} \int_{t_0}^{T} \sum_{j=1}^{k} v_j(t)dt = \|u^*\|_1 \tag{13}$$

за умов

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)B\vec{v}(\tau)d\tau, \tag{14}$$

$$\vec{y}(t) = C\Phi(t)\vec{x}^{0} + \int_{t_0}^{t} C\Phi(t-\tau)B\vec{v}(\tau)d\tau\,, \tag{15}$$

та обмежень

$$\|u\|_1 \le V, \tag{16}$$

$$v_j(t) \ge 0 \quad (j = \overline{1,k};\ t \in [t_0;T]), \tag{17}$$

$$\vec{y}(T) = \vec{y}^{1}, \tag{18}$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{0}, \tag{19}$$

де $\vec{y}^{1}$ — бажані прирости значень показників множини X після реалізації всіх програм, а через $\|\bullet\|_1$ позначено стандартну норму вектор-функції часу у банаховому просторі $L^p = L^p(t_0;T)$ [17] із індексом $p = 1$ [17].

Матрично-інтегральні рівняння (14), (15) цієї моделі уможливлюють динамічне відстеження у часі відповідно станів регіону (тобто значень показників оцінювання економічного розвитку регіону) та досяжності цілей регіональних програм економічного розвитку. Ключову роль відіграє перехідна матриця $\Phi(t)$ станів регіону R, яка у загальному випадку може бути визначена на підставі вхідної матриці A як границя матричного ряду [17]:

$$\Phi(t) := e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k. \tag{20}$$

У свою чергу матриця A є діагональною квадратною виміру $n \times n$ матрицею з коефіцієнтами a_i, що задають темпи приросту величин показників x_i із множини X. Прямокутна матриця B розміру $n \times k$ містить затратні еластичності b_{ij}, а $k \times n$ матриця C встановлює міру адекватності оцінювання досяжності цілей програмами розвитку для кожного показника із множини X.

НЕВИРІШЕНІ ЧАСТИНИ ПРОБЛЕМИ ОПТИМІЗАЦІЇ УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМ РОЗВИТКОМ РЕГІОНУ

Економіко-математична модель (13)–(19) аналізувалась на предмет існування її розв'язку. З цією метою застосовувався метод пошуку мінімального управління для багатовимірного лінійного автономного об'єкту, описаний у [17], який трактує простір управління як банаховий і використовує відому нерівність Гельдера [17; 19]. Вдалося отримати необхідні умови існування розв'язку моделі (13)–(19), які подамо у формі твердження [18].

Твердження 1. Для того, щоб оптимальне управління u^* виду (4), компоненти якого задовольняють рівняння

$$u^* = \min \|\vec{v}\|_1 = 1/\|\vec{w}_0\|_\infty\,, \tag{21}$$

було розв'язком моделі (13)–(19) необхідно і достатньо, щоб його елементи $v_j(\tau),\ j=\overline{1,k},\ \ \tau\in[t_0;T]$, задовольняли умові

$$\sum_{j=1}^{k}[(v_j(T))^2-(v_j(t_0))^2]=\frac{2}{|\,w^0_{j_0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,|}, \tag{22}$$

де вектор-функція $\vec{w}_0(T-\tau_0)$ визначається як (символом «′» позначено операцію транспонування матриці):

$$\vec{w}_0(T-\tau)=G'(T-\tau)\vec{z}_0\big(T-\tau\big),\ \ G(t)=C\Phi(t)B, \tag{23}$$

узгоджена з $p=1$ q-норма вектора $\vec{w}_0$ трактується як точна верхня грань множини значень цієї вектор-функції на інтервалі $t\in[t_0;T]$ і рівна

$$\|\vec{w}_0\|_\infty=\max_{\tau\in[t_0;T]}\max_{1\le j\le k}\Big|w_j(T-\tau)\Big|=\Big|w^0_{j_0(\tau_0)}(T-\tau_0)\Big|, \tag{24}$$

а допоміжний вектор $\vec{z}_0(T-\tau)$ у (23) визначається з умови (через $\langle\bullet,\bullet\rangle$ позначено скалярний добуток векторів):

$$\langle\vec{z}\,',\vec{d}\rangle=\langle\vec{z}\,',\int_{t_0}^{T}G(T-\tau)\vec{v}(\tau)d\tau\rangle\equiv 1. \tag{25}$$

На підставі твердження 1 модель (13)–(19) можна звести до такої еквівалентної дискретної форми [18]: для заданого вектора $\vec{z}_0(t)$ та матриці G виду (23) знайти такі $v_j(t)$ для $t\in[t_0;T],\ \ j=\overline{1,k}$, щоб

$$\min_{\vec{v}(t)\wedge\tau\in[t_0;T]}F\,(\vec{v}(t_0),\ldots,\vec{v}(\tau),\ldots,\vec{v}(T);\vec{z}_0(t);\mathrm{G}')=\min_{\vec{v}(t)}\sum_{\tau\in[t_0;T]}\sum_{j=1}^{k}v_j(\tau) \tag{26}$$

за умови

$$\sum_{j=1}^{k}[(v_j(T))^2-(v_j(t_0))^2]=2/|\,w^0_{j_0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,| \tag{27}$$

і обмежень

$$\sum_{\tau\in[t_0;T]}\sum_{j=1}^{k}v_j(\tau)\le V, \tag{28}$$

$$v_j(\tau)\ge r_{j\tau}\qquad (j=\overline{1,k},\ \ \tau\in[t_0;T]), \tag{29}$$

де $r_{j\tau}$ — початкові вимоги до обсягу ресурсу для j-ї програми у період часу τ.

Оскільки існуючі визначення стратегій розвитку носять описовий характер та ігнорують управлінські аспекти їх реалізацій [11], то нам потрібно уточнити поняття оптимальної стратегії економічного розвитку регіону. З цією метою дамо такі два означення.

Означення 1. Стратегією $S_R([t_0;T],P_R,G_R,X,u)$ економічного розвитку регіону R на часовому проміжку $[t_0;T]$ із реалізацією сукупності регіональних програм P_R, цілі яких задаються множиною G_R, а процес виконання програм здійснюється згідно управління $u \in U$ виду (4), називається сукупність станів регіону у періоди $\tau \in [t_0;T]$, кожен з яких описується вектором $\vec{x}(t_\tau) \in E^n$ виду (2). Тобто

$$S_R([t_0;T], P_R, G_R, X, u) := \{\vec{x}(t_\tau) : \tau \in [t_0;T]\}. \tag{30}$$

Означення 2. Оптимальна стратегія $S_R^{\text{opt.}}([t_0;T], P_R, G_R, X, u^*)$ економічного розвитку регіону R на проміжку $[t_0;T]$ — це стратегія $S_R([t_0;T], P_R, G_R, X, u)$ виду (30), у якої компоненти управління u^* формують оптимальний розв'язок моделі (26)–(29).

Маючи загальний обсяг витрат V, початковий їх розподіл $r_{j\tau}$, вектори $\vec{z}_0$ та $\vec{w}_0$ й матрицю G', можна підготувати вхідні дані для моделі (26)–(29) і знайти оптимальний розподіл ресурсів між програмами економічного розвитку регіону за допомогою відповідних програмних засобів. Зрозуміло, що такий підхід уможливлює отримання оптимальної стратегії розвитку регіону у кожному конкретному випадку і не дає змоги виявити якісь загальні тенденції існування таких стратегій.

Отже, **мета роботи** — аналіз методом множників Лагранжа задачі мінімізації (26)–(29) для конкретизації умов існування її розв'язків та класифікації оптимальних стратегій економічного розвитку регіону.

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОГРАМНО-ЦІЛЬОВОГО УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМ РОЗВИТКОМ РЕГІОНУ

Задача нелінійного програмування (26)–(29) уможливлює оптимізацію управління економічним розвитком регіону на програмно-цільових засадах. Розв'язки її і будуть визначати можливі оптимальні стратегії економічного розвитку регіону. З цією метою проаналізуємо задачу (26)–(29) методом множників Лагранжа [20, 21]. Спочатку зведемо її до канонічної форми шляхом уведення додаткових змінних, так як умови (28) та (29) є нерівностями. Тобто перепишемо умови (28) та (29) у формі рівностей:

$$\sum_{\tau \in [t_0;T]} \sum_{j=1}^{k} v_j(\tau) + \varphi_1^2 = V, \tag{31}$$

$$-v_j(\tau) + \varphi_{j\tau}^2 = -r_{j\tau} \quad (j = \overline{1,k};\ \ \tau \in [t_0;T]), \tag{32}$$

де $\varphi_1, \varphi_{j\tau}$ $(j = \overline{1,k};\ \tau \in [t_0;T])$ — додаткові змінні. Далі замість задачі (26)–(29) розглянемо задачу мінімізації (26), (27), (31), (32).

Будуємо функцію Лагранжа для задачі мінімізації (26), (27), (31), (32):

$$L(\vec{v}(t_0), \ldots, \vec{v}(\tau), \ldots, \vec{v}(T);\ \vec{\mathrm{z}}_0(t);\ \mathrm{G}';\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{j\tau};\ \varphi_1, \varphi_{j\tau}) =$$

$$= \sum_{\tau \in [t_0;T]} \sum_{j=1}^{k} v_j(\tau) + \lambda_1 \left[2/|\, w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,| - \sum_{j=1}^{k} [(v_j(T))^2 - (v_j(t_0))^2] \right] +$$

$$+ \lambda_2 \left\{ V - \sum_{\tau \in [t_0;T]} \sum_{j=1}^{k} v_j(\tau) - \varphi_1^2 \right\} + \sum_{\tau \in [t_0;T]} \sum_{j=1}^{k} \lambda_{j\tau} [-r_{j\tau} + v_j(\tau) - \varphi_{j\tau}^2], \quad (33)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{j\tau}$ $(\tau \in [t_0;T])$ є множниками Лагранжа. Точками екстремуму функції Лагранжа виду (33) будуть точки, в яких її часткові похідні дорівнюють нулю. Система рівнянь для визначення точок екстремуму функції Лагранжа (33) така:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 v_j(t_0) - \lambda_2 + \lambda_{jt_0} + 1 = 0, & j = \overline{1,k}; \\ -2\lambda_1 v_j(T) - \lambda_2 + \lambda_{jT} + 1 = 0, & j = \overline{1,k}; \\ -\lambda_2 + \lambda_{j\tau} + 1 = 0, & j = \overline{1,k};\ \tau \in \mathrm{M} = \\ & = [t_0;T] \setminus \{t_0;T\}; \\ -\sum_{j=1}^{k} [(v_j(T))^2 - (v_j(t_0))^2] + 2/|\, w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,| = 0, & \\ -\sum_{\tau \in [t_0;T]} \sum_{j=1}^{k} v_j(\tau) - \varphi_1^2 + V = 0;\ \ v_j(\tau) - \varphi_{j\tau}^2 - r_{j\tau} = 0, & j = \overline{1,k},\ \tau \in [t_0;T]; \\ -2\lambda_2 \varphi_1 = 0;\ \ -2\lambda_{j\tau}\varphi_{j\tau} = 0, & j = \overline{1,k},\ \tau \in [t_0;T]. \end{cases} \quad (34)$$

Попередньо перетворимо систему (34). Замість 5-го зверху рівняння використаємо суму його та усіх рівнянь, що записані 6-ми зверху у цій системі (див. передостанній рядок). Тому система рівнянь (34) зводиться до такої еквівалентної:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 v_j(t_0) - \lambda_2 + \lambda_{jt_0} + 1 = 0, & j = \overline{1,k}; \\ -2\lambda_1 v_j(T) - \lambda_2 + \lambda_{jT} + 1 = 0, & j = \overline{1,k}; \\ -\lambda_2 + \lambda_{j\tau} + 1 = 0 & j = \overline{1,k};\ \tau \in \mathrm{M} = \\ & = [t_0;T] \setminus \{t_0;T\}; \\ -\sum_{j=1}^{k} [(v_j(T))^2 - (v_j(t_0))^2] + 2/|\, w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,| = 0, & \\ -\varphi_1^2 - \sum_{\tau \in [t_0;T]} \sum_{j=1}^{k} \varphi_{j\tau}^2 + V - & \\ - \sum_{\tau \in [t_0;T]} \sum_{j=1}^{k} r_{j\tau} = 0;\ \ v_j(\tau) - \varphi_{j\tau}^2 - r_{j\tau} = 0, & j = \overline{1,k};\ \tau \in [t_0;T]; \\ -2\lambda_2 \varphi_1 = 0;\ \ -2\lambda_{j\tau}\varphi_{j\tau} = 0, & j = \overline{1,k};\ \tau \in [t_0;T]. \end{cases} \quad (35)$$

Знаходимо розв'язки системи рівнянь (35), аналізуючи можливі комбінації значень невідомих, які задовольняють останні два рівняння. Це такі комбінації:

- для передостаннього рівняння можливо $\lambda_2 = 0, \varphi_1 \neq 0$ або $\lambda_2 \neq 0$, $\varphi_1 = 0$;

- для останнього рівняння маємо $\lambda_{j\tau} = 0, \varphi_{j\tau} \neq 0$ або $\lambda_{j\tau} \neq 0, \varphi_{j\tau} = 0$

для всіх $j = \overline{1,k}$ та $\tau \in [t_0; T]$.

Таким чином, слід розглянути чотири попарні комбінації, а саме:

1. $\{\lambda_2 = 0;\ \varphi_1 \neq 0; \lambda_{j\tau} = 0;\ \varphi_{j\tau} \neq 0\}$;
2. $\{\lambda_2 = 0;\ \varphi_1 \neq 0; \lambda_{j\tau} \neq 0;\ \varphi_{j\tau} = 0\}$;
3. $\{\lambda_2 \neq 0;\ \varphi_1 = 0; \lambda_{j\tau} = 0;\ \varphi_{j\tau} \neq 0\}$;
4. $\{\lambda_2 \neq 0;\ \varphi_1 = 0; \lambda_{j\tau} \neq 0;\ \varphi_{j\tau} = 0\}$.

Дослідимо можливість входження зазначених комбінацій у розв'язок системи (35). З цією метою перевіримо, чи не порушуються інші її рівняння при вказаних значеннях змінних λ_2, $\lambda_{j\tau}, \varphi_1$, $\varphi_{j\tau}$. Неважко побачити, що перша комбінація перетворює третє рівняння у нерівність, інші не порушують його. Тобто комбінації 2–4 можуть входити у розв'язок. Тому потрібно проаналізувати три випадки формування розв'язків системи нелінійних рівнянь (35) з відповідними фрагментами. Загальна схема процесу подальшого аналізу і розв'язування системи рівнянь (35) показана на рисунку, де символом $\Rightarrow$ позначено операцію логічного виведення. Як вхідна інформація використано зазначені вище фіксовані фрагменти коренів системи (35). А результатами будуть умовиводи (леми і твердження) щодо умов існування оптимальних стратегій економічного розвитку регіону.

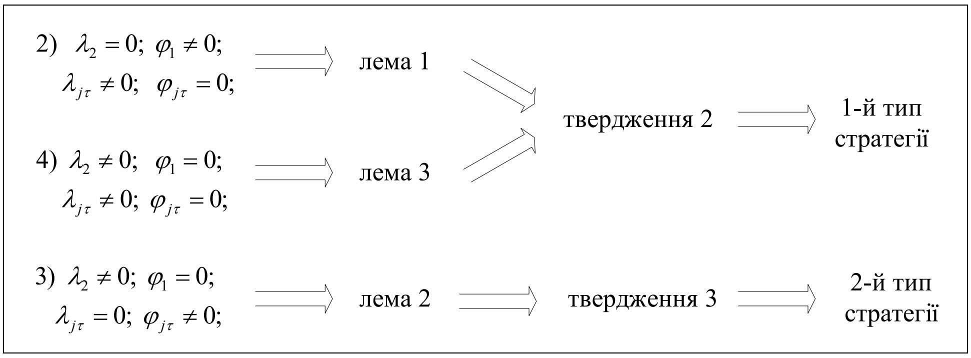

Рисунок. Схема аналізу системи рівнянь (35)

З огляду на значний обсяг рутинних проміжних операцій процес отримання лем нами детально не описується. Зазначимо лише, що найскладнішим для аналізу виявився випадок із комбінацією 3. Нам вдалося отримати розв'язок системи (35) із фрагментом 3 лише при додатковій умові пропорційності розподілу коштів між програмами на початковому та кінцевому періодах (лема 2). Умови входження комбінацій 2–4 у відповідні розв'язки системи рівнянь (35) наведені нижче у формі допоміжних тверджень або лем.

Лема 1. У розв'язок системи (35) входять такі значення як

$$\lambda_2 = 0,\ \varphi_1 \neq 0, \lambda_{j\tau} \neq 0,\ \varphi_{j\tau} = 0\ \ \forall\, (j = \overline{1,k},\ \ \tau \in [t_0; T]) \qquad (36)$$

лише тоді, коли відображений умовою (29) моделі (26)–(29) початковий розподіл $\{r_{j\tau}\ (j=\overline{1,k},\ \tau\in[t_0;T])\}$ обсягу ресурсу V між програмами в розрізі часових періодів задовольняє умові

$$V-\sum_{\tau\in[t_0;T]}\sum_{j=1}^{k}r_{j\tau}>0;\ \ \sum_{j=1}^{k}[(r_{jT})^2-(r_{jt_0})^2]\equiv 2/\left|w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\right|. \qquad (37)$$

Лема 2. Для стратегії однакових пропорцій розподілу ресурсу між програмами на початковому t_0 та кінцевому T періодах у розв'язок системи (35) входять такі значення як

$$\lambda_2\neq 0;\ \varphi_1=0; \lambda_{j\tau}=0,\ \varphi_{j\tau}\neq 0\ \ \forall\,(j=\overline{1,k},\ \tau\in[t_0;T]) \qquad (38)$$

лише тоді, коли

- існує така сукупність додатних чисел $\eta^0_{j\tau}\in(0;K_0)$ для усіх $j=\overline{1,k}$ та $\tau\in M=[t_0;T]\setminus\{t_0;T\}$, що виконується умова

$$\sum_{\tau\in M}\sum_{j=1}^{k}\eta^0_{j\tau}<K_0=V-\sum_{\tau\in M}\sum_{j=1}^{k}r_{j\tau}; \qquad (39)$$

- початкові обсяги r_{jt_0}, r_{jT} ресурсів, виділені програмам на стартовому t_0 та кінцевому T періодах, для усіх $j=\overline{1,k}$ задовольняють нерівностям

$$\begin{cases} r_{jT}>(K_0-K_1)/(2k)+2/[\,|\,w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,|\times(K_0-K_1)]; \\ r_{jt_0}<(K_0-K_1)/(2k)-2/[\,|\,w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,|\times(K_0-K_1)]; \end{cases} \qquad (40)$$

- норма $\|\vec{w}_0\|_\infty$ вектора $\vec{w}_0(T-\tau)$ задовольняє умові.

$$|\,w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,|\geq 2/kr_0^2,\quad r_0=\min_{1\leq j\leq k}r_{jT}. \qquad (41)$$

Лема 3. У розв'язок системи рівнянь (35) входять такі значення як

$$\lambda_2\neq 0;\ \varphi_1=0; \lambda_{j\tau}\neq 0;\ \varphi_{j\tau}=0\ \ \forall\,(j=\overline{1,k};\ \ \tau\in[t_0;T]) \qquad (42)$$

лише тоді, коли відображений умовою (29) моделі (26)–(29) початковий розподіл $\{r_{j\tau}\ (j=\overline{1,k};\ \tau\in j=\overline{1,k};\ \tau\in[t_0;T])\}$ обсягу ресурсу V між програмами у розрізі часових періодів задовольняє умовам

$$\sum_{\tau\in[t_0;T]}\sum_{j=1}^{k}r_{j\tau}=V;\ \ \sum_{j=1}^{k}[r_{jT}^2-r_{jt_0}^2]\equiv 2/|\,w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,|. \qquad (43)$$

Згадувана у лемі 2 додаткова вимога однакових пропорцій розподілу коштів для програм економічного розвитку змістовно означає корегування їх обсягів на заключному періоді на деяку сталу величину стосовно виділених програмам сум грошей на початковому періоді. Тобто виконується умова

$$(v_j(T))^2-(v_j(t_0))^2=2/(k|\,w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,|)\ \ (j=\overline{1,k})\,. \qquad (44)$$

Спираючись на наведені вище леми можна отримати усі розв'язки системи рівнянь (35) і тим самим визначити усі можливі екстремальні точки функції Лагранжа (33). Отже, за умов леми 1 сукупність екстремальних точок функції (33) визначається як

$$\begin{cases} \lambda_1\in R^1;\ \lambda_2=0;\ \lambda_{j\tau}=-1: & j=\overline{1,k};\ \tau\in \mathrm{M}= \\ & =[t_0;T]\setminus\{t_0;T\}; \\ \lambda_{jt_0}=-1-2\lambda_1 r_{jt_0}\ (j=\overline{1,k})\,;\ \lambda_{jT}=-1+2\lambda_1 r_{jT}\,; & j=\overline{1,k}\,; \\ \varphi_1=\pm\sqrt{V-\sum\limits_{\tau\in[t_0;T]}\sum\limits_{j=1}^{k} r_{j\tau}}\,;\ \varphi_{j\tau}=0,\ v_j(\tau)=r_{j\tau};\ j=\overline{1,k},\ \tau\in[t_0;T]\,, \end{cases} \qquad (45)$$

де через R^1 позначено числову вісь. Коли справджуються умови леми 2, то функція Лагранжа (33) прийматиме екстремальні значення у точках, координати яких даються співвідношеннями (46). І, нарешті, за умов леми 3 координати екстремальних точок функції Лагранжа (33) задаються співвідношеннями (47).

$$\begin{cases} \lambda_1=0;\ \varphi_1=0;\ v_j(t_0)=(K_0-K_1)/(2k)- & \\ \quad -[|\,w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,|\times(K_0-K_1)]^{-1}\,, & j=\overline{1,k}; \\ \lambda_2=1;\ v_j(T)=(K_0-K_1)/(2k)+ & \\ \quad +[|\,w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,|\times(K_0-K_1)]^{-1}, & j=\overline{1,k}; \\ \lambda_{j\tau}=0\quad (j=\overline{1,k},\ \tau\in[t_0;T]);\ \varphi_{j\tau}=\pm\sqrt{\eta^0_{j\tau}}\,, & j=\overline{1,k};\tau\in M= \\ & =[t_0;T]\setminus\{t_0;T\}; \\ \varphi_{jT}= & \\ =\pm\sqrt{[|\,w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,|\times(K_0-K_1)]^{-1}+(K_0-K_1)/(2k)-r_{jT}}\,, & j=\overline{1,k}\,; \\ \varphi_{jt_0}= & \\ =\pm\sqrt{-[|\,w^0_{j0(\tau_0)}(T-\tau_0)\,|\times(K_0-K_1)]^{-1}+(K_0-K_1)/(2k)-r_{jt_0}}\,, & j=\overline{1,k}; \\ v_j(\tau)=\eta^0_{j\tau}+r_{j\tau}\,, & j=\overline{1,k};\tau\in M= \\ & =[t_0;T]\setminus\{t_0;T\}. \end{cases} \qquad (46)$$

$$\begin{cases} \lambda_1\in R^1\setminus\{0\};\ \lambda_2\in R^1\setminus\{0;1\};\ \varphi_1=0;\ \varphi_{j\tau}=0, & j=\overline{1,k};\ \tau\in[t_0;T]; \\ \lambda_{jt_0}=\ -2r_{jt_0}\lambda_1+\lambda_2-1;\ \lambda_{jT}=2r_{jT}\lambda_1+\lambda_2-1, & j=\overline{1,k}\,; \\ \lambda_{j\tau}=\lambda_2-1\ \ (j=\overline{1,k};\ \ \tau\in M=[t_0;T]\setminus\{t_0;T\});\ v_{j\tau}=r_{j\tau}, & j=\overline{1,k};\tau\in[t_0;T]. \end{cases} \qquad (47)$$

Таким чином, нам вдалося визначити усі екстремальні точки функції Лагранжа (33), яка відповідає задачі мінімізації (26)–(29). Координати екстремальних точок цієї функції визначаються співвідношеннями (45)–(47). Далі за теорією множників Лагранжа [21] потрібно ідентифікувати тип екстремальної точки, що є непростою проблемою [21] і вимагає застосування матриць Гессе. Тому на практиці часто обчислюють значення функціоналу F в усіх визначених екстремальних точках і шляхом порівняння визначають точку мінімуму та максимуму серед екстремальних точок функції Лагранжа.

Прискіпливий аналіз співвідношень (45)–(47) засвідчує наявність тільки однієї точки екстремуму функціоналу (26) у кожному з трьох можливих випадків. Значна кількість екстремальних точок функції Лагранжа у кожному випадку породжується значеннями множників Лагранжа, які, як відомо, не впливають на оптимальне значення функціоналу F [21]. Крім цього, кожен із трьох можливих і проаналізованих випадків конструювання розв'язків системи (33) породжується, як свідчать леми, певними зовнішніми умовами. Оскільки ці умови є взаємовиключними, то одночасно усі три екстремальні точки функціоналу (26) не можуть появитись, вони можуть породжуватись тільки поодинці. Такі міркування уможливлюють ідентифікацію точок з координатами $v_j(\tau)$ $(j=\overline{1,k};\ \tau\in[t_0;T])$, які визначаються згідно співвідношень (45)–(47), як точок локального мінімуму функціоналу (26) нашої оптимізаційної задачі. Кожна така точка локального мінімуму асоціюється з оптимальним управлінням u^* для моделі (26)–(29) і тим самим для основної моделі (13)–(19). Завершуючи процес аналізу задачі (26)–(29) методом множників Лагранжа, на підставі узагальнення результатів лем 1–3 можна сформулювати певні положення щодо оптимальності управлінь процесом реалізації сукупності програм економічного розвитку регіону. Такі узагальнені висновки доцільно подати як два окремі твердження.

Твердження 2. Початковий розподіл $\{r_{j\tau}\ (j=\overline{1,k},\ \tau\in[t_0;T])\}$ обсягу ресурсу V між програмами P_R у розрізі часових періодів формує компоненти $\vec{v}(\tau),\ \ \tau\in[t_0;T]$, оптимального управління u^* моделі (13)–(19) лише тоді, коли

$$\sum_{\tau\in[t_0;T]}\sum_{j=1}^{k} r_{j\tau}\le V;\quad \sum_{j=1}^{k}[r_{jT}^2-r_{jt_0}^2]=2/|\,w_{j0(\tau_0)}^0(T-\tau_0)|, \tag{48}$$

де вектор $\vec{w}_0$ визначається на підставі співвідношень (23) та (25), а його норма $\|\vec{w}_0\|_\infty$ задається формулою (24).

Твердження 3. Управління u^* з компонентами

$$\begin{cases} v_j(t_0)=(K_0-K_1)/(2k)-[|\,w_{j0(\tau_0)}^0(T-\tau_0)\,|\times(K_0-K_1)]^{-1}, & j=\overline{1,k};\\ v_j(T)=(K_0-K_1)/(2k)+[|\,w_{j0(\tau_0)}^0(T-\tau_0)\,|\times(K_0-K_1)]^{-1}, & j=\overline{1,k};\\ v_j(\tau)=\eta_{j\tau}^0+r_{j\tau}, & j=\overline{1,k};\ \tau\in M=\\ & =[t_0;T]\setminus\{t_0;T\}; \end{cases} \tag{49}$$

буде оптимальним управлінням процесу реалізації сукупності програм $P_R=\{p_j\}$ у контексті моделі (13)−(19) лише тоді, коли виконані умови леми 2, які задані співвідношеннями (39)−(41).

ВИСНОВКИ

За допомогою узагальненого методу множників Лагранжа досліджено властивості інформаційної моделі управління економічним розвитком регіону, обґрунтованої в [15], та визначено умови існування оптимальної траєкторії розвитку регіону. Оптимальне управління та оптимальна траєкторія розвитку регіону ототожнюється з набором векторів $\vec{v}(\tau)$ розподілу обсягів ресурсів у вартісній формі між регіональними програмами для усіх періодів $\tau \in [t_0;T]$. Встановлено (твердження 2, 3), що існують залежно від деяких зовнішніх умов два типи оптимальних траєкторій чи стратегій економічного розвитку регіону. Перший тип оптимальної стратегії на засадах програмно-цільового управління економічним розвитком регіону визначається умовами твердження 2 та співпадає з початковим розподілом коштів на реалізацію заданого комплексу програм P_R на часовому проміжку $[t_0;T]$. Особливістю таких стратегій є формування компонентів їх управлінь $u^* \in U$ лише з граничних точок допустимого простору U. Натомість другий тип оптимальної стратегії економічного розвитку регіону уможливлює включення в оптимальне управління $u^* \in U$ внутрішніх точок простору U (твердження 3).

Проведений аналіз оптимізаційної моделі $(13)-(19)$ дав змогу конкретизувати досить розмите поняття стратегії економічного розвитку регіону. Адже більшість економістів під стратегією розуміють «…систематичний опис цілей і основних проблем територіального розвитку, визначення напрямів їх вирішення…» [11]. Пропонується як обов'язковий компонент стратегії економічного розвитку регіону розглядати управління процесом реалізації сукупності регіональних програм з урахуванням їх цілей та виділених ресурсів, а оптимальною стратегією економічного розвитку регіону на засадах програмно-цільового управління вважати таку стратегію, яка уможливлює переведення регіону з початкового стану у бажаний за заданий проміжок часу з мінімальними затратами на реалізацію множини соціально-економічних програм.

Відзначимо продуктивність адаптації динамічної моделі багатовимірного лінійного автономного об'єкту [17] для формалізації екстремальної проблеми управління економічним розвитком регіону. Отримані з використанням такого підходу результати уможливлюють розробку спеціального комплексу економіко-математичних моделей оптимізації програмно-цільового управління економічним розвитком регіону в сучасних умовах. Створення такого комплексу моделей необхідне для практичного застосування описаних вище теоретичних результатів і вимагає окремого розгляду.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Кожурін Ф.Д.* Методологічні засади проекту нагальних системних і соціальних перетворень в Україні // Актуальні проблеми економіки. — 2010. — № 11. — С. 3–18.
2. *Згуровський М.З., Маторина Т.А., Прилуцький Д.О., Аброськін Д.А.* Глобальне моделювання процесів сталого розвитку в контексті якості та безпеки життя людей // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 1. — С. 7–32.
3. *Нуреев Р.М.* Экономика развития: модели становления рыночной экономики: Учебное пособие. — М.: ИНФРА-М, 2001. — 240 с.

4. *Сторонянська І.* Оцінка асиметрії соціально-економічного розвитку регіонів України та обґрунтування пріоритетів державної регіональної політики. // Регіональна економіка. — 2006. — № 4. — С. 101–111.
5. *Яковенко А.Г., Романюха Е.А.* Концептуальные подходы к построению и развитию экономических систем // Економічна кібернетика. — 2008. — № 1–2 (49–50). — С. 4–8.
6. *Понеделко Г.* Региональная политика Испании // Мировая экономика и международные отношения. — 2009. — № 1. — С. 84–93.
7. *Трофимова О.* Региональная политика Португалии // Мировая экономика и международные отношения. — 2009. — № 2. — С. 84–92.
8. *Бурнаева Е.* Региональная политика Финляндии // Мировая экономика и международные отношения. — № 5. — С. 64–73.
9. *Руденский Р.А.* Эволюция систем управления сложными экономическими объектами // Економічна кібернетика. — 2008. — № 3–4 (51–52). — С. 27–31.
10. *Колодко Г.* Від ідеології неолібералізму до нового прагматизму // Економіка України. — 2010. — №9. — С. 4–11.
11. *Боголиб Т.М.* Институциональные инструменты региональной политики // Научные труды ДонНТУ. Серия: экономическая. — 2010. — Вып. 38 (1). — С. 79–83.
12. *Глушков В.М.* Основы безбумажной информатики. Изд. 2-е, испр. — М.: Наука, 1987. — 552 с.
13. *Стратегія* розвитку Львівщини до 2015 року. — www.loda.gov.ua.
14. *Стратегія* розвитку Львівської області до 2015 року: Економіка. Суспільство. Середовище. Моніторинг за 2009 рік. — Вип. 9. — Львів: Головне управління статистики у Львівській області, 2010. — 266 с.
15. *Парасюк І.В.* Інформаційні моделі в оцінюванні економічного розвитку регіону // Актуальні проблеми економіки. — 2010. — № 10 (112). — С. 231–239.
16. *Слухай С.В.* Довідник базових термінів та понять з мікроекономіки. — К.: Лібра, 1998. — 256 с.
17. *Чаки Ф.* Современная теория управления. — М.: Мир, 1975. — 424 с.
18. *Твердохліб І.П., Парасюк І.В.* Умови існування оптимальної стратегії реалізації програм економічного розвитку регіону // Проблеми формування нової економіки XXI століття: матеріали III між нар. наук.-практ. конф., 23–24 грудня 2010 р. — В 6-ти томах. Т. 6: Економічне зростання: новітні технології, перспективи, екологічні наслідки. — Дніпропетровськ: Біла К.О., 2010. — С. 80–90.
19. *Остудін Б.А., Шинкаренко Р.А.* Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці: Навч. посібник. — Львів, 1998. — 184 с.
20. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. — М.: Радио и связь, 1987. — 400 с.
21. *Ланкастер К.* Математическая экономика. Пер. з англ. под ред. Д. Б. Юдина. — М.: Советское радио, 1972. — 464 с.

Надійшла 14.09.2011