

---

# ФІЗИЧНІ, ХІМІЧНІ ТА ІНШІ ЯВИЩА, НА ОСНОВІ ЯКИХ МОЖУТЬ БУТИ СТВОРЕНІ СЕНСОРИ

---

## PHYSICAL, CHEMICAL AND OTHER PHENOMENA, AS THE BASES OF SENSORS

---

---

PACS numbers: 72. 10. -d, 72. 20. Dp, 72. 20. Fr, 72. 90. +y, 73. 63. -b  
DOI 10.18524/1815-7459.2016.4.86639

### УРАХУВАННЯ РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОНІВ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ МОДЕЛІ ЛАНДАУЕРА – ДАТТА – ЛУНДСТРОМА

*Ю. О. Кругляк, М. В. Стріха\**

Одеський державний екологічний університет,  
факультет комп'ютерних наук,  
вул. Львівська, 15, Одеса, Україна

тел. (067) 725 2209, *E-mail: quantumnet@yandex.ua*

\* Київський національний університет ім. Т. Шевченка,  
факультет радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем,  
пр. Глушкова, 4г, Київ, Україна, тел. (044) 526 0532;

Інститут фізики напівпровідників ім. В. Є. Лашкарьова НАН України,  
пр. Науки, 41, Київ, Україна, тел. (044) 525 6033,  
*E-mail: maksym\_strikha@hotmail.com*

### УРАХУВАННЯ РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОНІВ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ МОДЕЛІ ЛАНДАУЕРА – ДАТТА – ЛУНДСТРОМА

*Ю. О. Кругляк, М. В. Стріха*

**Анотація.** У методичній статті, розрахованій на науковців, викладачів та студентів вищої школи, з позицій концепції «знизу – вгору» узагальненої транспортної моделі Ландауера – Датта – Лундстрома (ЛДЛ) показано: при описі транспорту електронів у провіднику в дифузійному режимі важливу роль відіграє середня довжина вільного пробігу  $\lambda$ , яка визначає коефіцієнт проходження  $T$ . На прикладі 1D провідника виводиться базове співвідношення між  $T$  і  $\lambda$ . Встановлюється зв'язок між  $\lambda$  і часом  $\tau_m$  релаксації імпульсу для провідників різної вимірності. Наводиться методика оцінки усередненого значення довжини вільного пробігу з експеримен-

тальних даних через коефіцієнт дифузії і встановлюється зв'язок довжини вільного пробігу з рухливістю. Як приклад аналізуються експериментальні дані для польового транзистора Si MOSFET в різних наближеннях.

**Ключові слова:** нанофізика, наноелектроніка, розсіяння електронів, розсіяння фононів, коефіцієнт проходження, довжина вільного пробігу, коефіцієнт дифузії, рухливість, Si MOSFET

## CONSIDERATION FOR ELECTRONS SCATTERING IN GENERALIZED LANDAUER – DATTA – LUNDSTROM MODEL

*Yu. A. Kruglyak, M. V. Strikha*

**Abstract.** In a tutorial article directed to serve researchers, university teachers and students, from the positions of generalized Landauer – Datta – Lundstrom (LDL) model we demonstrate that the average mean free path  $\lambda$ , which determines the transmission coefficient  $T$ , plays an important role in description of transport of electrons through a conductor in a diffusion regime. The basic correlation between  $T$  and  $\lambda$  is obtained for 1D resistor as the most simple example. A connection is established between  $\lambda$  and a time  $\tau_m$  of momentum relaxation for conductors of different dimensions. We get estimation for the averaged values for the mean free path  $\lambda$  from experimental measurements using the diffusion coefficient and the correlation between the mean free path and mobility is established. As an example, the experimental data for Si MOSFET in different approximations are analyzed.

**Keywords:** nanophysics, nanoelectronics, electron scattering, phonon scattering, transmission coefficient, mean free path, diffusion coefficient, mobility, Si MOSFET

## УЧЕТ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ТРАНСПОРТНОЙ МОДЕЛИ ЛАНДАУЭРА – ДАТТА – ЛУНДСТРОМА

*Ю. А. Кругляк, М. В. Стриха*

**Аннотация.** В методической статье, рассчитанной на исследователей, преподавателей, студентов высшей школы с позиций концепции «снизу – вверх» транспортной модели Ландауэра – Датты – Лундстрорма (ЛДЛ) показано, что при описании транспорта электронов по проводнику в диффузионном режиме важную роль играет средняя длина свободного обратного рассеяния  $\lambda$ , которая определяет коэффициент прохождения  $T$ . На примере 1D проводника выводится базовое соотношение между коэффициентом прохождения  $T$  и средней длиной свободного пробега  $\lambda$ . Устанавливается связь между  $\lambda$  и временем релаксации импульса  $\tau_m$  для проводников разной размерности. Дается оценка усредненного значения длины свободного пробега из экспериментальных измерений через коэффициент диффузии и устанавливается связь длины свободного пробега с подвижностью. В качестве примера анализируются экспериментальные данные для полевого транзистора Si MOSFET в разных приближениях.

**Ключевые слова:** нанофизика, наноелектроника, рассеяние электронов, рассеяние фононов, коэффициент прохождения, длина свободного пробега, коэффициент диффузии, подвижность, Si MOSFET

## 1. Вступ

Продовжуючи знайомити вітчизняних викладачів, аспірантів і студентів, які читають курси або навчаються на різних спеціалізаціях фізичного й інженерного профілю, із сучасною концепцією викладання фізики наносистем, автором якої є проф. Супрійо Датта (Supriyo Datta), до певної міри альтернативною традиційній, що відштовхується від розгляду аналогічних явищ у великих об'ємних провідниках, ми розглянули в [1] модель Ландауера – Датта – Лундстрома (ЛДЛ), яка вже знайшла широке застосування при аналізі як електронного, так і фононного транспорту не тільки в режимі лінійного відгуку, але й у високовольтному режимі гарячих електронів, для нелокального і квантового транспорту, транспорту в неупорядкованих і наноструктурованих матеріалах, у резисторах як нанорозмірних, так і довгих чи об'ємних.

При цьому розгляд у [1] здійснювався для випадку, коли температура контактів резистора однакова. У [2] натомість ми розглянули термоелектричні ефекти Зеєбека і Пельть'є в моделі ЛДЛ, а також якісно обговорили закон Відемана – Франца й основні рівняння термоелектрики з відповідними транспортними коефіцієнтами. Потому в [3] ми отримали доведення для результатів, постульованих у [2], причому зробили це для 1D, 2D и 3D провідників з довільним законом дисперсії і будь-яким режимом провідності: балістичним, дифузійним, або ж перехідним.

З позицій транспортної моделі ЛДЛ у [4] побудовано узагальнену модель переносу тепла фононами. Аналогічно до фермівського вікна електронної провідності було введено поняття бозевського вікна фононної провідності, й через нього виведено загальний вираз для ґраткової теплопровідності, в якому з самого початку фігурує квант теплопровідності. Було проаналізовано подібність і відмінності в побудові теорії електронної провідності і теорії теплопровідності. Нарешті, в [5] ми розглянули, як узагальнена транспортна модель ЛДЛ описує провідність графену.

Як ми відзначали в попередніх статтях, при описі транспорту електронів у дифузійному режимі у моделі ЛДЛ [1 – 7] важливу роль віді-

грає середня довжина вільного пробігу щодо розсіювання назад (mean-free-pass for backscattering)  $\lambda$ , яка визначає коефіцієнт проходження

$$T(E) = \frac{\lambda(E)}{\lambda(E) + L}, \quad (1)$$

де  $L$  – довжина провідника.

Зазвичай під  $\lambda$  розуміють середню відстань між актами розсіювання. Однак у підході Ландауера [5, 6] величина  $\lambda$  має особливий зміст: це довжина, на якій коефіцієнт проходження (1) зменшується вдвічі. Пізніше ми побачимо, що ця довжина пропорційна звичайній довжині вільного пробігу  $\Lambda$ ,

$$\lambda(E) \propto \Lambda(E) = v(E)\tau(E), \quad (2)$$

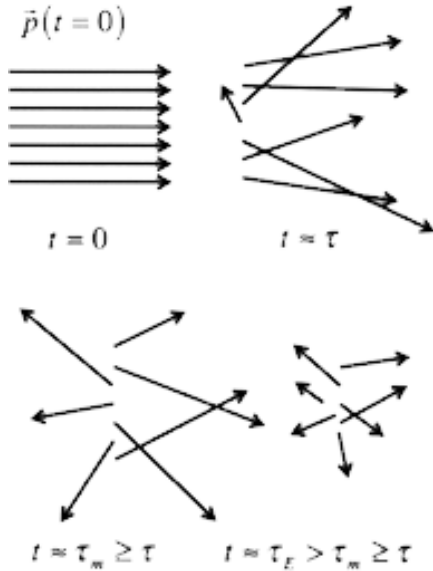
де в правій частині середня швидкість визначається зонною структурою резистора, а середній час розсіювання – фізикою процесів розсіювання носіїв. Надалі ми проаналізуємо, як саме ці швидкість і час визначають величину  $\lambda$ , і почнімо саме з часу розсіювання  $\tau(E)$ .

## 2. Огляд фізики розсіювання електронів (якісні аспекти)

Нехай ансамбль електронів з енергією  $E$  впорскується в провідник у момент часу  $t = 0$  (рис. 1). Початкові їхні імпульси однакової й однаково скеровані.

Протягом часу  $t \approx \tau(E)$  електрони зазнають у середньому по одному зіткненню. В залежності від фізики процесів розсіювання, напрями імпульсів електронів (зображені напрямками стрілок на рис. 1) зміняться, а їхня енергія може або збільшитися, або зменшитися (довжини стрілок на рис. 1). Якщо розсіювання анізотропне й відхиляє електрони лише на невеликий кут, то одного акту розсіювання для перетворення сумарного імпульсу ансамблю електронів на нуль не досить. Це відбудеться лише впродовж довшого часу  $t \approx \tau_m(E) \geq \tau(E)$ . Однак, якщо домінує пружний механізм розсіювання електронів, то енергія ансамблю електронів і тоді ще не релаксує до свого рівноважного значення. Це відбудеться ще впродовж певного часу  $t \approx \tau_E(E) \gg \tau_m(E), \tau(E)$ . Рис. 1 наочно ілюструє наявність трьох характеристичних

часів розсіяння: 1) середній час між двома послідовними актами розсіяння  $\tau(E)$ ; 2) час релаксації імпульсу  $\tau_m(E)$ ; 3) час релаксації енергії  $\tau_E(E)$ . В загальному випадку  $\tau_m(E) \geq \tau(E)$  і  $\tau_E(E) \gg \tau_m(E), \tau(E)$ .



**Рис. 1.** Якісна візуалізація процесу розсіяння електронів. У момент часу  $t = 0$  електрони з однаковими імпульсами впорскуються в провідник. Ці електрони зазнають у середньому одного зіткнення протягом часу  $t \approx \tau(E)$ . Сумарний імпульс ансамблю електронів робиться рівним нулеві протягом часу  $t \approx \tau_m(E) \geq \tau(E)$ , а енергія набуває рівноважного значення протягом часу  $t \approx \tau_E(E) > \tau_m(E) \geq \tau(E)$  [7].

Звернімо увагу на те, що і для транспорту заряду, і для транспорту тепла має значення час релаксації імпульсу: зміна напрямку руху відразу ж «виводить» частинку-носія (електрон або фонон) з потоку. Натомість час релаксації енергії впливає переважно на процеси транспорту тепла (втрата носієм енергії означає зменшення теплового потоку, але, навіть втративши енергію, але не змінивши суттєво імпульс, електрон і далі переноситиме електричний заряд, і таке розсіяння не впливатиме на величину струму). Тому почнімо наш розгляд з того, яким чином час релаксації імпульсу залежить від фізики розсіяння.

Фундаментальним поняттям у теорії розсіяння є матриця розсіяння  $S(\vec{p} \rightarrow \vec{p}')$ , яка переводить систему частинок з початкового стану  $\vec{p}$  у кінцевий стан  $\vec{p}'$ .

Швидкість розсіяння, або ж ймовірність розсіяння за одиницю часу, обернено пропорційна усередненому часові між двома послідовними зіткненнями. Її можна одержати, підсумувавши матрицю розсіяння за всіма можливими (в силу необхідності одночасного виконання в акті розсіяння законів збереження енергії та імпульсу) кінцевими станами:

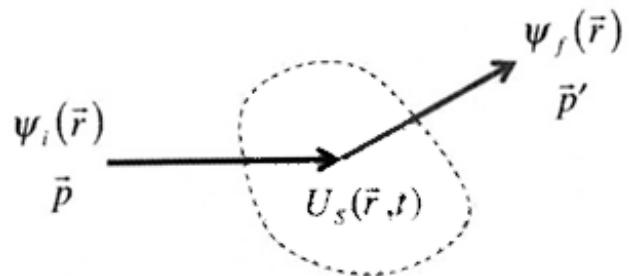
$$\frac{1}{\tau(\vec{p})} = \sum_{\vec{p}'} S(\vec{p} \rightarrow \vec{p}'). \quad (3)$$

У припущенні, що електрони інjektуються в провідник з початковим імпульсом, скерованим уздовж осі  $z$ , для швидкості релаксації імпульсу, за аналогією до (3), маємо (див. напр. [8 – 10]):

$$\frac{1}{\tau_m(\vec{p})} = \sum_{\vec{p}'} S(\vec{p} \rightarrow \vec{p}') \frac{\Delta p_z}{p_z}. \quad (4)$$

Аналогічним чином можемо записати й швидкість релаксації енергії.

Час релаксації імпульсу можна розрахувати зі швидкості переходу, техніка обчислення якої докладно описана в [10]. Тут ми викладемо її загальні моменти. Розглянемо акт розсіяння докладніше (рис. 2).



**Рис. 2.** Перехід електрона з початкового стану в кінцевий в результаті акту розсіяння на потенціалі  $U_s(\vec{r}, t)$ .

Нехай електрон з імпульсом  $\vec{p} = \hbar k$ , що описується хвильовою функцією  $\psi_i(\vec{r})$ , виявився в області дії потенціалу розсіяння  $U_s(\vec{r}, t)$ , який може бути як статичним (розсіяння на різноманітних домішках і дефектах кристалічної ґратки), так і динамічним (розсіяння на фонанах). Внаслідок розсіяння імпульс електрона змінюється й робиться рівним  $\vec{p}'$ , а його хвильова функція при цьому стає  $\psi_f(\vec{r})$ . Потрібно розрахувати ймовірність (протягом

одиниці часу)  $S(\vec{p} \rightarrow \vec{p}')$  переходу електрона з початкового стану  $\vec{p}$  в кінцевий  $\vec{p}'$ .

В першому порядку теорії збурень

$$S(\vec{p} \rightarrow \vec{p}') = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{p',p}|^2 \delta(E' - E - \Delta E), \quad (5)$$

де матричний елемент переходу

$$|H_{p',p}|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_f^*(\vec{r}) U_s(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Вираз (5) відомий у квантовій теорії як золоте правило Фермі – Дірака [11, 12]. У цьому виразі  $\delta$ -функція відповідає за виконання закону збереження енергії. У випадку статичного потенціалу розсіяння (наприклад, на далекодіяльному кулонівському потенціалі зарядженої домішки) релаксації енергії не відбувається ( $\Delta E = 0$ ), акт розсіяння є пружним. Натомість для періодичного потенціалу з характерною частотою  $\omega$  (коливання ґратки)  $\Delta E = \pm \hbar\omega$ , що відповідає випроміненню, або ж поглинанню фонуна.

У будь-якому разі слід спершу знати потенціал розсіяння, далі обчислити (5) і вже з нього – характерний час (3) або (4). Пізніше ми покажемо, як, знаючи час релаксації імпульсу, можна обчислити середню довжину вільного пробігу щодо розсіяння назад.

Деякі прості потенціали розсіяння, як-от короткодійний  $\delta$ -потенціал глибокого домішкового центру чи структурного дефекту в кристалі, а також потенціали розсіяння на акустичних та оптичних фонунах в неполярних матеріалах просто рівномірно відхиляють носії струму. В таких випадках можна очікувати, що швидкість розсіяння буде пропорційна густині кінцевих станів. При пружному розсіянні  $1/\tau(E) \propto D(E)$ , при розсіянні з поглинанням фонуна  $1/\tau(E) \propto D(E + \hbar\omega)$ , а з емісією фонуна  $1/\tau(E) \propto D(E - \hbar\omega)$ . Оскільки для електронів провідності густина станів зазвичай зростає зі збільшенням їх енергії, слід очікувати зменшення часу розсіяння зі збільшенням енергії або температури носіїв.

Ситуація з розсіянням на заряджених домішках, або на фонунах у полярних кристалах інша. Випадково розташовані заряди створюють флукутації енергії дна зони провідності

$E_c(\vec{r})$ , на яких можуть розсіюватися і електрони, і фонуни (рис. 3).

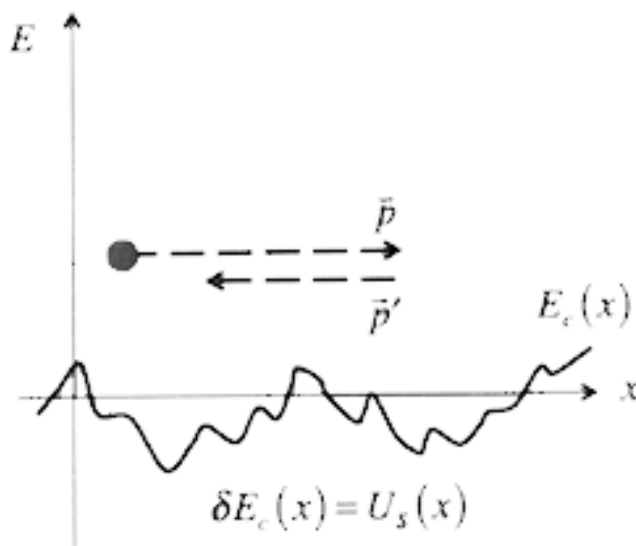


Рис. 3. Флукутації потенціалу, створені випадково розташованими зарядами.

Високоенергетичні електрони менш чутливі до таких флукутацій порівняно з низькоенергетичними електронами, тож у випадку розсіяння на заряджених домішках (і на полярних фонунах) час розсіяння носіїв  $\tau(E)$  зростатиме з енергією, а швидкість розсіяння  $1/\tau(E)$  – зменшуватиметься.

Для більшості актуальних механізмів розсіяння час розсіяння можна добре апроксимувати формулою вигляду

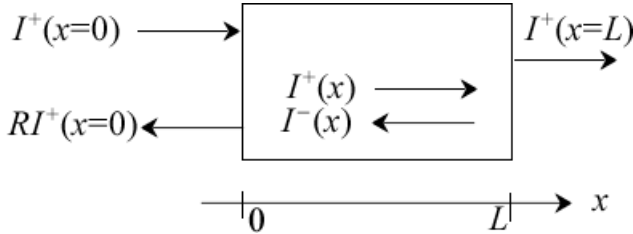
$$\tau(E) = \tau_0 \left( \frac{E - E_c}{kT} \right)^s, \quad (6)$$

де показник степені різний для різних механізмів розсіяння. Так, для розсіяння на акустичних фонунах в 3D провідниках з параболічним законом дисперсії  $s = -1/2$ , а для розсіяння на іонізованих домішках у таких самих провідниках  $s = +3/2$  [10].

### 3. Коефіцієнт проходження й середня довжина вільного пробігу

Можна очікувати, що довжина вільного пробігу буде пропорційна добутковій швидкості носія й часу розсіяння. Вище ми показали, які фактори можуть впливати на час розсіяння. За-

раз натомість дослідимо, яким чином пов'язані між собою довжина вільного пробігу й коефіцієнт проходження. Цей зв'язок найпростіше проілюструвати на прикладі електронного транспорту в 1D провіднику в дифузійному режимі (рис. 4).



**Рис. 4. Взаємозв'язок між коефіцієнтом проходження й середньою довжиною вільного пробігу на прикладі однорідного 1D провідника.**

Розгляньмо однорідний 1D провідник в дифузійному режимі. Лівий контакт інжектує електрони, які зумовлюють струм  $I^+(x=0)$ . Частка електронів  $T$  увійде в правий контакт, зумовлюючи струм  $I^+(x=L) = T I^+(x=0)$ . Решта електронів повернеться на лівий контакт (розсіяння назад), зумовивши струм  $I^-(x=0) = R I^+(x=0)$ . За відсутності процесів рекомбінації  $T + R = 1$ . Вважаємо також, що правий контакт ідеальний і поглинає все електрони, які до нього доходять. Результуючий струм, очевидно, становитиме  $I = (1 - R)I^+(0) = T I^+(0)$ . Отже, в провіднику наявні прямі й обернені потоки електронів, і нам потрібно описати їхній просторовий розподіл.

Визначмо обернене значення середньої довжини вільного пробігу  $1/\lambda$  як ймовірність (на одиницю довжини) перетворення прямого потоку електронів на обернений і навпаки. Саме виходячи з такого визначення, величину  $\lambda$  й називають середньою довжиною вільного пробігу щодо розсіяння назад (mean-free-pass for backscattering), або ж просто середньою довжиною вільного пробігу. В дифузійному режимі провідності певна частина прямого потоку внаслідок розсіяння назад перетворюється на обернений. А певна частина сформованого оберненого потоку внаслідок розсіяння назад знову перетворюється на прямий. Тому градієнт прямого струму визначатиметься двома доданками:

$$\frac{dI^+(x)}{dx} = -\frac{I^+(x)}{\lambda} + \frac{I^-(x)}{\lambda}. \quad (7)$$

Якщо знехтувати процесами рекомбінації, то результуючий струм

$$I = I^+(x) - I^-(x) \quad (8)$$

є сталою величиною, тож градієнт струму

$$\frac{dI^+(x)}{dx} = -\frac{I}{\lambda} \quad (9)$$

є константою. Іншими словами, струм спадає лінійно вздовж провідника:

$$I^+(x) = I^+(0) - \frac{I}{\lambda} x. \quad (10)$$

Використаємо отриманий вираз для обчислення струму, яких входить до правого контакту:

$$\begin{aligned} I^+(L) &= I^+(0) - \frac{I}{\lambda} L = I^+(0) - \left[ I^+(L) - I^-(L) \right] \frac{L}{\lambda} = \\ &= I^+(0) - I^+(L) \frac{L}{\lambda}, \end{aligned} \quad (11)$$

де ми скористалися з рівняння балансу (8) і з того, що правий контакт ідеальний ( $I^-(L) = 0$ ). З виразу (12) одержуємо

$$I^+(L) = \frac{\lambda}{\lambda + L} I^+(0) = T I^+(0). \quad (12)$$

Якщо провести аналогічні міркування для впорскування електронів правим контактом, то одержимо аналогічний вираз для електронів, які входять у лівий контакт, а саме:  $I^-(0) = T' I^-(L)$ . Для однорідного провідника  $T' = T$ . Провідник під напругою вже не є однорідним, але нас цікавить режим лінійного відгуку з невеликим відхиленням функцій розподілу від рівноважного значення [1], тож цілком припустимо покласти  $T' \approx T$ . Остаточню, в припущенні незалежності одна від одної мод провідності, одержимо шуканий вираз (1), який пов'язує коефіцієнт проходження з середньою довжиною вільного пробігу:

$$T(E) = \frac{\lambda(E)}{\lambda(E) + L}.$$

Цей вираз виведено в рамках простої моделі, що, однак, не заважає його успішному й широ-

кому застосуванню на практиці. Важливим моментом проведених міркувань є інтерпретація  $1/\lambda$  як імовірності (на одиницю довжини) зміни напрямку потоку частинок внаслідок розсіювання.

#### 4. Середня довжина вільного пробігу й час релаксації імпульсу

Встановимо зв'язок між  $\lambda$  і часом релаксації імпульсу  $\tau_m$ . Нехай електрон зазнає акту розсіювання в ізотропному 1D провіднику. Він має дві можливості: розсіятися вперед і розсіятися назад. Але тільки розсіювання назад суттєве для визначення середньої довжини вільного пробігу. Звідси випливає, що середня довжина вільного пробігу щодо розсіювання назад дорівнює подвоєному значенню звичайної середньої довжини вільного пробігу:

$$\lambda_{1D}(E) = 2\Lambda(E) = 2v(E)\tau_m(E).$$

Для провідника довільної вимірності середня довжина вільного пробігу щодо розсіювання назад визначається виразом [13]

$$\lambda(E) = 2 \frac{\langle v_x^2 \tau_m \rangle}{\langle |v_x| \rangle},$$

де усереднення для 2D і 3D провідників проводиться за кутами. Для ізотропних провідників

$$\lambda_{2D}(E) = \frac{\pi}{2} v(E) \tau_m(E), \quad (13)$$

$$\lambda_{3D}(E) = \frac{4}{3} v(E) \tau_m(E).$$

Аналогічну до (6) степеневу апроксимацію часто використовують для середньої довжини вільного пробігу:

$$\lambda(E) = \lambda_0 \left( \frac{E - E_C}{kT} \right)^r. \quad (14)$$

Для параболічного зонного спектру  $v(E) \propto E^{1/2}$ , тож  $r = s + 1/2$ , де  $s$  – показник степені в апроксимації (6) для часу розсіювання. Для розсіювання електронів на акустичних фонах  $r = 0$ , а для розсіювання на іонізованих домішках  $r = 2$ .

#### 5. Оцінка усередненого значення середньої довжини вільного пробігу з експериментальних вимірювань

Для 2D провідника в дифузійному режимі повна провідність записується як [1, 6]

$$G_{2D}^{diff} = \frac{1}{\rho_{2D}} \frac{W}{L} = \sigma_s \frac{W}{L}, \quad (15)$$

де поверхнева провідність

$$\sigma_s = \frac{2q^2}{h} \int M_{2D}(E) \lambda(E) \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) dE \quad (16)$$

або ж інакше

$$\sigma_s = \frac{2q^2}{h} \langle M_{2D} \rangle \langle \langle \lambda \rangle \rangle, \quad (17)$$

де

$$\langle M_{2D} \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} M_{2D}(kT) \mathfrak{F}_{-1/2}(\eta_F) \quad (18)$$

виражається через інтеграл Фермі – Дірака порядку 1/2, де  $\eta_F = (E_F - E_C) / kT$  (найголовніші властивості інтегралів Фермі – Дірака

$\mathfrak{F}_n(\eta_F) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta^n}{\exp(\eta - \eta_F) + 1} d\eta$  наведені в

[1]), а усереднене значення довжини вільного пробігу

$$\langle \langle \lambda \rangle \rangle = \frac{\int \lambda(E) M_{2D}(E) \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) dE}{\int M_{2D}(E) \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) dE} = \frac{\langle M\lambda \rangle}{\langle M \rangle}. \quad (19)$$

Вимірявши експериментально поверхневу провідність (17), ми можемо обчислити  $\langle \langle \lambda \rangle \rangle$  через (17):

$$\langle \langle \lambda \rangle \rangle = \frac{\sigma_s}{(2q^2/h)} \frac{1}{\langle M_{2D} \rangle}. \quad (20)$$

Для обчислення  $\langle M_{2D} \rangle$  згідно з (18), потрібно знати  $\eta_F$ , тобто розташування рівня Фермі щодо дна зони провідності. Вимірювання самої лиш провідності не досить, потрібно виміряти ще й поверхневу густину електронів [1, 14]

$$n_s = g_v \frac{m^* kT}{\pi \hbar^2} \mathfrak{F}_0(\eta_F) = N_{2D} \mathfrak{F}_0(\eta_F), \quad (21)$$

звідки вирахувати  $\eta_F$ , далі  $\langle M_{2D} \rangle$  згідно з (18) і, нарешті,  $\langle \langle \lambda \rangle \rangle$  згідно з (20).

Для невироджених напівпровідників ситуація спрощується, бо в цьому випадку інтеграли Ферми – Дірака обчислюються аналітично й виражаються через експоненти, й усереднене значення довжини вільного пробігу можна відразу записати в явному вигляді через вимірювані експериментально поверхневі провідність і концентрацію:

$$\langle\langle\lambda\rangle\rangle = \frac{2(kT/q)}{qv_T} \left( \frac{\sigma_s}{n_s} \right),$$

де  $v_T$  – однонаправлена теплова швидкість електронів [14]

$$v_T = \sqrt{2kT/\pi m^*}. \quad (22)$$

Часто, однак, експериментально вимірюють коефіцієнт дифузії та рухливість, тож нам потрібно пов'язати  $\langle\langle\lambda\rangle\rangle$  з цими величинами.

### 6. Оцінка довжини вільного пробігу з коефіцієнта дифузії

Повернімося до 1D провідника на рис. 4. Припустимо, що йдеться про транспорт електронів у дифузійному режимі, й обчислимо струм. На лівому кінці ( $x = 0$ ) число електронів, які рухаються в напрямку  $+x$ , складає  $n^+(0) = I^+(0)/\langle v_x^+ \rangle$ , де  $\langle v_x^+ \rangle$  – середня швидкість у напрямку  $+x$ . В режимі квазірівноважного транспорту  $\langle v_x^- \rangle \approx \langle v_x^+ \rangle$ , і тому  $n^-(0) = I^-(0)/\langle v_x^+ \rangle$ . Сумарна концентрація електронів становитиме

$$n(0) = \frac{(1+R)I^+(0)}{\langle v_x^+ \rangle} = \frac{(2-T)I^+(0)}{\langle v_x^+ \rangle}. \quad (23)$$

На правому кінці провідника  $n^+(L) = I^+(L)/\langle v_x^+ \rangle$ , а  $n^-(L) = 0$ , оскільки електрони не інжектуються з правого контакту. Сумарна концентрація електронів на правому контакті є

$$n(L) = \frac{I^+(L)}{\langle v_x^+ \rangle} = \frac{TI^+(0)}{\langle v_x^+ \rangle}, \quad (24)$$

і вона менша за концентрацію на лівому контакті:

$$n(0) - n(L) = 2(1-T) \frac{I^+(0)}{\langle v_x^+ \rangle}. \quad (25)$$

Скористаємося з виразу для сумарного струму  $I = TI^+(0)$  і знайдемо струм, через рівняння (25):

$$I = \frac{\langle v_x^+ \rangle}{2} \frac{TL}{1-T} \times \left[ \frac{n(0) - n(L)}{L} \right] = -\frac{\langle v_x^+ \rangle \lambda}{2} \times \frac{dn(x)}{dx}. \quad (26)$$

Оскільки коефіцієнт дифузії в нашому випадку [1, 6, 14]

$$\bar{D} = \frac{\langle v_x^+ \rangle \lambda}{2}, \quad (27)$$

то в решті-решт ми одержуємо добре відомий закон дифузії Фіка

$$I = -\bar{D} \times \frac{dn}{dx}. \quad (28)$$

Цей результат може здатися неочікуваним, бо прийнято вважати, що дифузійний закон Фіка виконується на відстанях, які набагато перевищують середню довжину вільного пробігу. Але при виведенні (28) ми не робили такого припущення. Нагадаємо: ще Шоклі в [15] відзначив, що закон Фіка не обмежено великими відстанями; він застосовний і для балістичного чи квазібалістичного транспорту, потрібно тільки акуратно враховувати крайові умови.

Оскільки ми вивели (28) для 1D провідника, то струм у (28) відповідає одній моді з енергією  $E$ . За наявності багатьох каналів провідності повний струм можна одержати шляхом інтегрування за всіма модами, і тому одержаний таким чином коефіцієнт дифузії відповідатиме усередненій за енергією довжині вільного пробігу.

Проста ситуація має місце в невироджених провідниках з середньою довжиною вільного пробігу  $\lambda_0$ , яка не залежить від енергії. В цьому випадку коефіцієнт дифузії залежить від теплової швидкості (22)

$$\bar{D} = \frac{v_T \lambda_0}{2}, \quad (29)$$

що відкриває можливість легко оцінити довжину вільного пробігу з коефіцієнта дифузії.

### 7. Зв'язок довжини вільного пробігу з рухливістю

Як ми показали в [1], без поняття рухливості в нанofізичі цілком можна обійтися. Однак у



електроніці це поняття й досі широко застосовують, а, знаючи рухливість, так само можна оцінити середню довжину вільного пробігу. Питому поверхневу провідність (16) можна записати [1] у традиційному вигляді

$$\sigma_S = qn_S\mu, \quad (30)$$

прирівнюючи який до (16), одержуємо для рухливості вираз:

$$\mu \equiv \frac{2q}{h} \frac{\int M_{2D}(E) \lambda(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right) dE}{n_S}. \quad (31)$$

Ми візьмемо цю формулу, відому як формула Кубо – Грінвуда, як визначення рухливості.

Формулу (31), використовуючи (20) і (30), можна переписати в вигляді

$$\mu = \frac{1}{n_S} \frac{2q}{h} \langle\langle\lambda\rangle\rangle \langle M_{2D} \rangle. \quad (32)$$

Звідси можна обчислити  $\langle\langle\lambda\rangle\rangle$ , використавши експериментально виміряні значення рухливості й поверхневої концентрації електронів для обрахунку  $\eta_F$  і далі  $\langle M_{2D} \rangle$  згідно з (18), а саме:

$$\langle\langle\lambda\rangle\rangle = \frac{2kT\mu}{qv_T} \frac{\mathfrak{Z}_0(\eta_F)}{\mathfrak{Z}_{-1/2}(\eta_F)}. \quad (33)$$

Для невідроджених напівпровідників останній дріб дорівнює одиниці, тож  $\langle\langle\lambda\rangle\rangle$  записується як:

$$\langle\langle\lambda\rangle\rangle = \frac{2kT\mu}{qv_T}. \quad (34)$$

Звідси маємо вираз для рухливості в невідроджених напівпровідниках

$$\mu = \frac{v_T \langle\langle\lambda\rangle\rangle}{2} \times \frac{1}{kT/q}, \quad (35)$$

де перший співмножник можна визначити як коефіцієнт дифузії

$$\bar{D} = \frac{v_T \langle\langle\lambda\rangle\rangle}{2}. \quad (36)$$

Так ми одержуємо відоме співвідношення Ейнштейна для невідроджених напівпровідників

$$\frac{\bar{D}}{\mu} = \frac{kT}{q}. \quad (37)$$

## 8. Усереднена довжина вільного пробігу для степеневі апроксимації часу розсіяння

З визначення  $\langle\langle\lambda\rangle\rangle$  згідно з (19), використовуючи степеневу апроксимацію (14), маємо:

$$\langle\langle\lambda\rangle\rangle = \lambda_0 \frac{\int \left(\frac{E - E_C}{kT}\right)^r M_{2D}(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right) dE}{\int M_{2D}(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right) dE}, \quad (38)$$

що зводиться [1, 14] до комбінації гамма-функцій та інтегралів Фермі – Дірака:

$$\langle\langle\lambda\rangle\rangle = \lambda_0 \frac{\Gamma(r + 3/2)}{\Gamma(3/2)} \times \frac{\mathfrak{Z}_{r-1/2}(\eta_F)}{\mathfrak{Z}_{-1/2}(\eta_F)}. \quad (39)$$

Для невідроджених напівпровідників останній множник дорівнює одиниці.

## 9. Рухливість при сталому значенні часу розсіяння

Використаємо попередній результат і оцінимо рухливість для невідродженого напівпровідника зі сталим значенням часу розсіяння  $\tau_0$ . З (35) після підстановки (39) одержуємо:

$$\mu = \frac{v_T \lambda_0}{2} \frac{1}{kT/q} \frac{\Gamma(r + 3/2)}{\Gamma(3/2)}. \quad (40)$$

Для 2D провідника з (13) маємо:

$$\lambda(E) = \frac{\pi}{2} v(E) \tau_0 = \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m^*}}\right) \tau_0 \left(\frac{E - E_C}{kT}\right)^{1/2}, \quad (41)$$

Звідси випливає, що для степеневі апроксимації середньої довжини вільного пробігу (14) можемо обрати  $r = 1/2$  і

$$\lambda_0 = \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m^*}}\right) \tau_0, \quad (42)$$

а після підстановки (42) в (40) одержуємо очікуваний результат, який було вперше виведено з простої формули Друде  $\sigma = \frac{q^2 n \tau_0}{m^*} \equiv qn\mu$  для питомої провідності:

$$\mu = \frac{q\tau_0}{m^*}. \quad (43)$$

В цьому випадку рухливість має очевидний фізичний зміст, визначаючи швидкість, якої набуває електрон у зовнішньому електричному полі на момент першого акту розсіяння.

### 10. Аналіз експериментальних даних для Si MOSFET

Як приклад здійснимо аналіз експериментальних даних для польового кремнієвого транзистора Si MOSFET в різних наближеннях у рамках транспортної моделі ЛДЛ. Експериментально одержана вольт-амперна характеристика (ВАХ) залежності струму в каналі Si MOSFET (довжина каналу провідності 60 нм) від напруги між контактами витoku і стоку наведена на рис. 5.

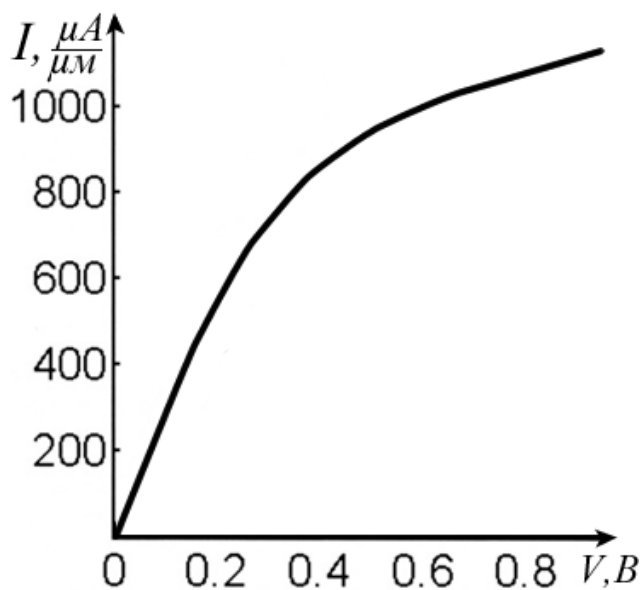


Рис. 5. Вольт-амперна характеристика Si MOSFET при  $V_G = 1.2$  В [16].

Для лінійної ділянки ВАХ, яка нас цікавить, виміряні значення параметрів при кімнатній температурі становлять:

$$\begin{aligned} n_s &\approx 6.7 \times 10^{12} \text{ см}^{-2}, \\ WR &\approx 215 \text{ Ом} \cdot \mu\text{м}, \\ \mu &\approx 260 \text{ см}^2 / \text{В} \cdot \text{с}. \end{aligned} \quad (44)$$

Звернімо увагу на те, що в 2D каналі провідності Si MOSFET питомий опір  $\rho$  має ту ж розмірність Ом, що й повний опір  $R = \rho \frac{L}{W}$  [1].

Поставмо собі два запитання: 1) Скільки мод провідності забезпечують струм? 2) Наскільки виміряний опір близький до балістичної межі?

У кристалічному об'ємному Si долинне виродження зони провідності дорівнює шести [17]. В нашому 2D зразку квантові обмеження зменшують це виродження до  $g_v = 2$  з ефективною масою в обох долинах  $m^* = m_l = 0.19 m_0$  [18, 19]. Відповіді на питання, які нас цікавлять, можна з різним ступенем достовірності. Для спрощення обчислень можна спершу використати просту модель при  $T = 0^\circ \text{K}$  [14], яка, однак, вочевидь незадовільно описує випадок кімнатної температури. Далі можна застосувати максвелл-больцманівську статистику для носіїв струму (невироджені напівпровідники). Розрахунки в цьому випадку не викликають труднощів, однак, вище від порогової напруги наближення неvirоджених носіїв також незастосовне. Нарешті, ми можемо відмовитися від будь-яких наближень і сумлінно обчислити інтеграли Фермі – Дірака.

Найпростіше наближення принаймні дасть нам можливість «відчутти» порядки величин. У моделі  $T = 0^\circ \text{K}$  густина мод [1]  $M_{2D}(E_F) \approx 150 \mu\text{м}^{-1}$ . Для найменшого за розмірами вивченого транзистора [17]  $W/L = 2$ , а з урахуванням значення  $L = 60 \text{ нм}$  [16] для числа мод, які забезпечують струм, одержуємо  $M_{2D}(E_F) \approx 18$ . Це вельми невелике число мод.

Балістичну межу для опору знаходимо з виразу (8) в [14]:  $W \cdot R_{2D}^{ball} \approx 90 \text{ Ом} \cdot \mu\text{м}$ , що приблизно вдвічі менше від виміряного опору (44). Тепер можемо отримати оцінку довжини вільного пробігу з формули (35) у [14]:  $\lambda(E_F) \approx 40 \text{ нм}$ . Ретельніший аналіз передбачає використання максвелл-больцманівської моделі, а ще точніший – обчислення інтегралів Фермі – Дірака з урахуванням заселеності підзон. Однак, уже зрозуміло, що сучасні Si MOSFET працюють у квазібалістичному режимі, а не в балістичному або суто дифузійному.

Далі оцінимо балістичну рухливість нашого зразка Si MOSFET. Виміряна рухливість (44)

характеризує достатньо довгий канал, і тому природно вважати її дифузійною. Для оцінки балістичної рухливості знов звернімося до найпростішої моделі  $T = 0^\circ K$ , в рамках якої вираз (52) роботи [14] можна переписати так:

$$\mu_{2D}^{ball} = \frac{2q}{h} L \sqrt{2g_v / \pi n_s}. \quad (45)$$

Підставляючи всі відомі величини, одержуємо  $\mu \approx 1200 \text{ см}^2 / \text{В} \cdot \text{с}$ , що в декілька разів перевищує дифузійну рухливість. Формальна рухливість (формули (118), (122) роботи [1]), буде дещо меншою від вимірної рухливості (44). Проте проведені вище оцінки є вельми наближеними через явну грубість наближення  $T = 0^\circ K$ .

Насправді рухливість (44) було виміряно при кімнатній температурі. Тому від грубого наближення  $T = 0^\circ K$ , перейдімо до максвелл-большманівської статистики носіїв у невідроджених напівпровідниках. Із співвідношення Ейнштейна (37) знайдемо коефіцієнт дифузії

$$\bar{D} = \frac{kT}{q} \mu = 6.7 \text{ см}^2 / \text{с}. \quad (46)$$

Тепер можна обчислити усереднену довжину вільного пробігу  $\langle\langle\lambda\rangle\rangle$  згідно з (36). Для цього потрібно спершу оцінити теплову швидкість  $v_T$  (22), що в свою потребує знання величини ефективної маси. Для електронів в інверсному шарі (100) Si, коли заселені тільки дві з шістьох підзон зони провідності,  $m^* = m_t = 0.19 m_0$  [19].

Звідси одержуємо  $v_T = 1.2 \times 10^7 \text{ см} / \text{с}$  і далі

$$\langle\langle\lambda\rangle\rangle_{MB} \approx 11 \text{ нм}. \quad (47)$$

Ще точніший результат можна отримати, відкинувши наближення й сумлінно розраховавши інтеграли Фермі – Дірака. З (33) випливає

$$\langle\langle\lambda\rangle\rangle = \langle\langle\lambda\rangle\rangle_{MB} \times \frac{\mathfrak{F}_0(\eta_F)}{\mathfrak{F}_{-1/2}(\eta_F)}. \quad (48)$$

Значення  $\eta_F$  знаходимо через відому з експерименту поверхневу концентрацію

$$n_S = N_{2D} \mathfrak{F}_0(\eta_F) = \left( g_v \frac{m^* kT}{\pi \hbar^2} \right) \mathfrak{F}_0(\eta_F). \quad (49)$$

Для електронів в інверсійному шарі (100), які зосереджені в двох підзонах зони провідності Si з шести,  $g_v = 2$ , тож  $N_{2D} = 4.1 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$ . Інтеграл Фермі – Дірака обчислюється аналітично

$$\mathfrak{F}_0(\eta_F) = \ln(1 + e^{\eta_F}), \quad (50)$$

тож

$$\eta_F = \ln(e^{n_S / N_{2D}} - 1) = 1.42. \quad (51)$$

Остаточно одержуємо

$$\langle\langle\lambda\rangle\rangle_{FD} = 11 \times \frac{\mathfrak{F}_0(1.42)}{\mathfrak{F}_{-1/2}(1.42)} \approx 15 \text{ нм}, \quad (52)$$

що й слід вважати найкращою з можливих оцінок для транзистора з довжиною каналу 60 нм, який ми розглядаємо. Довжина каналу цього транзистора лише в чотири рази перевищує середню довжину вільного пробігу, тож цілком коректно вважати, що такий транзистор працює в квазібалістичному режимі.

Підіб'ємо підсумки. У нашій методичній статті ми показали: при описі транспорту електронів у провіднику в дифузійному режимі в рамках моделі ЛДЛ важливу роль відіграє середня довжина вільного пробігу  $\lambda$ , яка визначає коефіцієнт проходження  $T$ . На прикладі 1D провідника ми вивели базове співвідношення між  $T$  і  $\lambda$ . Було встановлено зв'язок між  $\lambda$  і часом  $\tau_m$  імпульсної релаксації для провідників різної вимірності. Викладено методику оцінки усередненого значення довжини вільного пробігу з експериментальних вимірів через коефіцієнт дифузії і встановлено зв'язок довжини вільного пробігу з рухливістю. Як приклад проаналізовано експериментальні дані для польового транзистора Si MOSFET в різних наближеннях.

На завершення наголосімо: стаття є наслідком прослуховування одним з нас (ЮОК) курсів лекцій «Near-Equilibrium Transport: Fundamentals and Applications», прочитаних он-лайн в 2011 році проф. Марком Лундстромом (Mark Lundstrom), а також «Fundamentals of Nanoelectronics, Part I: Basic Concepts», прочитаних он-лайн в 2012 і 2015 роках проф. Супрійо Датта (Supriyo Datta) в рамках ініціативи Purdue University / nanoHUB-U [www.nanohub.org/u]. В ній також використано напрацювання

авторського курсу «Фізика конденсованого середовища», який інший автор (МВС) упродовж останніх років читає для магістрів факультету радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем Київського національного університету імені Т. Г. Шевченка.

Авторі щиро вдячні Н. Ю. Кругляк за допомогу в роботі над статтею і в підготовці її до друку.

#### Список використаної літератури

[1]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. Uzahalnena model elektronnoho transportu v mikro- i nanoelektronitsi // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. – 2015. – t. 12, No. 3. S. 4 – 27 (in Ukrainian).

[2]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. Termoelektrychni yavyscha ta prystroi z pozytsii uzahalnenoj modeli transportu elektroniv // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. – 2015. – t. 12, No. 4. S. 5 – 18 (in Ukrainian).

[3]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. Termoelektrychni koefitsiienty v uzahalnenii modeli transportu elektroniv // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. – 2016. – t. 13, No. 1. S. 5 – 23 (in Ukrainian).

[4]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. Transport tepla fononamy v uzahalnenii modeli Landauera-Datta-Lundstroma // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. 2016. – t. 13, No. 2. S. 16 – 35 (in Ukrainian).

[5]. Yu. O. Kruglyak, M. V. Strikha. Transportni yavyscha v hrafeni v uzahalnenii modeli Landauera-Datta-Lundstroma // Sens. elektron. mikrosist. tehnol. 2016. – t. 13, No. 3. S. 5 – 29 (in Ukrainian).

[6]. Datta Supriyo. *Lessons from Nanoelectronics: A New Perspective on Transport*. – Hackensack, New Jersey: World Scientific Publishing Company. – 2012. – pp. 473; www.nanohub.org/courses/FoN1.

[7]. Lundstrom Mark, Jeong Changwook. *Near-Equilibrium Transport: Fundamentals and Applications*. – Hackensack, New Jersey: World Scientific Publishing Company. – 2013. – pp. 227; www.nanohub.org/resources/11763.

[8]. Landauer Rolf. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction, *IBM J. Res. Dev.*, V. 1, N 3., 223 – 231 (1957).

[9]. Landauer Rolf. Electrical resistance of disordered onedimensional lattices, *Philos. Mag.*, V. 21, 863 – 867 (1970).

[10]. Lundstrom Mark. *Fundamentals of Carrier Transport, 2nd Ed.* (Cambridge: Cambridge Univ. Press: 2000).

[11]. Dirac, P. A. M. The Quantum Theory of Emission and Absorption of Radiation. *Proc. Royal Soc. A*, v. 114, N 767, 243–265 (1927).

[12]. Fermi, E. (1950). *Nuclear Physics*. University of Chicago Press.

[13]. C. Jeong, R. Kim, M. Luisier, S. Datta, M. Lundstrom, On Landauer versus Boltzmann and full band versus effective mass evaluation of thermoelectric transport coefficients, *J. Appl. Phys.*, v. 107, 023707 (2010).

[14]. Yu. A. Kruglyak, Ot ballisticheskoy provodimosti k diffuzionnoj v transportnoj modeli Landauera – Datta – Lundstroma, *Nanosystems, Nanomaterials, Nanotechnologies*, **11**, No. 4: 655 – 677 (2013) (in Russian).

[15]. W. Shockley, Diffusion and Drift of Minority Carriers in Semiconductors for Comparable Capture and Scattering Mean Free Paths, *Phys. Rev.*, **125**, 1570 – 1576 (1962).

[16]. Changwook Jeong, D. A. Antoniadis, M. S. Lundstrom, On backscattering and mobility in nanoscale silicon MOSFETs, *IEEE Trans. Electron Dev.*, **56**: N 11, 2762 – 2769 (2009).

[17]. R. F. Pierret, *Semiconductor Device Fundamentals* (Reading, MA: Addison–Wesley: 1996).

[18]. M. Lundstrom, *ECE 612: Nanoscale Transistors. Lecture 4. Polysilicon Gates/QM Effects*, 2008: www.nanohub.org/resources/5364.

[19]. Yuan Taur, Tak Ning, *Fundamentals of Modern VLSI Devices, 2nd Ed.*, Cambridge univ. Press, Cambridge, UK, 2009.

Стаття надійшла до редакції 22.10.2016 р.

PACS numbers: 72. 10. -d, 72. 20. Dp, 72. 20. Fr, 72. 90. +y, 73. 63. -b  
DOI 10.18524/1815-7459.2016.4.86639

## CONSIDERATION FOR ELECTRONS SCATTERING IN GENERALIZED LANDAUER – DATTA – LUNDSTROM MODEL

*Yu. A. Kruglyak, M. V. Strikha\**

Odesa State Environmental University,  
Faculty of Computer Sciences  
15 Lvivska Str, Odesa, Ukraine

\* Taras Shevchenko Kyiv National University  
Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Sciences,  
4g Glushkov Av, Kyiv, Ukraine

V. E. Lashkaryov Institute of Semiconductor Physics, NAS of Ukraine,  
41 Nauky Av, Kyiv, Ukraine

### Summary

In a tutorial article directed to serve researchers, university teachers and students, from the positions of generalized Landauer – Datta – Lundstrom (LDL) model we demonstrate that the average mean free path  $\lambda$ , which determines the transmission coefficient  $T$ , plays an important role in description of transport of electrons through a conductor in the diffusion regime. The basic correlation between  $T$  and  $\lambda$  is obtained for 1D resistor as the most simple example. A connection is established between  $\lambda$  and the time  $\tau_m$  of momentum relaxation for conductors of different dimensions. We get estimation for the averaged values for the mean free path  $\lambda$  from experimental measurements using the diffusion coefficient and the correlation between the mean free path and mobility is established.

As an example, the experimental data for Si MOSFET in different approximations are analyzed. The analysis aims to answer two questions: 1) how do many modes provide a current conduction? and 2) how is the measured resistance close to the ballistic limit? Answers to these questions are given with different degrees of reliability. To simplify the calculations the simplest model  $T = 0^\circ K$  was used initially, that is certainly not sufficient for the room temperature. Further, we assume Maxwell – Boltzmann statistics for the charge carriers (non-degenerate semiconductors); the calculations in this case do not cause difficulties, however, the assumption of non-degeneracy is also invalid above the voltage threshold. Finally, we abandon any assumptions and directly calculate the Fermi – Dirac integrals to get the value of  $\langle\langle\lambda\rangle\rangle$  equal to  $15nm$ , which is the best possible estimation for a given resistor length of  $60nm$ . The length of this resistor can not be considered too large compared to the mean free path, so it is physically correct to assume that this resistor operates in a quasi-ballistic regime.

**Keywords:** nanophysics, nanoelectronics, electron scattering, phonon scattering, transmission coefficient, mean free path, diffusion coefficient, mobility, Si MOSFET

## УРАХУВАННЯ РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОНІВ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ МОДЕЛІ ЛАНДАУЕРА – ДАТТА – ЛУНДСТРОМА

*Ю. О. Кругляк, М. В. Стріха*

Одеський державний екологічний університет,  
факультет комп'ютерних наук,  
вул. Львівська, 15, Одеса, Україна  
тел. (067) 725 2209, *E-mail: quantumnet@yandex.ua*  
\*Київський національний університет ім. Т. Шевченка,  
факультет радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем,  
пр. Глушкова, 4г, Київ, Україна, тел. (044) 526 0532;  
Інститут фізики напівпровідників ім. В. Є. Лашкарьова НАН України,  
пр. Науки, 41, Київ, Україна, тел. (044) 525 6033,  
*E-mail: maksym\_strikha@hotmail.com*

### Реферат

У методичній статті, розрахованій на науковців, викладачів та студентів вищої школи, з позицій концепції «знизу – вгору» узагальненої транспортної моделі Ландауера-Датта-Лундстрома (ЛДЛ) показано: при описі транспорту електронів у провіднику в дифузійному режимі важливу роль відіграє середня довжина вільного пробігу  $\lambda$ , яка визначає коефіцієнт проходження  $T$ . На прикладі 1D провідника виводиться базове співвідношення між  $T$  і  $\lambda$ . Встановлюється зв'язок між  $\lambda$  і часом  $\tau_m$  релаксації імпульсу для провідників різної вимірності. Наводиться методика оцінки усередненого значення довжини вільного пробігу з експериментальних даних через коефіцієнт дифузії і встановлюється зв'язок довжини вільного пробігу з рухливістю.

Як приклад аналізуються експериментальні дані для польового транзистора Si MOSFET в різних наближеннях. В ході аналізу ми шукаємо відповідь на два питання: 1) скільки мод провідності забезпечують струм? 2) наскільки вимірний опір близький до балістичної межі? Для спрощення обчислень спочатку користуємося простою моделлю  $T = 0^\circ K$ , що незадовільно описує випадок кімнатної температури. Далі ми застосовуємо максвелл-болцманівську статистику для носіїв струму (невироджені напівпровідники). Розрахунки в цьому випадку не викликають труднощів, однак, вище від порогової напруги наближення неvirоджених носіїв також незастосовне. Нарешті, ми відмовимося від будь-яких наближень, сумлінно обчислимо інтеграли Фермі – Дірака і для  $\langle\langle\lambda\rangle\rangle$  отримаємо значення  $15\text{ нм}$ , яке є найкращою з можливих оцінок для розглянутого резистора завдовжки  $60\text{ нм}$ . Довжина цього резистора не є надто великою порівняно з довжиною вільного пробігу, тож фізично коректно вважати, що цей резистор працює в квазібалістичному режимі.

**Ключові слова:** нанофізика, наноелектроніка, розсіяння електронів, розсіяння фононів, коефіцієнт проходження, довжина вільного пробігу, коефіцієнт дифузії, рухливість, Si MOSFET