УДК 517.3

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА ПО ПОВЕРХНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ В R^n

А.Ю. ПОТАПЕНКО

Проведено построение поверхностного интеграла по поверхности произвольной коразмерности в R^n при помощи альтернативного подхода. Поверхностные меры построены при помощи инфинитезимальной процедуры с использованием набора попарно коммутирующих векторных полей, имеющих глобальные потоки и являющихся трансверсальными к данной поверхности. Найдены плотности полученных мер относительно классической и на основании проведенного сравнительного анализа заключено, что полученные меры представляют собой обобщение классических поверхностных мер. Представляется целесообразным обобщение данного подхода на случай поверхностей конечной коразмерности в бесконечномерных пространствах.

ВВЕДЕНИЕ

Первой работой, в которой было начато исследование поверхностных мер в бесконечномерном пространстве, является классическая работа А.В. Скорохода «Интегрирование в гильбертовом пространстве», 1975г. [1]. Этой тематике так же посвящен большой цикл работ А.В. Угланова (в частности, [2]), который разработал построение поверхностных мер на поверхностях конечной коразмерности в бесконечномерных пространствах. Однако этот подход оказался технически слишком сложный.

В данной работе предложено построение поверхностного интеграла по поверхности произвольной коразмерности в R^n методом, отличным от классического, как первый шаг к решению описанной проблемы.

КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Рассмотрим обобщение классического подхода ([3], с. 250) к построению поверхностного интеграла в R^3 на поверхности произвольной коразмерности в R^n.

Пусть гладкая поверхность задана параметрически:

$$S = \left\{ r(u^1, u^2, .. u^{n-m}) \middle| (u^1, u^2, \ldots, u^{n-m}) \in D \subset R^{n-m} \right\},$$

где

$$D \text{ — квадрируемая, } r \in C^1(D),$$

$$\text{ранг } r'(\cdot) \equiv n - m.$$

Рассмотрим разбиение T_h пространства R^{n-m} на $n-m$-мерные кубы со стороной h. Поскольку из квадрируемости области следует ее ограниченность, то замкнутая область $\overline{D}$ окажется покрыта конечным количеством таких кубов. Пронумеруем все непустые пересечения этих кубов с замкнутой областью $\overline{D}$ и обозначим их как E_i, $i=1,2,\ldots,i_0$. Тогда:

$$\tau=\{E_i : E_i = Q\bigcap\overline{D},\ Q\in T_h\}.$$

Образует покрытие замкнутой области $\overline{D}$.

Рассмотрим множества E_i — полные замкнутые кубы, которые принадлежат области D. Совокупность всех таких множеств обозначим как $\tau(\partial D)$. Пусть P_i — одна из его вершин. Тогда при переходе от вершины P_i к соседним вершинам радиус-вектор $r(u^1,u^2,\ldots,u^{n-m})$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем h, изменится на $r_i h$, где $r_i=\dfrac{\partial r}{\partial u^i}$, поскольку:

$$r(u^1,u^2,\ldots,u^i+h,..u^{n-m})-r(u^1,u^2\ldots,u^i\ldots,u^{n-m})=r_i h+o(h).$$

При определении площади поверхности будем заменять образы квадратов $E_i\in\tau(\partial D)$ на прямолинейные параллелепипеды, которые построены на векторах $r_i h$. Найдем его объем. Обозначим его как $\Delta\sigma_i$:

$$\Delta\sigma_i=\sqrt{\Gamma(r_1 h,r_2 h,\ldots,r_{n-m}h)}_{P_i}=\sqrt{\Gamma(r_1,r_2,\ldots,r_{n-m})}_{P_i}h^{n-m}=$$

$$=\sqrt{\Gamma(r_1,r_2,\ldots,r_{n-m})}_{P_i}\mu E_i,$$

так как известно, что объем параллелепипеда, натянутого на вектора $v_1,\ldots,v_k$, равен

$$\sqrt{\Gamma(v_1,v_2,\ldots,v_k)},$$

где

$$\Gamma(v_1,v_2,..v_k)=\begin{vmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_k\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_k,v_1\rangle & \cdots & \langle v_k,v_k\rangle\end{vmatrix} \text{— граммиан.}$$

Функции r_i непрерывны на замкнутой квадрируемой области $\overline{D}$, а потому

$$\lim_{h\to 0}\sum_{E_i\in r\,(\partial D)}\Delta\sigma_i=\int_D\sqrt{\Gamma(r_1,r_2 v_1,v_2,\ldots,v_k r_{n-m})}\,du.$$

Этот предел и будем называть площадью поверхности $\sigma(S)$. Соответственно, поверхностный интеграл определяется следующим образом:

$$\int_S g(x)dx=\int_D g(r(u))\sqrt{\Gamma(r_1(u),r_2(u),\ldots,r_{n-m}(u))}\,du. \tag{1}$$

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ПОДХОД

Рассмотрим альтернативный подход к построению поверхностного интеграла. Идея данного подхода предложена Богданским Ю.В. [4].

Гладкая поверхность, как и в классическом подходе, задана параметрически:

$$S = \left\{ r(u^1, u^2, \ldots, u^{n-m}) \middle| (u^1, u^2, \ldots, u^{n-m}) \in D \subset R^{n-m} \right\},$$

где

$$r \in C^1(D),$$

$$\text{ранг } r'(\cdot) \equiv n - m.$$

Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — коммутирующие гладкие векторные поля в R^n, трансверсальные к S.

Определение. Назовем поверхностным интегралом функции $g(x)$ вдоль векторных полей $X_1, \ldots, X_m$ по поверхности S следующий предел:

$$\int_S g(x) d\widetilde{\sigma}_X \overset{\Delta}{=} \lim_{T \to 0} \frac{\int_{F_T} g(x) dx}{T_1, \ldots, T_m},$$

где

$$T = (T_1, \ldots, T_m); \ F_T \overset{\Delta}{=} \bigcup_{t_i \in [0;T]} \Phi^1_{t_1} \ldots \Phi^m_{t_m} S;$$

$$\Phi^i_t \text{ — векторный поток поля } X_i.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $g(x) \in C(S_\varepsilon)$, где S_ε — ε-окрестность S. Тогда:

$$\int_S g(x) d\widetilde{\sigma}_X = \int_D g(r(u)) \sqrt{\Gamma\big(X_1(r(u)), \ldots, X_m(r(u)), r_1(u), \ldots, r_{n-m}(u)\big)} du, \quad (*)$$

где $r_i = \dfrac{\partial r}{\partial u^i}$.

Доказательство. Обозначив

$$t \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}, \ \Phi(t, x) \overset{\Delta}{=} \Phi^1_{t_1} \ldots \Phi^m_{t_m} x,$$

имеем:

$$\int_{F_T} g dx = \int_{[0;T_1] \times \ldots \times [0;T_m] \times D} g(\Phi(t, r(u))) \left| \frac{D(x^1, \ldots, x^n)}{D(t_1, \ldots, t_m, u^1, \ldots, u^{n-m})} \right| d\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} =$$

$$= \int_D du \int_{[0;T_1] \times \ldots \times [0;T_m]} dt\, g(\Phi(t, r(u))) \left| \det(\Phi'_{t_1}(t, r(u)), \ldots \right.$$

$$\ldots,\Phi'_{t_m}(t,r(u)),\Phi'_{u^1}(t,r(u)),\ldots,\Phi'_{u^{n-m}}(t,r(u)))\Big| =$$

(теорема о среднем)

$$= T_1\cdot\ldots\cdot T_m\int\limits_D g(\Phi(\Theta,r(u)))\Big|\det(\Phi'_{t_1}(\Theta,r(u)),\ldots$$

$$\ldots,\Phi'_{t_m}(\Theta,r(u)),\Phi'_{u^1}(\Theta,r(u)),\ldots,\Phi'_{u^{n-m}}(\Theta,r(u)))\Big| du,$$

где

$$\Theta=\Theta(T_1,\ldots,T_m,u^1,\ldots,u^{n-m})\in[0;T_1]\times\ldots\times[0;T_m],$$

тогда

$$\frac{\int\limits_{F_T} g(x)dx}{T_1\cdot\ldots\cdot T_m}=\int\limits_D g(\Phi(\Theta,r(u)))\Big|\det(\Phi'_{t_1}(\Theta,r(u)),\ldots,\Phi'_{t_m}(\Theta,r(u)),\Phi'_{u^1}(\Theta,r(u)),\ldots$$

$$\ldots,\Phi'_{u^{n-m}}(\Theta,r(u)))\Big| du\xrightarrow{T\to 0}\int\limits_D g(r(u))\Big|\det(\Phi'_{t_1}(0,r(u)),\ldots$$

$$\ldots,\Phi'_{t_m}(0,r(u)),\Phi'_{u^1}(0,r(u)),\ldots,\Phi'_{u^{n-m}}(0,r(u)))\Big| du.$$

Как известно, потоки коммутирующих векторных полей коммутируют ([5], с. 36):

$$\forall i,j\in\{1,\ldots,m\};\ t_1,t_2\in R;\ x\in R^n:\Phi^i_{t_1}\Phi^j_{t_2}x=\Phi^j_{t_2}\Phi^i_{t_1}x.$$

Следовательно, справедливы следующие равенства:

$$\Phi(0,r(u))=r(u),$$

$$\Phi'_{t_i}(0,r(u))=\frac{\partial}{\partial t_i}\Phi^i_{t_i}\Phi^1_{t_1}\ldots\Phi^{i-1}_{t_{i-1}}\Phi^{i+1}_{t_{i+1}}\ldots\Phi^m_{t_m}r(u)\Bigg|_{t=0}=X_i(r(u)).$$

Учитывая эти равенства, имеем:

$$\det(\Phi'_{t_1}(0,r(u)),\ldots,\Phi'_{t_m}(0,r(u)),\Phi'_{u^1}(0,r(u)),\ldots,\Phi'_{u^{n-m}}(0,r(u)))=$$

$$=\det(X_1,\ldots,X_m,r_1,\ldots,r_{n-m}),$$

где

$$X_i=X_i(r(u)),\ r_i=r_i(u).$$

Обозначим $A=(X_1,\ldots,X_m,r_1,\ldots,r_{n-m})$. Тогда:

$$A^*A=\begin{pmatrix}\langle X_1,X_1\rangle & \cdots & \langle X_m,X_1\rangle & \langle r_1,X_1\rangle & \cdots & \langle r_n,X_1\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle X_1,X_m\rangle & \cdots & \langle X_m,X_m\rangle & \langle r_1,X_m\rangle & \cdots & \langle r_n,X_m\rangle\\ \langle X_1,r_1\rangle & \cdots & \langle X_m,r_1\rangle & \langle r_1,r_1\rangle & \cdots & \langle r_{n-m},r_1\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle X_1,r_n\rangle & \cdots & \langle X_m,r_n\rangle & \langle r_1,r_{n-m}\rangle & \cdots & \langle r_{n-m},r_{n-m}\rangle\end{pmatrix},$$

а потому:

$$\left|\det(A)\right|^2 = \det(A^* A) = \Gamma(X_1, \ldots, X_m, r_1, \ldots, r_{n-m}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\det(\Phi'_{t_1}(0,r), \ldots, \Phi'_{t_m}(0,r), \Phi'_{u^1}(0,r), \ldots, \Phi'_{u^{n-m}}(0,r))\right| =$$

$$= \left|\det(A)\right| = \sqrt{\Gamma(X_1, \ldots, X_m, r_1, \ldots, r_{n-m})}.$$

То есть, справедлива формула (*).

Теорема доказана.

Если добавить требование *нормальности* полей $X_1, \ldots, X_m$ по отношению к поверхности S, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если, помимо требований теоремы 1, выполняется условие *нормальности* полей $X_1, \ldots, X_m$ по отношению к поверхности S, тогда:

$$\int_S g(x)d\widetilde{\sigma}_X = \int_D g(r(u))\sqrt{\Gamma(X_1(r(u)), \ldots, X_m(r(u)))}\sqrt{\Gamma(r_1(u), \ldots, r_{n-m}(u))}du, \quad (**)$$

где

$$r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}.$$

Доказательство.

Согласно теореме 1, имеет место формула (*). Рассмотрим кривую $\alpha_i(s) = r(u^1, \ldots, u^{i-1}, s, u^{i+1}, \ldots, u^{n-m}) \in S$:

$$\left.\frac{d}{ds}\alpha_i(s)\right|_{s=u^i} = r_i(u) \text{ — касательный к } S \text{ вектор,}$$

а значит, поскольку $X_j(r(u))$ — нормаль, то:

$$\langle r_i, X_j \rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\Gamma\big(X_1(r(u)), \ldots, X_m(r(u)), r_1(u), \ldots, r_{n-m}(u)\big) =$$

$$= \begin{vmatrix} \langle X_1, X_1 \rangle & \cdots & \langle X_m, X_1 \rangle & \langle r_1, X_1 \rangle & \cdots & \langle r_n, X_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X_1, X_m \rangle & \cdots & \langle X_m, X_m \rangle & \langle r_1, X_m \rangle & \cdots & \langle r_n, X_m \rangle \\ \langle X_1, r_1 \rangle & \cdots & \langle X_m, r_1 \rangle & \langle r_1, r_1 \rangle & \cdots & \langle r_{n-m}, r_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X_1, r_n \rangle & \cdots & \langle X_m, r_n \rangle & \langle r_1, r_{n-m} \rangle & \cdots & \langle r_{n-m}, r_{n-m} \rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{matrix} \langle X_1, X_1 \rangle & \cdots & \langle X_m, X_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X_1, X_m \rangle & \cdots & \langle X_m, X_m \rangle \end{matrix} & 0_{m\times(n-m)} \\ 0_{(n-m)\times m} & \begin{matrix} \langle r_1, r_1 \rangle & \cdots & \langle r_{n-m}, r_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle r_1, r_{n-m} \rangle & \cdots & \langle r_{n-m}, r_{n-m} \rangle \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \Gamma(X_1, \ldots, X_m) \cdot \Gamma(r_1, \ldots, r_{n-m}).$$

Итак, справедлива формула (**). Теорема доказана.

Если, к тому же, выполняется условие *ортонормированности полей* $X_1, \ldots, X_m$ на поверхности S:

1. $\forall x \in S : \| X_i(x) \| = 1$

2. $\forall x \in S,\ i \neq j : \left\langle X_i(x), X_j(x) \right\rangle = 0$,

то справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если, помимо требований теоремы 2, выполняется условие *ортонормированности полей* $X_1, \ldots, X_m$ на поверхности S, тогда

$$\int_S g(x) d\tilde{\sigma}_X = \int_D g\big(r(u)\big) \sqrt{\Gamma\big(r_1(u), \ldots, r_{n-m}(u)\big)} du .$$

Доказательство.

Согласно теореме 2, имеет место формула (**).

Однако, учитывая ортонормированность полей $X_1, \ldots, X_m$ на поверхности S, имеем:

$$\left\langle X_i(r(u)), X_j(r(u)) \right\rangle = \delta_{ij}.$$

Следовательно

$$\Gamma\big(X_1(r(u)), \ldots, X_m(r(u))\big) = \begin{vmatrix} \langle X_1, X_1 \rangle & \cdots & \langle X_m, X_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X_1, X_m \rangle & \cdots & \langle X_m, X_m \rangle \end{vmatrix} = \det(I_{m \times m}) = 1,$$

а потому

$$\int_S g(x) d\tilde{\sigma}_X = \int_D g(r(u)) \sqrt{\Gamma(r_1(u), \ldots, r_{n-m}(u))} du.$$

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учитывая формулу (1) и теоремы 1–3, можно сформулировать следующие следствия.

Следствие 1. Если выполняются условия теоремы 1, тогда:

$$\tilde{\sigma}_X \prec \sigma$$

и

$$\frac{d\tilde{\sigma}_X}{d\sigma} = \frac{\sqrt{\Gamma\big(X_1(r(u)), \ldots, X_m(r(u)), r_1(u), \ldots, r_{n-m}(u)\big)}}{\sqrt{\Gamma(r_1(u), \ldots, r_{n-m}(u))}} .$$

Следствие 2. Если выполняется условие *нормальности* полей $X_1, \ldots, X_m$ по отношению к поверхности S, тогда

$$\tilde{\sigma}_X \prec \sigma$$

и

$$\frac{d\tilde{\sigma}_X}{d\sigma} = \sqrt{\Gamma(X_1(r(u)), \ldots, X_m(r(u)))}.$$

Следствие 3. Если, помимо условий следствия 2, выполняется условие *ортонормированности полей* $X_1, \ldots, X_m$ на поверхности S, тогда

$$\widetilde{\sigma}_X \equiv \sigma.$$

ВЫВОДЫ

Как видно из следствий 1–3, приведенный альтернативный подход к построению поверхностного интеграла в конечномерном пространстве на основании векторных полей согласуется с классическим подходом, а, следовательно, имеет смысл рассматривать его обобщение на случай поверхностей конечной коразмерности в бесконечномерных пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скороход А.В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1975. — 232 с.
2. *Угланов А.В.* Поверхностные интегралы в пространствах Фреше // Мат. сборник. — 1998. — **189**, № 11. — С. 139–157.
3. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа (в двух томах) // Учебник для студентов университетов и вузов. — М.: Высшая школа, 1981. — Т. II. — 584 с.
4. *Богданский Ю.В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса-Остроградского // Український математичний журнал, 2012. — **64**, № 10. — С. 1299–1313.
5. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971. — 343 с.

Поступила 12.03.2013

Статья опубликована под редакцией автора.