НОВІ МЕТОДИ
В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ
ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

УДК 512.64

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ НА ПАРЕ ПРОСТРАНСТВ, НАХОДЯЩИХСЯ В ОТНОШЕНИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

А.Ю. МАЛЬЦЕВ

Изучаются линейные пространства, находящиеся в двойственности: рассмотрены билинейные функционалы на парах двойственных пространств, удовлетворяющие некоторому условию невырожденности. Теория двойственности проясняет определённые свойства двухсторонней симметрии линейных пространств достаточно сложные для наглядного представления, однако абсолютно фундаментальные. В частности, дуализм «волна-частица» в квантовой физике находит адекватное математическое истолкование именно на языке линейной двойственности линейных пространств. Поэтому все результаты математической теории двойственности являются полезными для понимания природы конкретных физических явлений. Теория квантованных полей в квантовой теории поля стала естественным развитием принципа корпускулярно-волнового дуализма. Доказана теорема про приведение билинейного функционала на паре пространств, находящихся в двойственности, к каноническому виду. Найден способ построения канонического базиса. Приведены аналоги теоремы Рисса для линейного и билинейного функционалов.

ВВЕДЕНИЕ

Теория двойственности приобрела своё название благодаря тому, что она проясняет некоторые свойства двухсторонней симметрии линейных пространств, достаточно сложные для наглядного представления, но абсолютно фундаментальные. Укажем лишь на тот факт, что дуализм «частица-волна» в квантовой физике находит адекватное математическое истолкование именно на языке линейной двойственности линейных пространств [1]. Поэтому разработка математической теории двойственности имеет очень большое прикладное значение.

Корпускулярно-волновой дуализм — принцип, согласно которому любой объект может проявлять как волновые, так и корпускулярные свойства [2]. Этот принцип возник при разработке квантовой механики и необходим для интерпретации явлений, которые наблюдаются в микромире, с точки зрения классических концепций. Дальнейшим развитием принципа корпускулярно-волнового дуализма стала теория квантованых полей в квантовой теории поля [3].

Известно какую существенную роль играет теорема про приведение билинейной формы в евклидовом и унитарном пространстве к каноническихкому виду, например при построении теории самосопряжённых операторов [4], [5], [6]. Эта теорема так же является принципиальной для разнообразнейших приложений линейной алгебры. В данной статье исследуются билинейные функционалы, которые заданы на паре пространств, находящихся в отношении двойственности. Предлагается процедура приведения таких функционалов к каноническому виду. Найдено обобщение теоремы Рисса для линейных функционалов на паре двойственных пространств.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Билинейной формой на паре линейных пространств L и M (над полем X) называется отображение $B: L \times M \to \mathrm{C}$, которое обладает следующими свойствами:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L,\ \forall \vec{z} \in M:\quad B(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = B(\vec{x}, \vec{z}) + B(\vec{y}, \vec{z});$
2. $\forall \vec{x} \in L,\ \forall \vec{z} \in M,\ \forall \alpha \in \mathrm{X}:\quad B(\alpha\vec{x}, \vec{z}) = \alpha B(\vec{x}, \vec{z});$
3. $\forall \vec{x} \in L,\ \forall \vec{y}, \vec{z} \in M:\quad B(\vec{x}, \vec{y}+\vec{z}) = B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{x}, \vec{z});$
4. $\forall \vec{x} \in L,\ \forall \vec{z} \in M,\ \forall \alpha \in \mathrm{X}:\quad B(\vec{x}, \alpha\vec{z}) = \overline{\alpha} B(\vec{x}, \vec{z}).$

Замечание. Более традиционно называть отображения, удовлетворяющие указанным условиям полуторалинейными функционалами. Однако здесь нам удобнее использовать именно приведенную терминологию.

Определение 2. Будем говорить, что пара линейных пространств L и M находится в отношении двойственности относительно билинейной формы $B: L \times M \to \mathrm{X}$, если выполнены следующие условия:

1.Если равенство $B(\vec{x}_0, \vec{y}) = 0$ выполняется для любых $\vec{y} \in M$, то $\vec{x}_0 = \vec{0}$.

2.Если равенство $B(\vec{x}, \vec{y}_0) = 0$ выполняется для любых $\vec{x} \in L$, то $\vec{y}_0 = \vec{0}$.

Сразу отметим, что отношение «находиться в двойственности» является симметричным. Это следует из почти очевидного утверждения.

Утверждение 1. Если пространства L и M находятся в двойственности относительно формы B, то пространства M и L находятся в двойственности относительно формы B_1, которая определяется формулой: $B_1(\vec{y}, \vec{x}) = \overline{B(\vec{x}, \vec{y})}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно убедиться, что для отображения $B_1: M \times L \to \mathrm{X}$ выполняются условия 1−4 определения 1, если они выполнены для отображения $B: L \times M \to \mathrm{X}$. Но это совершенно очевидно.

Итак, объектом нашего исследования будут билинейные функционалы, заданные на паре пространств, находящихся в двойственности.

Цель работы — получить обобщение теоремы про приведение билинейного функционала в евклидовом пространстве к каноническому виду на случай пары пространств, находящихся в двойственности. Так же будет выяснено, применима ли к таким функционалам классическая теоремы Рисса.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Если рассмотреть билинейный функционал в евклидовом пространстве, то можно найти такой базис, в котором функционал можно представить как сумму произведений координат соответствующих векторов. Возникает вопрос, можно ли так выбрать базисы в паре двойственных пространств, чтобы билинейный функционал в данной паре базисов так же можно было бы представить как сумму произведений координат соответствующих векторов. Следующие две теоремы дают ответ на поставленный вопрос.

Теорема 1. Пусть L и M — конечномерные линейные пространства. L и M находятся в отношении двойственности (относительно некоторой билинейной формы) тогда и только тогда, когда $\dim L = \dim M$.

Доказательство. Пусть $\dim L = m$; $\dim M = n$. Пусть $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_m\}$ — базис в L; $\{\vec{f}_1,...,\vec{f}_n\}$ — базис в M. Возьмём произвольный вектор $\vec{x}$ из L и $\vec{y}$ из M и разложим их по соответствующим базисам: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \vec{e}_i$; $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{f}_j$. Используя условия 1−4 определения 1, можем написать, что $B(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} B(\vec{e}_i,\vec{f}_j) x_i \overline{y}_j$. Если обозначить $B(\vec{e}_i,\vec{f}_j)$ как a_{ij}, то имеет место формула

$$B(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j \,. \tag{1}$$

Матрицу (a_{ij}) будем называть матрицей билинейной формы B.

Теперь используем тот факт, что пространства L и M находятся в отношении двойственности относительно билинейной формы B. Пусть для любого $\vec{x} \in L$ верно, что $B(\vec{x},\vec{y}_0) = 0$, где $\vec{y}_0 = \sum_{j=1}^{m} y_j^0 \vec{f}_j$. Поскольку равенство $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j^{\,0} = 0$ выполняется для любых $\vec{x} \in L$, то, положив последовательно $\vec{x} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений (относительно переменных $\overline{y}_j^0$):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\overline{y}_j^0 = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\overline{y}_j^0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\overline{y}_j^0 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) должна иметь только тривиальное решение. Размерность пространства решений — это разность количества переменных и ранга основной матрицы системы. Следовательно, ранг основной матрицы системы должен равняться n. А поэтому $m \geq n$, поскольку ранг матрицы не может превосходить количества её строк.

Аналогичные соображения ($\vec{x}$ и $\vec{y}$ меняются местами) приводят к выводу, что $n \geq m$. Итак, $m = n$. Теорема полностью доказана.

Теперь собственно сформулируем теорему про приведение билинейной формы, которая задана на паре пространств, находящихся в двойственности, к каноническому виду.

Теорема 2. Пусть L и M — линейные пространства, находящиеся в двойственности относительно билинейной формы B и имеющие одинаковую размерность n. Тогда существуют такие базисы $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$, $\{\vec{g}_1,...,\vec{g}_n\}$ в L и M соответственно, что $B(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$, где $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$; $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{g}_j$.

Доказательство. Из доказательства предыдущей теоремы вытекает, что ранг основной матрицы системы (2) равен n. Поэтому определитель этой матрицы не равен нулю и существует обратная к ней матрица, которую обозначим $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Пусть $\{\vec{g}_1,...,\vec{g}_n\}$ — новый базис в M, который связан с базисом $\{\vec{f}_1,...,\vec{f}_n\}$ соотношениями

$$\vec{g}_k = \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_{ik} \vec{f}_i, \quad k = 1,2,...,n.$$

Тогда, исходя из формулы (1), для того чтобы записать билинейную форму в паре базисов $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$, $\{\vec{f}_1,...,\vec{f}_n\}$ надо вычислить соответствующие коэффициенты $a'_{ij} = B(\vec{e}_i, \vec{g}_j)$. Итак, проводим необходимые выкладки:

$$a'_{ij} = B(\vec{e}_i, \vec{g}_j) = B\left(\vec{e}_i, \sum_{k=1}^{n} \overline{c}_{kj} \vec{f}_k\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{kj} B(\vec{e}_i, \vec{f}_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{ki} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Окончательно, принимая во внимание формулу (1), (естественно, вместо a_{ij} нужно использовать a'_{ij}) будем иметь $B(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$, где $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$; $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{g}_j$. Теорема полностью доказана.

Большую роль в теории евклидовых пространств играет теорема Рисса для линейного и билинейного функционалов. Сейчас будут приведены обобщения упомянутых теорем на случай пары конечномерных пространств, находящихся в отношении двойственности относительно некоторой билинейной формы B.

Теорема 3. Пусть L и M — n-мерные линейные пространства, находящиеся в двойственности относительно билинейной формы B. Пусть $\varphi : L \to \mathrm{X}$ — линейный функционал. Тогда существует причём единственный вектор $\vec{z} \in M$ для которого равенство $\varphi(\vec{x}) = B(\vec{x},\vec{z})$ выполняется для всех $\vec{x} \in L$.

Доказательство. Пусть $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$ — произвольный вектор из L. Используя линейность функционала φ можем написать $\varphi(\vec{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i)\right) = = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\vec{e}_i)$. С другой стороны, если $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{f}_j$ — произвольный вектор из M, ссылаясь на (1) будем иметь, $B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j = = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{y}_j\right)$. Исходя из двух последних равенств, будем выбирать координаты $\vec{y}$ таким образом, чтобы они удовлетворяли следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \overline{y}_j = \varphi(\vec{e}_1), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \overline{y}_j = \varphi(\vec{e}_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \overline{y}_j = \varphi(\vec{e}_n). \end{cases}$$

Поскольку основная матрица системы невырождена, система имеет и притом единственно решение. Итак, пусть $(z_1, z_2, ..., z_n)$ — решение системы. Тогда вектор $\vec{z} = \sum_{j=1}^{n} z_j \vec{f}_j$ такой, что $\varphi(\vec{x}) = B(\vec{x}, \vec{z})$ для всех $\vec{x} \in L$.

Переходим к доказательству единственности. Пусть для всех $\vec{x} \in L$: $\varphi(\vec{x}) = B(\vec{x}, \vec{z}_1) = B(\vec{x}, \vec{z}_2)$. Тогда $B(\vec{x}, \vec{z}_1 - \vec{z}_2) = 0$ для всех $\vec{x} \in L$. Из условия 2 определения 2 вытекает, что $\vec{z}_1 - \vec{z}_2 = 0$. Значит, $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$. Теорема полностью доказана.

Теорема 4. Пусть L и M — конечномерные линейные пространства, находящиеся в двойственности относительно билинейной формы B. Пусть $B_2 : L \times M \to \mathrm{X}$ — билинейная форма. Тогда существует, причём единственный линейный оператор $A : M \to M$, для которого формула $B_2(\vec{x}, \vec{y}) = = B(\vec{x}, A\vec{y})$ имеет место для всех $\vec{x} \in L$ и для всех $\vec{y} \in M$.

Доказательство. Определим отображение $\varphi_{\vec{y}} : L \to \mathrm{X}$ формулою $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = B_2(\vec{x}, \vec{y})$. Ясно, что $\varphi_{\vec{y}}$ — линейный функционал на пространстве L. Поэтому, по теореме 3 существует и притом единственный вектор $\vec{z} = \vec{z}(y) \in M$, для которого выполняется равенство $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = B(\vec{x}, \vec{z}(\vec{y}))$ для всех $\vec{x} \in L$. Зависимость $\vec{z} = \vec{z}(y)$ обозначим буквой A. Тогда будем иметь, что для любого $\vec{x} \in L$ и для любого $\vec{y} \in M$ справедлива формула $B_2(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{x}, A\vec{y})$. Осталось доказать, что A — линейное отображение.

Пусть α_1, α_2 — произвольные константы, $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in M$ — произвольные векторы. С одной стороны

$$B_2(\vec{x}, \alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2) = \overline{\alpha}_1 B_2(\vec{x}, \vec{y}_1) + \overline{\alpha}_2 B_2(\vec{x}, \vec{y}_2) =$$

$$= \overline{\alpha}_1 B(\vec{x}, A\vec{y}_1) + \overline{\alpha}_2 B(\vec{x}, A\vec{y}_2) = B(\vec{x}, \alpha_1 A\vec{y}_1 + \alpha_2 A\vec{y}_2).$$

С другой стороны

$$B_2(\vec{x}, \alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2) = B(\vec{x}, A(\alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2)).$$

Поэтому, учитывая два последних равенства, получим, что $A(\alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2) = \alpha_1 A\vec{y}_1 + \alpha_2 A\vec{y}_2$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Ясно, что аналогично можно доказать следующее утверждение: Пусть L и M — конечномерные линейные пространства, находящиеся в отношении двойственности относительно билинейной формы B. Пусть $B_2 : L \times M \to \mathrm{X}$ — билинейная форма. Тогда существует причём единственный линейный оператор $A : L \to L$ такой, что для любого $\vec{x} \in L$ и для любого $\vec{y} \in M$ имеет место формула $B_2(\vec{x}, \vec{y}) = B(A\vec{x}, \vec{y})$.

ВЫВОДЫ

Найден критерий того, что пара конечномерных линейных пространств находится в отношении двойственности. Указан канонический вид билинейных функционалов на таких парах. Отметим, что доказательство теоремы 2 является конструктивным. Поэтому, фактически получен алгоритм построения пары базисов, в которой функционал имеет каноническую форму. Для билинейных функционалов на парах двойственных пространств доказан аналог теоремы Рисса для билинейных функционалов в евклидовых пространствах.

Полученные результаты имеют прикладное значение. Это объясняется следующими соображениями. Пространство состояний любой квантовой системы является линейным пространством над полем комплексных чисел [3]. Поэтому конструкции комплексной линейной алгебры широко используются для формулировки фундаментальных законов природы. В частности, благодаря линейной теории двойственности можно обосновать квантовый принцип дополнительности Бора [3]. А поэтому дальнейшее развитие этой теории является актуальной и практически важной задачей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weinberg S.* The Quantum Theory of Fields, Vol. 1: Foundations. — NY: Cambridge University Press, 1995. — 400 p.
2. *Cao T.Y.* Conceptual Developments of 20th Century. Field Theories. — NY: Cambridge University Press, 1998. — 456 p.
3. *Weinberg S.* The Quantum Theory of Fields, Vol. 2: Modern applications. — NY: Cambridge University Press, 1995. — 502 p.
4. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 570 с.
5. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 443 с.
6. *Рисс Ф., Секифальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 592 с.

Поступила 11.12.2012