УДК 531.3

© Клендій М.Б., к.т.н
Бережанський агротехнічний інститут НУБіП України

РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ ПО ПОХИЛІЙ ПЛОЩИНІ, ВСІ ТОЧКИ ЯКОЇ В КОЛИВАЛЬНОМУ РУСІ ОПИСУЮТЬ КОЛА В ЦІЙ ЖЕ ПЛОЩИНІ

Складено диференціальні рівняння руху матеріальної частинки по похилій шорсткій площині, яка здійснює коливальний рух. Всі точки площини описують кола заданого радіуса в цій же площині. Досліджено особливості відносного руху частинки по площині в залежності від її кута нахилу до горизонту. Рівняння розв'язані чисельними методами. Знайдено відносні швидкості та побудовано траєкторії руху частинок.

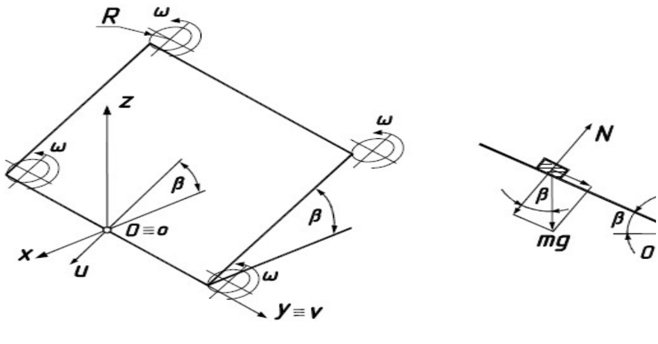
МАТЕРІАЛЬНА ЧАСТИНКА, РУХ, ПОХИЛА ПЛОЩИНА, КОЛИВАННЯ, КОЛО.

Постановка проблеми. Похила площина є універсальним конструктивним елементом багатьох сільськогосподарських машин [1]. Нею в процесі обробки переміщується технологічний матеріал. Найбільш дослідженим є рух частинок по горизонтальній площині, яка здійснює коливальний прямолінійний або коловий рухи. Стосовно похилої площини дослідження, в основному, ведуться при її прямолінійних зворотно-поступальних коливаннях в горизонтальному напрямі, в напрямі нахилу площини або в поперечному напрямі [1]. При криволінійних коливаннях площини, коли всі її точки описують кола, а сама площина має нахил, рух технологічного матеріалу суттєво змінюється.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Окрім фундаментальної монографії [1], в якій розглянуто прямолінійні зворотно-поступальні коливання, існують праці, присвячені криволінійним коливанням площини. Акад. П.М. Заїка розглянув рух сферичної частинки по горизонтальній площині, яка здійснює поступальні коливання по колу [2]. Взагалі задача руху матеріальної частинки по площині, яка здійснює коловий коливальний рух, вперше була розв'язана М.Є. Жуковським в геометричній інтерпретації [3], узагальнена і поширена на випадки еліптичних коливань І.І. Блехманом [4]. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює горизонтальні поступальні коливання по різних кривих, розглянуто в праці [5].

Мета дослідження. Дослідити закономірності руху матеріальних частинок по шорсткій похилій площині, яка здійснює коливальний рух таким чином, що кожна її точка описує коло в цій же площині.

Результати дослідження. Розташуємо площину так, щоб вона була нахилена до горизонту під кутом β (рис. 1). Відносний рух частинка здійснюватиме по похилій площині, в якій розташуємо плоску систему координат *ouv* так, щоб вісь *ou* була спрямована по лінії найбільшого нахилу. Похила площина разом із плоскою системою координат здійснює коливання таким чином, що всі точки площини описують кола радіуса R в цій же площині (на рис.1,а ці кола показані тільки у вершинах прямокутника, що обмежує площину). Абсолютний рух частинки будемо розглядати по відношенню до нерухомої системи координат *Oxyz*, у якої вісь *Oy* збігається із віссю *ov*, а між похилою площиною *ouv* і координатною горизонтальною площиною *Oxy* існує кут β. Початок рухомої системи координат (точка *o*) теж описує коло. На рис. 1 дві системи зображені в момент часу, коли їхні початки координат збігаються.



а б

Рис. 1 – До розгляду руху частинки по похилій площині, всі точки якої при коливаннях описують кола в цій же площині: а – взаємне розташування рухомої системи координат *ouv* і нерухомої *Oxyz* в початковий момент, коли їх початки координат збігаються; б – положення частинки на площині, коли вона проекціюється в пряму

Для складання диференціальних рівнянь руху частинки потрібно оперувати абсолютною її траєкторією в нерухомій системі координат *Oxyz*. Абсолютна траєкторія частинки запишеться сумою відповідних складових у переносному і відносному рухах:

$$\begin{cases} x = x_{ï} + x_{â}; \\ y = y_{ï} + y_{â}; \\ z = z_{ï} + z_{â}, \end{cases} \quad (1)$$

де $x_n = x_n(t)$; $y_n = y_n(t)$; $z_n = z_n(t)$ – траєкторія переносного руху у функції часу; $x_в = x_в(t)$; $y_в = y_в(t)$; $z_в = z_в(t)$ – траєкторія відносного руху у функції часу.

Кожна точка похилої площини, в тому числі і початок координат рухомої системи *ouv*, описує коло радіуса *R*. У проекціях на осі нерухомої системи координат переносний рух площини опишеться параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x_{ï} = R\cos\beta\cos\omega t; \\ y_{ï} = R\sin\omega t; \\ z_{ï} = -R\sin\beta\cos\omega t, \end{cases} \quad (2)$$

де ω – кутова швидкість обертання кожної точки площини.

На похилій площині частинка ковзатиме і її траєкторія ковзання у рухомій системі *ouv* запишеться у функції часу *t: u=u(t); v=v(t)*. У проекціях на осі нерухомої системи координат відносний рух частинки опишеться параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x_{\hat{a}} = u\cos\beta; \\ y_{\hat{a}} = v; \\ z_{\hat{a}} = -u\sin\beta. \end{cases} \tag{3}$$

Сумуючи переносний і відносний рухи за формулою (1), отримаємо:

$$\begin{cases} x = R\cos\beta\cos\omega t + u\cos\beta; \\ y = R\sin\omega t + v; \\ z = -R\sin\beta\cos\omega t - u\sin\beta \end{cases}. \tag{4}$$

Залежності *u=u(t); v=v(t)*, які описують траєкторію відносного руху (ковзання частинки по похилій площині), є невідомими функціями, які потрібно знайти. Після диференціювання рівнянь (4) по часу *t* знайдемо проекції абсолютної швидкості частинки на нерухому систему координат *Oxyz*:

$$\begin{cases} x' = -R\omega\cos\beta\sin\omega t + u'\cos\beta; \\ y' = R\omega\cos\omega t + v'; \\ z' = R\omega\sin\omega t - u\sin\beta. \end{cases} \tag{5}$$

Диференціювання виразів (5) дасть проекції абсолютного прискорення:

$$\begin{cases} x'' = -R\omega^2\cos\beta\cos\omega t + u''\cos\beta; \\ y'' = -R\omega^2\sin\omega t + v''; \\ z'' = R\omega^2\sin\beta\cos\omega t - u''\sin\beta. \end{cases} \tag{6}$$

Складемо рівняння руху у вигляді $m\overline{w} = \overline{F}$, де де *m* – маса частинки, $\overline{w}$ - вектор абсолютного прискорення, $\overline{F}$ - результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги *mg* (*g=9,81 м/с*^{2}), реакція *N* похилої площини та сила тертя *fN* при ковзанні частинки по площині (*f* – коефіцієнт тертя). Всі сили потрібно спроекціювати на осі нерухомої системи координат.

Сила ваги спрямована вниз, отже її проекції запишуться:

$$\{0;\ 0; -mg\}. \tag{7}$$

Реакція площини *N* перпендикулярна до неї (рис. 1, б) і має проекції:

$$\{N\sin\beta;\ 0;\ N\cos\beta\}. \tag{8}$$

Оскільки сила тертя спрямована по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежну сторону, знайдемо проекції вектора дотичної. Вони визначаються першими похідними рівнянь (3):

$$\begin{cases} x_{\hat{a}} = u' \cos \beta; \\ y_{\hat{a}} = v'; \\ z_{\hat{a}} = -u' \sin \beta. \end{cases} \tag{9}$$

Геометрична сума складових (9) дасть величину швидкості ковзання частинки по поверхні циліндра у відносному русі:

$$V_{\hat{a}} = \sqrt{x_{\hat{a}}'^2 + y_{\hat{a}}'^2 + z_{\hat{a}}'^2} = \sqrt{u'^2 + v'^2}\ . \tag{10}$$

Одиничний вектор дотичної в проекціях на осі рухомої системи *Oxyz* одержимо діленням проекцій (9) на величину вектора (10):

$$\left\{ \frac{u' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}};\ \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}};\ -\frac{u' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \right\}. \tag{11}$$

Розпишемо векторне рівняння $m\overline{w} = \overline{F}$ в проекціях на осі нерухомої системи координат, взявши до уваги, що сила тертя fN спрямована вздовж одиничного вектора (11) в протилежну до нього сторону:

$$\begin{cases} mx'' = N \sin \beta - fN \dfrac{u' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ my'' = -fN \dfrac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ mz'' = -mg + N \cos \beta + fN \dfrac{u' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}. \end{cases} \tag{12}$$

Підставимо в рівняння (12) другі похідні (проекції абсолютного прискорення) із (6) і отримаємо систему із трьох рівнянь:

$$\begin{cases} m\left(-R\omega^2 \cos \beta \cos \omega t + u'' \cos \beta\right) = N \sin \beta - fN \dfrac{u' \cos\beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ m\left(-R\omega^2 \sin \omega t + v''\right) = -fN \dfrac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ m\left(R\omega^2 \sin \beta \cos \omega t - u'' \sin \beta\right) = -mg + N \cos \beta + fN \dfrac{u' \sin\beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \end{cases} \tag{13}$$

До системи (13) входить три невідомі функції: $N=N(t)$, $u=u(t)$ і $v=v(t)$. Розв'язуючи її відносно N, u'' і v'', отримаємо дуже простий вираз для N:

$$N = mg\cos\beta. \tag{14}$$

Із (14) випливає, що сила N тиску поверхні на частинку є сталою. Попередньо можна переконатися, що маса m в рівняннях скоротиться при підстановці (14) в (12). Залежності u'' і v'' після перетворень набувають вигляду:

$$\begin{cases} u'' = R\omega^2\cos\omega t + g\sin\beta - fg\dfrac{u'\cos\beta}{\sqrt{u'^2+v'^2}}; \\ v'' = R\omega^2\sin\omega t - fg\dfrac{v'\cos\beta}{\sqrt{u'^2+v'^2}}. \end{cases} \tag{15}$$

Система (15) не може бути проінтегрована в аналітичному вигляді. Її потрібно розв'язувати чисельними методами. Аналітичний розв'язок можна отримати для часткового випадку при $f=0$, тобто, для абсолютно гладенької площини:

$$\begin{cases} u = \dfrac{gt^2}{2}\sin\beta + c_1 t - R\cos\omega t; \\ v = c_2 t - R\sin\omega t, \end{cases} \tag{16}$$

де c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Щоб знайти абсолютну траєкторію частинки, потрібно вирази (16) підставити у параметричні рівняння (4):

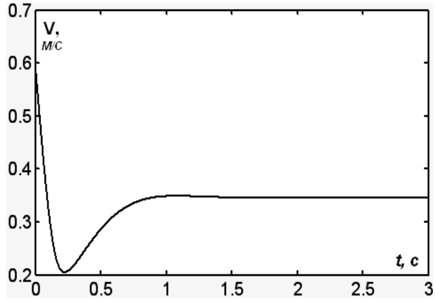
$$\begin{cases} x = \dfrac{gt^2}{2}\sin\beta\cos\beta + c_1 t\cos\beta; \\ y = c_2 t; \\ z = -\dfrac{gt^2}{2}\sin^2\beta - c_1 t\sin\beta. \end{cases} \tag{17}$$

Рівняння (17) описують параболу, яка розташована в похилій площині. При $\beta=0$, тобто, для випадку горизонтальної площини, абсолютна траєкторія перетворюється у пряму лінію. Це закономірно, оскільки за відсутності тертя частинка не реагує на коливання площини і рухається по ній в абсолютному русі, як по нерухомій. Відносна ж траєкторія, яка є слідом ковзання частинки по площині, набуває відповідної криволінійної форми в околі абсолютної траєкторії. При $\beta=0$ і $f\neq0$ чисельне інтегрування рівнянь (15) показує, що відносною траєкторією руху частинки є коло. По ньому частинка ковзає після стабілізації руху і для такого випадку можна знайти аналітичний розв'язок системи диференціальних рівнянь [5]. Форма відносної траєкторії під час перехідного періоду, тобто, після попадання частинки на площину і до стабілізації руху залежить від вихідних умов інтегрування: величини швидкості і її напряму в момент попадання на площину.

Будемо вважати, що частинка падає вертикально і зустрічається із площиною під прямим кутом. Припустимо, що в момент зустрічі із площиною її абсолютна швидкість стає рівною нулю. Оскільки площина в цей момент здійснює коливальний рух, то відбувається ковзання частинки по площині. Величина і напрям швидкості ковзання (тобто, швидкості відносного руху) буде рівною аналогічним величинам переносного руху площини в точці попадання частинки, але напрям швидкості буде спрямований у протилежну сторону. Точка попадання залежатиме від часу t_0. Оскільки кожна точка площини описує коло радіуса R, то частинка попадатиме в певну точку цього кола, яка визначиться кутом повороту радіус-вектора на кут $\varphi_0=\omega t_0$. Підстановкою цього значення у рівняння (2) визначиться точка попадання на площину в нерухомій системі координат. Величина швидкості визначиться диференціюванням рівнянь (2). Наприклад, $y_{ï}' = R\omega cos\,\omega t = R\omega cos\,\omega t_0 = R\omega cos\,\varphi_0$. Отже, $v'(\varphi_0) = -y_{ï}' = -R\omega cos\,\varphi_0$. Аналогічно $u'(\varphi_0) = -x_{ï}' = R\omega sin\,\varphi_0$. Ці дані будуть вихідними умовами інтегрування. На рис. 2, а побудовано відносні траєкторії руху частинки при її попаданні на площину через 45^0 повороту цієї площини по колу в переносному русі. На рис. 2, б показано графік зміни відносної швидкості ковзання, яка визначається із формули (10). Отже, відносною траєкторією руху частинки після стабілізації руху стає коло, а відносна швидкість після цього стає сталою. В праці [5] знайдено залежність радіуса $\rho_в$ кола – траєкторії відносного руху частинки після стабілізації руху, від R, f і ω:

$$\rho_{â} = R\sqrt{1-\left(\frac{fg}{R\omega^2}\right)^2}\ . \tag{18}$$

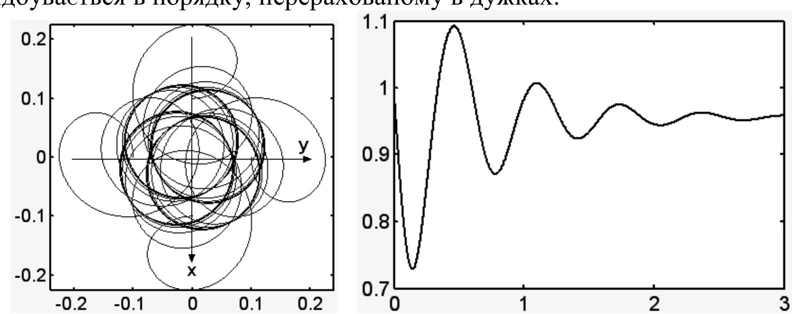
Із (18) випливає, що при заданих величинах R і f є критичне значення кутової швидкості ω, при якій відносний рух можливий. При меншій кутовій швидкості коливання площини від критичної ковзання не буде: частинка «прилипне» до площини. При збільшенні кутової швидкості ω змінюються кінематичні характеристики частинки: радіус $\rho_в$ кола відносного руху збільшується і наближається до кола переносного руху (рис. 3, а), а час стабілізації відносної швидкості зростає (рис. 3, б).



а б

Рис. 2 – Кінематичні характеристики відносного руху при $\omega=6\ c^{-1}$, $R=0,1$ *м*, $f=0,3$: а – відносні траєкторії беруть свій початок з кола переносного руху площини через 45^0; б – графік зміни відносної швидкості $V_в$

З'ясуємо закономірності руху частинки по похилій площині, яка коливається. Дослідження показали, що при нахилі площини, починаючи від горизонтального положення, траєкторії відносного руху із кіл перетворюються в криві, подібні до циклоїд (подовженої, звичайної, укороченої), причому їх перетворення у міру нахилу площини відбувається в порядку, перерахованому в дужках.

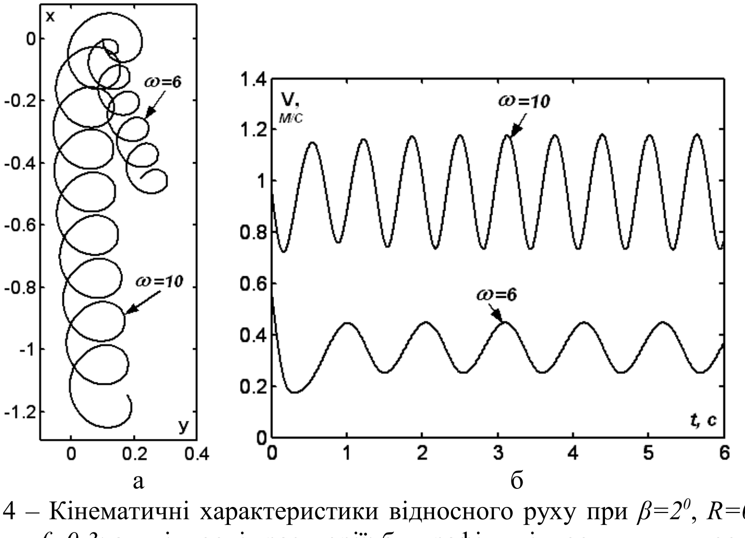


а б

Рис. 3 – Кінематичні характеристики відносного руху при $\omega=10\ c^{-1}$, $R=0,1$ *м*, $f=0,3$: а – відносні траєкторії беруть свій початок з кола переносного руху площини через 90^0; б – графік зміни відносної швидкості $V_в$

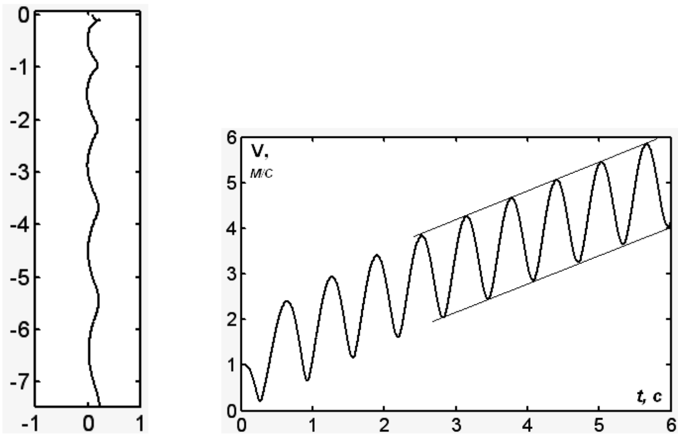
На рис. 4 побудовані відповідні графіки траєкторій і швидкостей для $\omega=6\ c^{-1}$ і $\omega=10\ c^{-1}$ при нахилі площини $\beta=2^0$. Як і для горизонтальної площини, у міру збільшення кутової швидкості ω, величина відносних коливань збільшується, причому їх напрям поширення не збігається із лінією найбільшого нахилу, проте, у міру збільшення кутової швидкості все більше до неї наближається. При великих кутах нахилу площини в початкових умовах потрібно враховувати швидкість руху частинки у вертикальному напрямі вниз в момент попадання на площину (V_0). Відносна швидкість ковзання буде збільшена на складову $V_0\sin\beta$, тобто $u'(\varphi_0) = R\omega \sin\varphi_0 - V_0 \sin\beta$. Ця складова відіграє свою роль тільки на початку руху. На рис. 4 показано графіки після стабілізації руху. Відносна швидкість частинки змінюється подібно до синусоїди, причому максимальні і мінімальні її значення залишаються сталими. Очевидно, що коливальний рух частинки в напрямі, близькому до лінії найбільшого нахилу, відбувається рівномірно, тобто швидкість поширення коливань є сталою. Якщо збільшити кут нахилу площини, наприклад, до $\beta=20^0$, то характер коливань змінюється (рис. 5). Траєкторія стає подібною до укороченої циклоїди із кроком, що зростає (рис. 5, а), а відносна швидкість при однаковій амплітуді змінюється так, що екстремальні її значення зростають за лінійним законом (рис. 5, б). Це означає, що коливання поширюються прискорено.

Виникає питання: за якого значення кута β характер поширення коливань переходить від рівномірного до прискореного. Можна припустити, що такою межею є кут β, рівний кутові тертя, тобто β=Arctg$f$ (при $f=0,3$ $\beta=16,7^0$). Проте, це не так, оскільки при цьому куту коливання поширюються прискорено. Очевидно, що кут β буде меншим від кута тертя.



а б

Рис. 4 – Кінематичні характеристики відносного руху при $\beta=2^0$, $R=0,1$, $f=0,3$: а – відносні траєкторії; б – графіки відносних швидкостей



а б

Рис. 5 – Кінематичні характеристики відносного руху при $\beta=20^0$, $R=0,1$, $\omega=10$ c^{-1}, $f=0,3$: а – відносна траєкторія; б – графік зміни відносної швидкості

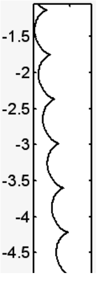
Методом підбору його було знайдено: $\beta=15,7^0$. В цьому випадку траєкторією є крива, подібна до укороченої циклоїди (рис. 6, а). Відносна швидкість стабілізується таким чином, що її величина змінюється в межах 1…3 м/с (рис. 6, б). Дослідження показали, що межею між рівномірними коливаннями частинки і прискореними є кут нахилу площини, дещо менший від кута тертя.

а б

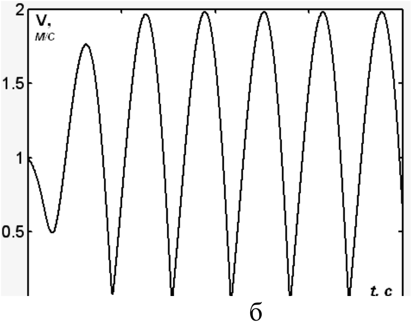
Рис. 6 – Кінематичні характеристики відносного руху при $\beta=15,7^0$, $R=0,1$, $\omega=10$ c^{-1}, $f=0,3$: а – відносна траєкторія; б – графік зміни відносної швидкості

Як показано на рис. 4 і 6 у міру збільшення кута нахилу площини траєкторія частинки змінює свою форму: із подовженої циклоїди перетворюється в укорочену. Логічно припустити, що при певному проміжному кутові β вона може бути звичайною циклоїдою. Такий проміжний кут було знайдено теж методом підбору: $\beta=11^0$. Характерною ознакою такого коливання частинки є те, що в точках звороту траєкторії частинка різко змінює напрям руху (рис. 7, а), що неможливо без зупинки. На графіку зміни відносної швидкості видно, що її величина змінюється в межах *0…2 м/с* (рис. 7, б), тобто, в точці звороту швидкість дорівнює нулю.

Висновки. З'ясовано закономірності відносного руху частинки по шорсткій похилій площині, всі точки якої в коливальному русі описують кола в цій же площині. При кутові нахилу $\beta=0^0$, тобто, для горизонтальної площини, частинка у відносному русі описує коло при досягненні мінімальної кутової швидкості коливання площини. При збільшенні кутової швидкості радіус кола – траєкторії відносного руху – зростає, наближаючись до радіуса кола переносного руху коливання площини. При нахилі площини, починаючи від горизонтального положення, траєкторії відносного руху із кіл перетворюються в криві, подібні до циклоїд (подовженої, звичайної, укороченої), причому їх перетворення у міру нахилу площини відбувається в порядку, перерахованому в дужках. У міру збільшення кутової швидкості ω крок і амплітуда відносних коливань частинки збільшується, причому



а



б

Рис. 7 – Кінематичні характеристики відносного руху при $\beta=11^0$, $R=0,1$, $\omega=10\ c^{-1}$, $f=0,3$: а – відносна траєкторія; б – графік зміни відносної швидкості

їх напрям поширення не збігається із лінією найбільшого нахилу, проте у міру збільшення кутової швидкості все більше до неї наближається. До моменту досягнення граничного значення кута нахилу β, який є дещо меншим від кута тертя, коливальний рух частинки в напрямі, близькому до лінії найбільшого нахилу, відбувається рівномірно, тобто швидкість поширення коливань є сталою. Відносна швидкість частинки змінюється подібно до синусоїдального закону, причому максимальні і мінімальні її значення залишаються сталими. При подальшому збільшенні кута нахилу β крок траєкторії стає змінним, тобто він зростає, а відносна швидкість при однаковій амплітуді змінюється так, що екстремальні її значення зростають за лінійним законом тобто коливання поширюються прискорено.

Література

1. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – К.: УАСХН, 1960. –283 с.

2. Заика П.М. Избранные задачи земледельческой механіки / П.М. Заика. – К.: Изд–во УСХА, 1992. – 507 с.

3. Гортинский В.В. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях / В.В. Гортинский, А.Б. Демский, М.А. Борискин. – М.: Колос, 1980. – 304 с.

4. Блехман И.И. Вибрационное перемещение / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе. – М.: Наука, 1964. – 410 с.

5. Войтюк Д.Г. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій площині, яка здійснює горизонтальні криволінійні поступальні коливання / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Техніка АПК. –2004. – №№ 10–11. – С. 26 – 28.

Рецензент д.т.н., проф. Б.М. Гевко