УДК 517.9

ДОВГОСТРОКОВІ ПРОГНОЗИ ФУНКЦІЙ СТАНУ АВТОНОМНИХ ВКЛЮЧЕНЬ ТИПУ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ В $\mathbb{R}^N$

Н.В. ГОРБАНЬ

Розглянуто рівняння реакції-дифузії з багатозначною функцією взаємодії в необмеженій області. Умови на параметри задачі не гарантують єдиності розв'язку відповідної задачі Коші. Вивчається проблема довгострокового прогнозування функцій стану поставленої задачі з точки зору теорії глобальних та траєкторних атракторів для багатозначних напівпотоків. Вивчаються питання існування та властивостей слабких розв'язків автономного включення типу реакції-дифузії в необмеженій області. Знайдено умови існування глобального та траєкторного атракторів задачі в фазовому та, відповідно, розширеному фазовому просторах, встановлено їх регулярність. Отримані результати застосовано до конкретних задач, що моделюють реальні фізичні процеси різної природи, зокрема розглядаються моделі горіння в пористому середовищі, модель провідності електричних імпульсів у нервові закінчення, кліматологічні моделі.

ВСТУП

Інтерес до вивчення проблеми довгострокового прогнозування функцій стану поставленої в роботі задачі мотивується широкою сферою застосувань. Задачі типу рівняння реакції-дифузії виникають у багатьох математичних моделях, що описують реальні процеси різної природи, зокрема, моделі горіння в пористому середовищі, модель провідності електричних імпульсів в нервові закінчення, кліматологічні моделі. Динаміка розв'язків задач типу реакції-дифузії активно вивчається протягом останніх десятиліть. Результати відносно існування та властивостей розв'язків рівняння реакції-дифузії у випадку гладкого за фазовою змінною нелінійного доданку, як і результати відносно існування за цих же умов глобального атрактора є класичними і містяться в [1], [2]; для неавтономних рівнянь з майже періодичною залежністю від часової змінної — в [3]; для включень в обмеженій області — в [4, глава 2], [5]; для рівнянь в необмеженій області — в [6], [7]. Автономні включення в необмеженій області було розглянуто в [8].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $N \geq 1$, $f : \mathbb{R}^{N+1} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\varnothing\}$. Розглянемо задачу:

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) \in f(x, u(x,t)),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t \in [\tau, T],\ (-\infty < \tau < T < +\infty), \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,\tau) = u_\tau(x),\ x \in \mathbb{R}^N,\ u_\tau(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad (2)$$

де $u(\cdot,\cdot)$ — невідома функція, $u_t(\cdot,\cdot) = \partial u(\cdot,\cdot)/\partial t$.

Введемо позначення $[a,b]=\{\alpha a+(1-\alpha)b|\alpha\in[0,1]\}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Поставимо умови на параметри задачі:

α_1) Існують такі вимірні: напівнеперервна знизу та напівнеперервна зверху функції $\underline{f},\overline{f}:\mathbb{R}^{N+1}\to\mathbb{R}$, що для майже всіх $x\in\mathbb{R}^N$ та всіх $y\in\mathbb{R}$ $\underline{f}(x,y)\le\overline{f}(x,y)$ та $f(x,y)=[\underline{f}(x,y),\overline{f}(x,y)]$.

α_2) Існують функція $C_1\in L^1(\mathbb{R}^N)$ та стала $\alpha>0$ такі, що для майже всіх $x\in\mathbb{R}^N$ та для всіх $y\in\mathbb{R}$ виконуються нерівності:

$$\underline{f}(x,y)y\ge\alpha\,|\,y\,|^2-C_1(x),\ y\ge0,\ \overline{f}(x,y)y\ge\alpha\,|\,y\,|^2-C_1(x),\ y\le0.$$

α_3) Існують невід'ємна функція $C_2\in L^1(\mathbb{R}^N)$ та сталі $\beta>0,\ \gamma>0$ такі, що для майже всіх $x\in\mathbb{R}^N$ та для всіх $y\in\mathbb{R}$ виконуються співвідношення:

$$|\,\underline{f}(x,y)\,|^2\le C_2(x)+\beta\,|\,y\,|^2,\ \ |\,\overline{f}(x,y)\,|^2\le C_2(x)+\gamma\,|\,y\,|^2.$$

Розглянемо дійсні простори $H:=L^2(\mathbb{R}^N)$, $V:=H^1(\mathbb{R}^N)$ та $V^*:=$ $:=H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Тут $H^1(\mathbb{R}^N)$ — гільбертів простір Соболєва; V^* — дуальний простір до V. Має місце ланцюжок неперервних та щільних вкладень $V\subset H\subset V^*$. Відзначимо, що, на відміну від випадку обмеженої області з регулярною границею, жодне з вкладень не є компактним.

Означення 1. Нехай $\tau<T$. Функція $\varphi(\cdot)\in L^2(\tau,T;V)$ називається слабким розв'язком включення (1) на $[\tau,T]$, якщо існує така вимірна функція $d:\mathbb{R}^N\times(\tau,T)\to\mathbb{R}$, що $d(x,t)\in f(x,\varphi(x,t))$ для майже всіх $(x,t)\in$ $\in\mathbb{R}^N\times(\tau,T)$, для всіх $v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N\times[\tau,T])$ виконується:

$$-\int_\tau^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x,t)\cdot v_t(x,t)dxdt-\int_\tau^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x,t)\cdot\Delta v(x,t)dxdt+$$
$$+\int_\tau^T\int_{\mathbb{R}^N}d(x,t)\cdot v(x,t)dxdt=0. \qquad (3)$$

Припущення α_1 – α_3 на параметри задачі (1) не гарантують єдиності розв'язку відповідної задачі Коші [9, с. 68]. Тому для вивчення асимптотичної поведінки при $t\to+\infty$ всіх слабких розв'язків включення (1) застосовуватимемо методи абстрактної теорії глобальних та траєкторних атракторів для багатозначних напівпотоків в нескінченномірних просторах [9, с. 14].

АПРІОРНІ ОЦІНКИ. ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ. ЇХ РЕГУЛЯРНІСТЬ

Позначимо через $X_{\tau,T}$ та $Y_{\tau,T}$ простори $X_{\tau,T}:=L^2(\tau,T;V)\cap C([\tau,T],H)$; $Y_{\tau,T}:=L^2(\tau,T;V^*)$. Зауважимо, що $X_{\tau,T}$ — банахів простір відносно норми

$\| x(\cdot) \|_{X_{\tau,T}} = \sqrt{\| x(\cdot) \|^2_{L^2(\tau,T;V)} + \| x(\cdot) \|^2_{C([\tau,T],H)}}$ [10, с. 22]; $Y_{\tau,T}$ — гільбертів простір зі скалярним добутком $\left(u(\cdot), v(\cdot)\right)_{Y_{\tau,T}} = \int_\tau^T \left(u(s), v(s)\right)_{V^*} ds \quad \forall\, u(\cdot), v(\cdot) \in$ $\in Y_{\tau,T}$ [10, с.22]. Введемо позначення: $\overline{C_1} := \int_{\mathbb{R}^N} C_1(x)dx < +\infty,$ де функція $C_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ з припущення α_2.

Встановимо деякі апріорні оцінки розв'язків.

Лема 2. Нехай $\tau < T$, нехай виконуються припущення α_1 – α_3. Тоді для довільного слабкого розв'язку $u(\cdot)$ задачі (1) на $[\tau, T]$ виконуються нерівності:

$$\| u(\cdot) \|^2_{X_{\tau,T}} \le \frac{3}{2}(\| u(\tau) \|^2_{X_H} + 2\overline{C_1}(T - \tau)) \tag{4}$$

$$\| u_t(\cdot) \|^2_{Y_{\tau,T}} \le \sqrt{\frac{3}{2}(\| u(\tau) \|^2_{X_H} + 2\overline{C_1}(T - \tau))} + $$
$$+ c_1 \sqrt{K_1(T - \tau)\left(1 + \frac{3}{2}(\| u(\tau) \|^2_H + 2\overline{C_1}(T - \tau))\right)}. \tag{5}$$

Доведення випливає з [8].

Теорема 3 [8, Теорема 3.1, с. 241]. Нехай виконуються припущення α_1 – α_3. Тоді для довільних $\tau < T$, $u_\tau \in H$, задача Коші (1), (2) має принаймні один слабкий розв'язок на $[\tau, T]$.

У наступній теоремі розглянемо звуження $v : [\tau, T] \to V^*$ на відрізок $[s, T]$, де $s \in (\tau, T)$, $\tau < T$. Для спрощення запису використовуватимемо аналогічне позначення v.

Теорема 4. Нехай виконуються припущення α_1 — α_3. Нехай, крім того, $u(\cdot) \in L^2(\tau, T; V)$ — довільний слабкий розв'язок задачі (1), (2) на $[\tau, T]$. Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0, T - \tau)$:

$$u(\cdot) \in C([\tau + \varepsilon, T]; V) \cap L^2(\tau + \varepsilon, T; H^2(\mathbb{R}^N) \cap V),\ u_t(\cdot) \in L^2(\tau + \varepsilon, T; H).$$

Доведення випливає із [11].

Оскільки в теоремі 3 $\tau < T$ — довільні, а «склейка» (конкатенація) слабких розв'язків є слабким розв'язком [8, с. 244], то внаслідок автономності задачі (1) кожен її слабкий розв'язок, визначений на $[0, T]$, $T > 0$, можна продовжити до глобального слабкого розв'язку, визначеного на $[0, +\infty)$.

Для кожного $u_0(\cdot) \in H$ позначимо через $\mathsf{D}(u_0)$ сукупність всіх глобальних слабких розв'язків задачі (1) на $[0, +\infty)$, що відповідають початковій умові

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{для м.в.} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{6}$$

Тоді $\mathsf{D}(u_0) \subset L^2_{\mathrm{loc}}(0,+\infty;V) \cap C([0,+\infty),H)$. Більш того, $\Delta(u_0) \subset$ $\subset L^{c\infty}(0,+\infty;H)$ $\forall u_0 \in H$ (див. [8, с. 244] та посилання там).

ІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО ТА ТРАЄКТОРНОГО АТРАКТОРІВ

Наведемо деякі основні означення та теореми абстрактної теорії глобальних атракторів для багатозначних напівпотоків, що знадобляться в ході дослідження.

Означення 5 [4, означення 1.1, с. 5]. Відображення $G:\mathbb{R}_+ \times H \mapsto$ $\mapsto 2^H \setminus \{\varnothing\}$ називається багатозначним напівпотоком на H, якщо: $G(0,\cdot) = I_H$ — тотожне відображення H; для всіх $t,s \in \mathbb{R}_+$ та для всіх $x \in H$ $G(t+s,x) \subset G(t,G(s,x))$. Багатозначний напівпотік називається строгим, якщо для всіх $t,s \in \mathbb{R}_+$ та для всіх $x \in H$ $G(t+s,x) = G(t,G(s,x))$.

Означення 6 [4, означення 1.6, с. 9]. Множину $\Theta \subset H$ називають глобальним атрактором для багатозначного напівпотоку G, якщо:

- Θ — притягуюча множина для багатозначного напівпотоку G, тобто для довільної непорожньої обмеженої множини $B \in H$ $\mathrm{dist}_H(G(t,B),\Theta) \to 0$, $t \to +\infty$, де $\mathrm{dist}_H(A,B) := \sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{y\in B} \| x-y \|_H$ — напівметрика Хаусдорфа;
- для довільної множини $Y \subset H$, притягуючої для багатозначного напівпотоку G, справедливе включення $\Theta \subset \mathrm{cl}_H Y$, тобто Θ є мінімальною множиною серед всіх притягуючих множин з H;
- для всіх $t \geq 0$ $\Theta \subset G(t,\Theta)$.

Глобальний атрактор називається інваріантним, якщо для всіх $t \geq 0$ $\Theta = G(t,\Theta)$.

Означення 7 [4, означення 1.4, с. 5]. Багатозначний напівпотік G називається асимптотично компактним, якщо довільна послідовність $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ така, що $\xi_n \in G(t_n,B)$, $t_n \to +\infty$, передкомпактна в H.

Теорема 8 [12, с. 1980]. Нехай для багатозначного напівпотоку $G:\mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X \setminus \{\varnothing\}$ виконуються умови:

- G — асимптотично компактний;
- існує таке $R_0 > 0$, що для всіх $R > 0$ існує $T \geq 0$, що залежить від R, таке, що для всіх $t \geq T$ $G(t,\{x \in X \mid \rho(x,0) \leq R\}) \subset \{x \in X \mid \rho(x,0) \leq R_0\}$;
- для кожного $t \geq 0$ відображення $X \ni x \mapsto G(t,x)$ має замкнений графік.

Тоді множина $\Theta = \bigcup\limits_{B\in\beta(X)} \omega(B)$ є компактним глобальним атрактором. Більш того, якщо багатозначний напівпотік G — строгий, то Θ — інваріант, тобто, $\Theta = G(t,\Theta)$ $\forall\, t \geq 0$.

Позначимо через K_+ сім'ю всіх слабких розв'язків задачі (1), визначених на $[0,+\infty)$, тобто $\mathsf{K}_+ = \bigcup\limits_{u_0\in H} \mathsf{D}(u_0)$ [4, с. 18]. Для довільних $u(\cdot) \in \mathsf{K}_+$, $h \geq 0$, $s \geq 0$ покладемо $u_h(s) := u(h+s)$. Зауважимо, що $u_h(\cdot) \in \mathsf{K}_+$

для кожного елемента $u(\cdot)\in \mathcal{K}_+$, для довільного $h\geq 0$ (трансляційна інваріантність).

Визначимо (в загальному випадку багатозначне) відображення $G:\mathbb{R}_+\times H\to 2^H\setminus\{\varnothing\}$:

$$G(t,u_0):=\{u(t)\in H\,|\,u(\cdot)\in \mathrm{K}_+ : u(0)=u_0\}. \qquad (7)$$

Лема 9. Відображення $G:\mathbb{R}_+\times H\mapsto 2^H\setminus\{\varnothing\}$, визначене фомулою (7), є строгим багатозначним асимптотично компактним напівпотоком у просторі H.

Доведення. Доведення випливає з [8, с. 244].

Теорема 10 [8, теорема 3.2, с. 244]. За виконання припущень $\alpha_1-\alpha_3$, задача (1), (2) визначає строгий багатозначний напівпотік у фазовому просторі H, для якого існує інваріантний глобальний атрактор.

У класі $\mathcal{K}_+$ задамо напівгрупу трансляцій $\{T(h)\}_{h\geq 0}$: $\forall\, h\geq 0$, $\forall\, u(\cdot)\in \mathcal{K}_+$ $T(h)u(\cdot)=u_h(\cdot)$. Зауважимо, що внаслідок трансляційної інваріантності простору траєкторій $\mathcal{K}_+$ для довільного $h\geq 0$ $T(h)\mathcal{K}_+\subset \mathcal{K}_+$. Побудуємо атрактор трансляційної напівгрупи $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, що діє на K_+. На K_+ розглядатимемо топологію, індуковану з простору Фреше $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$. Зауважимо, що

$$f_n(\cdot)\to f(\cdot) \text{ в } C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)\Leftrightarrow \forall M>0\ \Pi_M f_n(\cdot)\to \Pi_M f(\cdot) \text{ в } C([0,M];H), \qquad (8)$$

де Π_M — оператор звуження на відрізок $[0,M]$ [13, с. 18]. Позначимо через Π_+ оператор звуження на $[0,+\infty)$.

Означення 11 [14, означення 1.2, ст. 197]. Множина $\mathcal{U}\subset \mathcal{K}_+$ називається траєкторним атрактором для задачі (1) в просторі траєкторій $\mathcal{K}_+$ відносно топології $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$, якщо:

- $\mathcal{U}$ — компактна в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$ та обмежена в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$;
- $\mathcal{U}$ — строго інваріантна відносно $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, тобто $T(h)\mathcal{U}=\mathcal{U}$ $\forall\, h\geq 0$;
- $\mathcal{U}$ є притягуючою множиною для простору траєкторій $\mathcal{K}_+$ у топології $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$, тобто для довільної обмеженої в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ множини $\mathcal{B}\subset \mathcal{K}_+$ та довільного числа $M\geq 0$ виконується співвідношення $\mathrm{dist}_{C([0,M];H)}(\Pi_M T(t)\mathcal{B},\Pi_M\mathcal{U})\to 0$, $t\to +\infty$.

Розглянемо задачу (1) на всій числовій прямій. Аналогічно простору $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$ простір $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ наділений топологією локальної рівномірної збіжності на кожному відрізку $[-M,M]\subset \mathrm{R}$ [14, с. 198]. Функція $u\in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)\cap L_\infty(\mathbb{R};H)$ називається повною траєкторією задачі (1), якщо $\forall\, h\in\mathbb{R}$ $\Pi_+u_h(\cdot)\in \mathcal{K}_+$ [14, с. 198]. Нехай $\mathcal{K}$ — сукупність усіх повних траєкторій задачі (1). Зауважимо, що для $\mathcal{K}$ справедлива властивість трансляційної інваріантності, тобто $\forall h \in \mathbb{R}$, $\forall u(\cdot) \in \mathcal{K}$ $\quad u_h(\cdot) \in \mathcal{K}$.

Теорема 12. Нехай для задачі (1) виконуються припущення α_1 – α_3; $\mathcal{A}$ — глобальний атрактор для багатозначного напівпотоку $G : \mathbb{R}_+ \times H \to \to 2^H \setminus \{\varnothing\}$, визначеного формулою (7), з теореми 10. Тоді для задачі (1) існує траєкторний атрактор $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_+$ у просторі траєкторій $\mathcal{K}_+$ відносно топології $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$, причому $\mathcal{U} = \Pi_+ \mathcal{K} = \{u(\cdot) \in \mathcal{K}_+ \mid u(t) \in \mathcal{A} \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+\}$.

Доведення. Нехай $\mathcal{A}$ — глобальний атрактор для багатозначного напівпотоку, визначеного формулою (7). Твердження теореми випливає з [4, теорема 1.12, с. 24], якщо для довільної послідовності $\{\varphi_n(\cdot)\} \subset \mathcal{K}^+$ такої, що $\varphi_n(0) \to \varphi_0$ в H, існує таке $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}^+$, що $\varphi(0) = \varphi_0$, та, з точністю до деякої підпослідовності, $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ у просторі H $\ \forall t \geq 0$.

Нехай $\{\varphi_n(\cdot)\} \subset \mathcal{K}^+$ — така довільна послідовність, що $\varphi_n(0) \to \varphi_0 \in A$ у H. З апріорних оцінок, встановлених у лемі 2, теореми Банаха-Алаоглу та кроку 3 доведення теореми 3.2 із [8] випливає, що існує таке $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}^+$, що $\varphi(0) = \varphi_0$, та, з точністю до деякої підпослідовності, $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ слабко в H $\ \forall t \geq 0$. Повторюючи міркування з [6, с. 128], одержимо шукане твердження. Теорему доведено.

Дослідимо питання регулярності глобального та траєкторного атракторів включення (1).

Теорема 13. Нехай для задачі (1) виконуються припущення $\alpha_1 - \alpha_3$; $\mathcal{A}$ — глобальний атрактор для багатозначного напівпотоку $G : \mathbb{R}_+ \times H \to \to 2^H \setminus \{\varnothing\}$, визначеного формулою (7), з теореми 10; $\mathcal{U}$ — траєкторний атрактор для задачі (1) в просторі траєкторій $\mathcal{K}_+$ відносно топології $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$, з теореми 12. Тоді $\mathcal{A}$ — обмежена підмножина в просторі V; $\mathcal{U}$ — обмежена підмножина в просторі $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V)$; $\mathcal{K}$ — обмежена підмножина в просторі $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; V)$.

Доведення. З теорем 4, 10, 12 випливає, що $\mathcal{A} \subset V$, $\mathcal{U} \subset C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V)$, $\mathcal{K} \subset C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; V)$. Відмітимо при цьому, що внаслідок теореми 4 $\mathcal{K} \subset C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; V) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^N) \cap V)$. Існує така стала $C > 0$, що не залежить від $u(\cdot)$ та t, що $\dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx \leq C$ для майже всіх $t \in \mathbb{R}$. Отже, $\mathcal{K}$ — обмежена підмножина в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; V)$, $\mathcal{A}$ — обмежена підмножина в V; $\mathcal{U}$ — обмежена підмножина в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V)$.

Теорему доведено.

ЗАСТОСУВАННЯ

Задачі типу (1) виникають у багатьох важливих у сенсі застосувань математичних моделях. Зупинимося на застосуванні отриманих результатів до параболічних рівнянь із розривною нелінійністю.

Нехай $h(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$; $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ — максимально монотонні багатозначні відображення, область визначення яких $D(f_1) = D(f_2) = \mathbb{R}$. Розглянемо диференціальне включення

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) + f_1(u(x,t)) - f_2(u(x,t)) \ni h(x,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty), \quad (9)$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_0 \in L^2(\mathbb{R}). \quad (10)$$

Нехай існують такі сталі K_1, K_2, $M \ge 0$ та $\varepsilon > 0$, що для всіх $y_1 \in f_1(s)$, $y_2 \in f_2(s)$ справедливі оцінки:

$$\sup_{y \in f_2(s)} |y| \le K_1 + K_2 |s|, \quad (11)$$

$$(y_1 - y_2)s \ge (-\lambda_1 + \varepsilon)s^2 - M, \quad (12)$$

де λ_1 — перше власне значення оператора — Δ в $H_0^1(\Omega)$.

У [15] було показано, що у випадку обмеженої області включення (9) є частинним випадком абстрактного диференціального включення, спричиненого різницею субдиференціальних відображень відповідних напівнеперервних знизу функціоналів [16]. Отже, для довільного $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ існує глобальний сильний розв'язок задачі Коші (9), (10) [17]. Покажемо, що при цьому умови (11), (12) на параметри задачі не гарантують єдиності розв'язку поставленої задачі Коші (9), (10). Дійсно, розглянемо включення:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) \in H_0(u(x,t)),\ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty), \quad (13)$$

де $H_0(u) := \begin{cases} -1, & \text{при } u < 0, \\ [-1,1], & \text{при } u = 0, \\ 1, & \text{при } u > 0. \end{cases}$ — функція Хевісайда

з початковою умовою $u(x,0) = 0$. Очевидно, що задача (13) задовольняє умови (11), (12); $u(x,t) \equiv 0$ — сильний розв'язок задачі Коші (13) з початковою умовою $u(x,0) = 0$. Однак, з [18] випливає, що включення (13) має нескінченну (однак зліченну) кількість стаціонарних точок, і для кожної з цих точок існує принаймні один розв'язок з початковою умовою $u(x,0) = 0$, що збігається до неї при $t \to +\infty$. Отже, існує нескінченна кількість розв'язків задачі Коші (13) з початковою умовою $u(x,0) = 0$.

Розглянемо деякі фізичні моделі.

Моделі горіння в пористому середовищі. Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - f(u(x,t)) \in \lambda H(u(x,t)-1), \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

де функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — неперервна і неспадна, $\lambda > 0$, $H(z) :=$ $= \begin{cases} 0, & \text{при } z<0, \\ [0,1], & \text{при } z=0, \\ 1, & \text{при } z>0. \end{cases}$ Припустимо, що існують такі сталі $K_1 \geq 0$, $K_2 \in [0,1)$, що $|f(s)| \leq K_1 + K_2 |s|$. Ця задача моделює процеси горіння в пористому середовищі [19]. Параметри задачі задовольняють припущення $\alpha_1 - \alpha_3$, а, отже, для неї виконуються твердження теорем 4, 10, 12, 13.

Модель провідності електричних імпульсів у нервові закінчення. Розглянемо задачу Коші, що моделює процес провідності електричних імпульсів у нервові закінчення [20, 21]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) \in \lambda H(u(x,t)-a), \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \\ u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \end{cases}$$

де $a \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. У цьому випадку $f_1(s) = s$, а $f_2(s) = H(s-a)$. Для розглянутої задачі очевидним чином виконуються припущення $\alpha_1 - \alpha_3$. А, отже, для неї виконуються твердження теорем 4, 10, 12, 13.

Модель з кліматології. Розглянемо кліматичну модель енергетичного балансу, запропоновану у [22]. Відмітимо, що ця модель досліджувалась також у роботах [23–25]. Сформулюємо задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + Bu(x,t) \in QS(x)\beta(u(x,t)) + h(x), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{14}$$

де B, Q — додатні константи, S, $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, а β — максимально монотонний граф у $\mathbb{R}^2$, причому існують такі сталі m, $M \in \mathbb{R}$, що для всіх $s \in \mathbb{R}$, для всіх $z \in \beta(s)$: $m \leq z \leq M$. Припустимо, що для майже всіх $x \in \mathbb{R}$ $0 < S_0 \leq S(x) \leq S_1$.

Невідома функція $u(x,t)$ репрезентує середню температуру земної поверхні, Q — так звана сонячна константа, середнє значення (середнє за рік і, відповідно, середнє по земній поверхні) отриманого сонячного радіаційного потоку, а функція $S(x)$ — функція інсоляції, задана розподілом сонячного випромінювання, яке падає на верхні шари атмосфери. Якщо середнє значення часу близько одного року (або більше), то функція $S(x)$ задовольняє поставленим умовам, у випадку коротких періодів необхідне додаткове припущення $S_0 = 0$. β — так звана функція ко-альбедо, може бути розривною, яка представляє співвідношення між поглинаючою та випромінюваною сонячною енергією в точці x земної поверхні. Очевидно, що $\beta(u(x,t))$ залежить від природи земної поверхні. Наприклад, відомо, що на льодовиках значення $\beta(u(x,t))$ значно менше, ніж на поверхні океану, адже білий колір льоду відбиває більшу кількість випромінюваної сонячної енергії, тоді як океан, завдяки своєму темному кольору та високій теплоємності, поглинає більшу кількість випромінюваної сонячної енергії.

Відмітимо, що ця модель дуже близька до (9). Дійсно, вибравши функцію f_2, що залежить від x, зведемо нашу задачу до частинного випадку задачі (9). Таким чином, в кліматичній моделі, що описується рівнянням (14) не можна гарантувати єдиності розв'язку.

ВИСНОВКИ

У ході роботи було вивчено динаміку розв'язків рівняння реакції-дифузії з багатозначною функцією взаємодії в необмеженій області за умов, що не гарантують єдиності розв'язку відповідної задачі Коші. Встановлено існування принаймні одного слабкого розв'язку поставленої задачі та доведено регулярність кожного слабкого розв'язку. Доведено існування глобального та траєкторного атракторів задачі в фазовому та, відповідно, розширеному фазовому просторах, встановлено їх регулярність. Отримані результати застосовано до конкретних задач, що моделюють реальні фізичні процеси різної природи, зокрема розглянуто моделі горіння в пористому середовищі, модель провідності електричних імпульсів у нервові закінчення, кліматологічні моделі.

Автор висловлює щиру подяку доктору фізико-математичних наук П.О. Касьянову та доктору фізико-математичних наук О.В. Капустяну за постановку задачі та участь в обговоренні шляхів її розв'язання.

Це дослідження частково підтримано грантами Президента України GP/f44/076, GP/F49/070 та грантом НАН України 2273/13.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. — М.: Наука,1989. — 392 с.
2. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. — NY: Springer-Verlag, 1988. — 500 p.
3. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pur. Appl. — 1997. — doi:10.1016/S0021-7824(97)89978-3.
4. *Zgurovsky M.Z., Kasyanov P.O., Kapustyan O.V., Valero J., Zadoianchuk N.V.* Evolution Inclusions and Variation Inequalities for Earth Data Processing III. — Berlin: Springer, 2012. — doi:10.1007/978-3-642-28512-7.
5. *Kasyanov P.O., Toscano L., Zadoianchuk N.V.* Regularity of Weak Solutions and Their Attractors for a Parabolic Feedback Control Problem // Set-Valued and Variational Analysis. — 2013. — DOI: 10.1007/s11228-013-0233-8.
6. *Morillas F., Valero J.* Attractors for reaction-diffusion equation in $\mathbb{R}^N$ with continuous nonlinearity // Asymptotic Analysis. — 2005. — **44**, Iss. 1–2. — P. 111–130.

7. *Wang B.* Attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domains // Physica D.: Nonlinear Phenomena. — 1999. — **128,** Iss. 1.— P. 41–52.
8. *Gorban N.V., Stanzhitsky A.N.* On the dynamics of solutions for autonomous reaction-diffusion equation in $\mathbb{R}^N$ with multivalued nonlinearity // Ukr. Math. Bull. — 2009. — **6**, Iss. 2. — P. 235–251.
9. *Global* attractors for multivalued dynamical systems / [Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V.]. — К.: Naukova dumka, 2008. — 208 p.
10. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 337 с.
11. *Gorban N.V., Kasyanov P.O.* On Regularity of All Weak Solutions and Their Attractors for Reaction-Diffusion Inclusion in Unbounded Domain // Continues and Distributed Systems Theory and Applications. — 2014. — P. 205–220.
12. *Kapustyan A.V., Melnik V.S., Valero J.* Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations // International Journal Of Bifurcation and Chaos. — 2003. — № 13. — P. 1969–1983.
13. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Trajectory and global attractors of three-dimensional Navier–Stokes systems // Mathematical Notes. — 2002. — doi: 10.1023/A: 1014190629738.
14. *Капустян О.В., Жерардо І.* Глобальний атрактор для неавтономного хвильового рівняння без єдиності розв'язку // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2006. — №2. — С. 107–120.
15. *Valero J.* Attractors of Parabolic Equations Without Uniqueness // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2001. —**13**, №. 4. — P. 711–744.
16. *Journal* of the Faculty of Science, University of Tokyo, Section 1A, Mathematics. — 1977. — **24**, № 3. — P. 575 – 605.
17. *Archive* for Rational Mechanics and Analysis January 2008. — **187**, Iss. 1. — P. 91–135.
18. *Arrieta J.M., Rodri'guez-Bernal A., Valero J.* Dynamics of a reaction-diffusion equation with a discontinuous nonlinearity // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2006. — DOI:1142/S0218127406016586.
19. *Feireisl E., Norbury J.* Some existence and nonuniqueness theorems for solutions of parabolic equations with discontinuous nonlinearities // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. — 1991. — **119**, Iss. 1–2. — P. 1–17.
20. *Terman D.* A free boundary problem arising from a bistable reaction–diffusion equation // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1983. — **14**. — P. 1107–1129.
21. *Terman D*. A free boundary arising from a model for nerve conduction // Journal of differential equations. — 1985. — **58**, Iss. 3. — P. 345–363.
22. *Budyko M.I.* The effects of solar radiation variations on the climate of the Earth // Tellus. — 1969. — **21**. — P. 611–619.
23. *Díaz H., Díaz J.* On a stochastic parabolic PDE arising in climatology // Real Academia de Ciencias Exactas. — 2002. — **96**. — P. 123–128.
24. *Díaz J., Hernández J., Tello L.* On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in climatology // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1997. — **216**. — P. 593–613.
25. *Díaz J., Hernández J., Tello L.* Some results about multiplicity and bifurcation of stationary solutions of a reaction diffusion climatological model // Real Academia de Ciencias Exactas. — 2002. — **96**, Iss. 3. — P. 357–366.

Надійшла 08.11.2013