УДК 629.12.03

Попов В.Г.
НУ «ОМА»

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ ГРІНА ПРИ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ГІДРОДИНАМІКИ ПОТОКУ В ПОРОЖНИНАХ ОХОЛОДЖЕННЯ

Вступ. Вивчення процесу теплообміну в системах охолодження ДВЗ вимагає знання розподілу швидкостей охолоджуючої рідини. Експериментальне дослідження гідродинаміки потоку рідини в порожнинах охолодження, зокрема втулок циліндрів, пов’язано із значними технічними труднощами. Ці труднощі пов’язані з необхідністю розміщення у цих порожнинах вимірювальної апаратури і передаванням сигналів від неї до реєструючих пристроїв. Тому доцільним є математичне моделювання руху рідини у контурі охолодження втулки циліндру. Недоліком існуючих математичних моделей, дивись наприклад [1], є процедура усереднення швидкості по ширині зазору, а також зміна геометрії області течії. Вона полягає у розгортці циліндричної порожнини у прямокутну. Але розподіли швидкостей у прямокутній області і циліндричній є різними. Окрім того, ці області не є геометрично еквівалентними оскільки не співпадають зовнішній і внутрішній радіуси циліндра. В поданій роботі пропонується математична модель гідродинаміки потоку в області охолодження втулки циліндру яке не використовує названі вище припущення.

Ця модель ґрунтується на математичному апараті скінченних інтегральних перетворень і функції Гріна одновимірних крайових задач.

Формулювання проблеми. Розглянемо задачу математичного моделювання гідродинаміки охолоджуючої рідини в контурі охолодження втулки циліндра. Є різні способи подавання і відведення рідини у контур охолодження [1]. Для визначеності зупинимось на випадку, коли вона подається у зарубашечну щілину знизу, а відведення води відбувається згори (Рис. 1) [1]

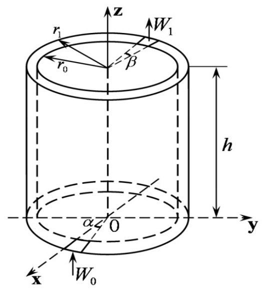

Рис. 1.

Рух рідини будемо розглядати у циліндричній системі координат $\mathrm{Or}\theta\mathrm{z}$*, центр якої збігається з центром нижньої основи циліндру, а вісь співпадає з віссю циліндру (Рис.1). Подавання рідини здійснюється зі швидкістю* W_0 *через отвір* $\mathrm{r}_0 \le \mathrm{r} \le \mathrm{r}_1,\ 0 \le \theta \le \alpha$*, а відведення відбувається через отвір* $\mathrm{r}_0 \le \mathrm{r} \le \mathrm{r}_1,\ \pi < \theta < \pi + \beta$ *зі швидкістю* W_1.

Будемо вважати, що швидкість подавання і відведення рідини на протязі довгого часу не змінювалась і її течія стала стаціонарною і незалежною від часу. За таких умов необхідно визначити рух рідини у циліндричній щілині, що визначається наступними нерівностями

$\mathrm{r}_0 < \mathrm{r} < \mathrm{r}_1,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 < \mathrm{z} < \mathrm{h}$.

Він визначається системою рівнянь Нав'є-Стокса у циліндричній системі координат [2] для стаціонарного руху нестисливої рідини. Ці рівняння у векторній формі мають вигляд [2]

$$\frac{1}{2}\mathrm{grad}\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)-\vec{\mathrm{v}}\cdot\mathrm{rot}\left(\vec{\mathrm{v}}\right)=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\left(\mathrm{p}\right)+\nu\left(\mathrm{grad\ div}\left(\vec{\mathrm{v}}\right)-\mathrm{rot\ rot}\left(\vec{\mathrm{v}}\right)\right) \quad (1)$$

Тут введено наступні позначення: $\vec{\mathrm{v}}=\left(\mathrm{v}_\mathrm{r},\mathrm{v}_\theta,\mathrm{v}_\mathrm{z}\right)$ - вектор швидкостей, $\mathrm{v}_\mathrm{r},\mathrm{v}_\theta,\mathrm{v}_\mathrm{z}$ - відповідно радіальна, кутова і повздовжня компоненти вектора швидкостей, p - тиск у рідині, ν,ρ - в'язкість і густина рідини. Усі векторні операції у (1) і далі розглядаються у циліндричних координатах [6].

До рівняння (1) ще слід додати рівняння суцільності, яке для нестисливої рідини має вигляд [2]

$$\mathrm{div}\left(\vec{\mathrm{v}}\right)=0 \quad (2)$$

Внаслідок нелінійності можливе лише числове розв'язання системи диференціальних рівнянь (1), (2). Але за деяких природних припущеннях, що ґрунтуються на особливостях руху охолоджувальної рідини, можливе і аналітичне розв’язання. Як правило, швидкості руху рідини у контурі охолодження втулки циліндру є невеликими (0.01 – 0.05 м/с) і її течія є близькою до безвихрової [1]. На підставі цього робимо припущення щодо безвихрової течії охолоджувальної рідини. Але тоді [2]

$$\mathrm{rot}\left(\vec{\mathrm{v}}\right)=0 \tag{3}$$

Рівність (3) і рівняння суцільності дають можливість здійснити наступні перетворення рівняння (1)

$$\frac{1}{2}\mathrm{grad}\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\left(\mathrm{p}\right),$$

або

$$\mathrm{p}=-\frac{1}{2}\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)+\mathrm{const} \tag{4}$$

Остання рівність дозволяє з точністю до довільної сталої визначити тиск у рідині, за умови відомого вектора швидкостей. З механіки рідини [2] відомо, що безвихрова течія є потенціальною, тобто існує функція $\varphi\left(\mathrm{r},\theta,\mathrm{z}\right)$ яка називається потенціалом швидкостей, така що

$$\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{grad}\left(\varphi\right),\ \mathrm{u_r}=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{r}},\ \mathrm{u}_\theta=\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\ \mathrm{u_z}=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{z}} \tag{5}$$

Підставимо (5) у рівняння суцільності (2) і скористаємось відомим співвідношенням [6]

$$\mathrm{div\ grad}\left(\varphi\right)=\Delta\varphi,$$

де Δ - оператор Лапласа, у даному випадку у циліндричних координатах. Знайдемо, що потенціал швидкостей задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mathrm{r}^2}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{r}}+\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mathrm{z}^2}=0 \tag{6}$$

Це рівняння природно розглядається з граничними умовами непроникливості на поверхні порожнини охолодження. Тоді на бічних поверхнях маємо

$$\mathrm{u_r}\left(\mathrm{r}_0,\theta,\mathrm{z}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{r}}\left(\mathrm{r}_0,\theta,\mathrm{z}\right)=0,\ \mathrm{v_r}\left(\mathrm{r},\theta,\mathrm{z}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{r}}\left(\mathrm{r},\theta,\mathrm{z}\right)=0 \tag{7}$$

Умови на торцевих поверхнях записуються у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}&v_z(r,\theta,0)=\frac{\partial\varphi}{\partial z}(r,\theta,0)=\begin{cases}W_0, & 0<\theta<\alpha\\ 0, & \theta\ge\alpha\end{cases},\\ &v_z(r,\theta,h)=\frac{\partial\varphi}{\partial z}(r,\theta,h)=\begin{cases}W_1, & \pi<\theta<\pi+\beta\\ 0, & \theta\notin[\pi,\pi+\beta]\end{cases},\end{aligned}\quad r\in\left[r_0,r_1\right] \tag{8}$$

Таким чином, при здійснених припущеннях модель течії охолоджувальної рідини приведе до розв'язання рівняння Лапласа (4) з граничними умовами (7), (8).

Розв'язання сформульованої задачі. Розв'язок крайової задачі (6) - (8) може бути побудований методом інтегральних перетворень з використанням функції Гріна одновимірної крайової задачі. Почнемо з застосування до (6) і граничних умов (7), (8) повного скінченного перетворення Фур'є за формулами [3]:

$$\varphi_k(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(r,\theta,z)e^{ik\theta}d\theta,\quad \varphi(r,\theta,z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_k(r,z)e^{-ik\theta}; \tag{9}$$

Причому слід врахувати формулу для зображення другої похідної [3], яка за умов: $\varphi\left(r,0,z\right)=\varphi\left(r,2\pi,z\right)$, $\varphi'\left(r,0,z\right)=\varphi'\left(r,2\pi,z\right)$ має наступний вигляд

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}e^{ik\theta}d\theta=-k^2\varphi_k(r,z)$$

Внаслідок дії цим перетворенням на рівняння і граничні умови відносно Фур'є-зображень приходимо до граничної задачі:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}-\frac{\kappa^2}{r^2}\varphi_k+\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial z^2}=0,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(r_0,z)=0,\ 0<z<h,\\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial z}(r,0)=W_{1k}(r),\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial z}(r,h)=W_{\theta k}(r),\ r_0<r<r_1.\end{gathered} \tag{10}$$

У (10) позначено

$$\begin{gathered}W_{\theta k}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha}W_1(r,\theta)e^{ik\theta}d\theta,\\ W_{1k}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi+\beta}W_2(r,\theta)e^{ik\theta}d\theta,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\end{gathered} \tag{11}$$

Далі до (8) застосуємо скінченне косинус-перетворення Фур'є, яке визначається формулами [3]

$$\Phi_{km}(r)=\int_0^h \varphi_m(r,z)\cos(\alpha_m z)dz,\quad \alpha_m=\frac{\pi m}{h},\ m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$
$$\varphi_k(r,z)=\frac{1}{h}\left(\Phi_{k0}(r)+2\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_{km}(r)\cos\alpha_m z\right) \tag{12}$$

Для цього інтегрального перетворення, має місце наступна формула перетворення другої похідної, яка виводиться послідовним інтегруванням частинами:

$$\int_0^n \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial z^2}\cos(\alpha_m z)dz=(-1)^m W_{1k}(r)-W_{0k}(r)-\alpha_m^2\Phi_{km}(r)$$

Після застосування перетворення (12), з (10) маємо наступну одномірну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\Phi_{km}''(r)+\frac{1}{r}\Phi_{km}'(r)-\left(\alpha_m^2+\frac{\kappa^2}{r^2}\right)\Phi_{km}=f_{km}(r),$$
$$f_{km}(r)=W_{0k}(r)-(-1)^m W_{1k}(r),\ m=0,1,2,... \tag{13}$$
$$\Phi'_{km}(r_0)=0,\ \Phi'_{km}(r_1)=0$$

Якщо $m\neq 0$, то і $\alpha_m\neq 0$, рівняння (13) є неоднорідним диференціальним рівнянням Бесселя [4], [5].

Розв’язок одновимірної граничної задачі (13) будемо шукати методом функції Гріна [3].

Функцією Гріна цієї граничної задачі називається функція двох змінних $G(r,\eta)$, визначена у квадраті $r_0\le r,\eta\le r_1$ і яка задовольняє умови:

1. Є розв’язком однорідного рівняння (13);
2. Неперервна у цьому квадраті, включно з діагоналлю:

$$G(\eta+0,\eta)=G(\eta-0,\eta)$$

3. Похідна по змінній r неперервна всюди, окрім діагоналі квадрата де вона має розрив першого роду з наступним стрибком:

$$\frac{\partial G}{\partial r}(\eta+0,\eta)-\frac{\partial G}{\partial r}(\eta-0,\eta)=1$$

4. По змінній r задовольняє граничні умови з (13):

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r_0,\eta)=0;\ \frac{\partial G}{\partial r}(r_1,\eta)=0$$

Якщо функція Гріна побудована, то для будь якої правої частини $f_{km}(r)$ розв'язок одновимірної граничної задачі (13) подається формулою:

$$\Phi_{km}(r)=\int_{r_0}^{r_1} f_{km}(\eta)G(\eta,r)d\eta \tag{14}$$

Рівняння (13) має два лінійно незалежних розв'язки які є циліндричними функціями (функціями Бесселя) першого і другого роду [4], [5] $J_k(\alpha_m r),\ Y_k(\alpha_m r)$. Тому [3] функцію Гріна слід шукати у вигляді

$$G(r,\eta)=\begin{cases} a_1(\eta)J_k(\alpha_m r)+a_2(\eta)Y_k(\alpha_m r),\ r_0\le r<\eta \\ b_1(\eta)J_k(\alpha_m r)+b_2(\eta)Y_k(\alpha_m r),\ \eta<r\le r_1 \end{cases} \tag{15}$$

Невідомі коефіцієнти $a_j(\eta),\ b_j(\eta),\ j=1,2$ визначаються з умов 2-4 визначення функції Гріна. Підстановка виразу (15) у ці умови приводить до наступної системи чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $a_1(\eta),a_2(\eta),b_1(\eta),b_2(\eta)$:

$$\begin{cases} a_1(\eta)J'_k(\alpha_m r)+a_2(\eta)Y_k{}'(\alpha_m r)=0 \\ b_1(\eta)J'_k(\alpha_m r)+b_2(\eta)Y'_k(\alpha_m r)=0 \\ a_1(\eta)J_k(\alpha_m r)+a_2(\eta)Y_k(\alpha_m r)-b_1(\eta)J_k(\alpha_m r)-b_2(\eta)Y_k(\alpha_m r)=0 \\ a_1(\eta)J'_k(\alpha_m r)+a_2(\eta)Y'_k(\alpha_m r)-b_1(\eta)J'_k(\alpha_m r)-b_2(\eta)Y'_k(\alpha_m r)=-1 \end{cases}$$

В результаті розв'язання цієї системи знаходимо

$$a_1(\eta)=\eta\frac{A_{km}(\eta)}{D_{km}}Y'_k(\alpha_m r_0),\ a_2(\eta)=-\eta\frac{A_{km}(\eta)}{D_{km}}J'_k(\alpha_m r_0),$$

$$b_1(\eta)=\eta\frac{B_{km}(\eta)}{D_{km}}Y'_k(\alpha_m r_1),\ b_2(\eta)=\eta\frac{B_{km}(\eta)}{D_{km}}J'_k(\alpha_m r_1)$$

де

$$A_{km}(\eta)=J_k(\alpha_m\eta)Y_k{}'(\alpha_m r_1)-Y_k(\alpha_m\eta)J_k{}'(\alpha_m r_1)$$

$$B_{km}(\eta)=J_k(\alpha_m\eta)Y_k(\alpha_m r_0)-Y_k(\alpha_m\eta)J_k{}'(\alpha_m r_0)$$

$$D_{km}=\frac{2}{\pi}\Big(J'_k(\alpha_m r_0)Y_k{}'(\alpha_m r_1)-Y'_k(\alpha_m r_0)J_k{}'(\alpha_m r_1)\Big)$$

Далі з (15) отримаємо

$$G(r,\eta)=\eta G_{km}(r,\eta),\quad m\neq 0$$

$$G_{km}(r,\eta)=\begin{cases}\dfrac{A_{km}(\eta)B_{km}(r)}{D_{km}}, & r_0\le r<\eta\\[2mm] \dfrac{A_{km}(r)B_{km}(\eta)}{D_{km}}, & \eta<r\le r_1\end{cases}\tag{16}$$

Тепер за формулою (14) при $m\neq 0$ розв'язок (13) дорівнює

$$\Phi_{km}(r)=\int_{r_0}^{r_1}\eta f_{km}(\eta)G_{km}(r,\eta)d\eta\tag{17}$$

Нехай тепер $m=0$. Тоді рівняння (13) набуває вигляду:

$$\Phi''_{k0}(r)+\frac{1}{r}\Phi^{0}_{k0}(r)-\frac{k^2}{r^2}\Phi_{k0}=f_{k0},\tag{18}$$

а граничні умови залишаються тими самими. Якщо при цьому $k\neq 0$, то фундаментальну систему розв'язків утворюють функції r^k і r^{-k}. Тому функцію Гріна у цьому випадку слід розшукувати у вигляді

$$G(r,\eta)=\begin{cases}a_1(\eta)r^{-k}+a_2(\eta)r^k, & r_0\le r<\eta\\ b_1(\eta)r^{-k}+b_2(\eta)r^k, & \eta<r\le r_1\end{cases}\tag{19}$$

Після задовольняння умов 2-4 і розв'язання отриманої системи рівнянь приходимо до наступного подання функції Гріна

$$G(r,\eta)=\eta G_{k0}(r,\eta)$$

$$G_{k0}(r,\eta)=\begin{cases}\dfrac{A_{k0}(\eta)B_{k0}(r)}{D_{k0}}, & r_0\le r<\eta\\[2mm] \dfrac{A_{k0}(r)B_{k0}(\eta)}{D_{k0}}, & \eta<r\le r_1\end{cases}\tag{20}$$

$$A_{k0}(\eta)=\left(\frac{\eta}{r_1}\right)^k+\left(\frac{\eta}{r_1}\right)^{-k};\ B_{k0}(\eta)=\left(\frac{\eta}{r_0}\right)^k+\left(\frac{\eta}{r_0}\right)^{-k};\ D_{k0}=2k\left(\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^k-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^k\right)$$

Тоді розв'язок граничної задачі (13) при $m=0,\ k\neq 0$ згідно з (14) дорівнює

$$\Phi_{k0}(r)=\int_{r_0}^{r_1}\eta f_{k0}(\eta)G_{k0}(r,\eta)d\eta\tag{21}$$

Залишилось розглянути випадок, коли $k=0$ і $m=0$. В цьому випадку з (13) отримаємо наступну одномірну крайову задачу

$$\Phi_{00}''(r)+\frac{1}{r}\Phi_{00}'(r)=f_{00}(r),\ \Phi_{00}'(r_0)=0,\ \Phi_{00}'(r_1)=0. \qquad (22)$$

Доведемо, що права частина цього рівняння дорівнює нулю. Дійсно, для нестисливої рідини витрати через вхідний Q_0 і вихідний Q_1 отвори мають бути однаковим: $Q_0=Q_1$. Маємо згідно (11):

$$Q_0=2\pi\int_{r_0}^{r_1}\int_0^{\alpha}W_0(r,\theta)rdrd\theta=4\pi^2\int_{r_0}^{r_1}rW_{00}(r)dr\ ,$$

$$Q_1=2\pi\int_{r_0}^{r_1}\int_{\pi}^{\pi+\beta}W_1(r,\theta)rdrd\theta=4\pi^2\int_{r_0}^{r_1}rW_{10}(r)dr\ .$$

Отримаємо рівність, що випливає з рівняння витрат рідини

$$4\pi^2\int_{r_0}^{r_1}rW_{00}(r)dr=4\pi^2\int_{r_0}^{r_1}rW_{10}(r)dr\ .$$

або

$$4\pi_2\int_{r_0}^{r_1}r(W_{00}(r)-W_{10}(r))dr=0.$$

Таке можливо тільки тоді, коли

$$W_{00}(r)-W_{10}(r)\equiv 0\,.$$

Але це означає що

$$f_{or}=W_{00}(r)-W_{10}\left(r\right)=0\,.$$

Отже, маємо однорідне диференціальне рівняння з нульовими граничними умовами. Така крайова задача має лише нульовий розв’язок (22) є $\Phi_{00}(r)\equiv 0$.

Остаточно за формулами обернених перетворень (9), (12) знаходимо потенціал швидкостей

$$\varphi(r,\theta,z)=\frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-ik\theta}\int_{r_0}^{r_1}\eta f_{k0}(\eta)G_{k0}(r,\eta)d\eta+$$
$$+\frac{2}{h}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-ik\theta}\sum_{m=1}^{+\infty}\cos\alpha_m z\int_{r_0}^{r_1}\eta f_{km}(\eta)G_{km}(r,\eta)d\eta. \qquad (23)$$

Тепер за формулами можна визначити компоненти вектора швидкості у будь якій точці порожнини охолодження.

Висновки. Запропонована більш досконала математична модель руху охолоджувальної рідини в порожнині охолодження втулки циліндру. Математичним підґрунтям створеної моделі є апарат скінчених інтегральних перетворень і функцій Гріна одновимірних крайових задач. Ця модель з одного боку дозволяє уникнути процедури усереднення швидкостей за радіальною координатою і заміни реальної циліндричної області прямокутною. З іншого боку в межах цієї моделі можливе аналітичне моделювання за будь-якої схеми подавання охолоджувальної рідини у контур охолодження втулки циліндру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р.М. Петриченко, С.А. Батурин, Ю.Н. Исаков и др. Элементы системы автоматизированного проектирования ДВС. – Л.: Машиностроение, 1990. – 328 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.:Дрофа, 2003. – 840 с.
3. Г.Я. Попов, В.В. Реут, Н.Д. Вайсфельд Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень. 2005. – 184 с.
4. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. – М.:Наука, 1965. – 295 с.
5. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.:«Высшая школа», 1965ю – 426 с.
6. Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. – 1973. – 832 с.