УДК 622.331

© Р.А. Хлопецький
Луцький національний технічний університет,

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПО ПОВЕРХНІ СПІРАЛІ АРХІМЕДА

У статті запропоновано математичне моделювання переміщення сапропелю через рух матеріальної точки лопаттю у вигляді спіралі Архімеда у процесі розробки озерних родовищ.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, РУХ, СПІРАЛЬ АРХІМЕДА, МАТЕРІАЛЬНА ТОЧКА.

Постановка проблеми. На сучасному етапі розвитку Україна перебуває у стані перехідних умов господарювання. За таких умов агропромисловий комплекс вимагає дешевих і якісних органічних добрив та добрив на основі органічної речовини. Одним із таких добрив можуть стати озерні сапропелі, запаси на території нашої держави яких дозволяють забезпечити агропромисловий комплекс органічними добривами на багато років. Необхідність добування озерних сапропелів обумовлюється також природньо-екологічним фактором, оскільки більшість озер Західного регіону України перебувають на стадії зникнення. Внаслідок швидкого замулення втрачається здатність озера до самоочищення і воно замулюється. Такі озера потребують негайного відновлення із збереженням ресурсного потенціалу водойми, що вимагає особливого підходу до процесів добування донних відкладів, їх переробки та подальшого використання [1].

Запропонований нами добувний модуль озерних сапропелів [2] здатен вирішити проблеми добування озерних сапропелів, та складність процесу і комбінованість декількох операцій вимагають значних теоретичних досліджень, зокрема особливої уваги вимагає розрахунок параметрів і процесу добуваючої фрези, оскільки вона є основним робочим органом.

Аналіз останніх досліджень та публікацій показав відсутність існуючих теоретичних досліджень процесу переміщення озерного сапропелю по криволінійній поверхні, зокрема за умов добування середнього шару сапропелю добуваючою фрезою, лопаті якої виконано у формі сектора спіралі Архімеда під шаром води. Тому раціонально розробити математичну модель переміщення матеріальної точки по внутрішній поверхні сектора спіралі Архімеда.

Метою дослідження є розробка математичної моделі руху матеріальної точки по внутрішній поверхні лопасті фрези, яка виконана у вигляді сектора спіралі Архімеда.
Зведемо згадану задачу до її математичного формулювання.

Формулювання задачі. Пласка крива, розміщена у вертикальній площині Oxy і задана її графіком $r = r(\varphi)$ $\left(\frac{dr}{d\varphi} \le 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ у полярній системі координат $Or\varphi$, обертається у своїй площині за годинниковою стрілкою зі сталою кутовою швидкістю ω. У початковий момент часу $t = 0$ у деякому місці кривої поміщено матеріальну точку масою m, що знаходиться у спокої відносно деякої абсолютної інерційної системи координат. Коефіцієнт тертя ковзання між матеріальною точкою і кривою дорівнює f. Пришвидшення вільного падіння g. На точку також діє виштовхувальна сила Архімеда пропорційна до ваги витісненої рідини, тобто $mg\frac{d_s}{d_w}$, де d_s – густина сапропелю, d_w – густина води, в яку він занурений. Знайти рівняння руху матеріальної точки.

Розв'язування задачі. Вважатимемо, що матеріальна точка не відривається від кривої, і тому розглядатимемо рух цієї точки у неінерційній системі координат, незмінно пов'язаній із заданою кривою. Центр системи відліку помістимо в нерухому точку O. Оскільки траєкторія точки, відповідно до умови задачі задана в полярній системі координат, то введемо у розгляд систему одиничних ортогональних векторів e_r та e_φ, спрямованих відповідно вздовж радіуса-вектора точки та перпендикулярно до нього у напрямі відліку полярного кута φ (див. рис. 1).

Відповідно до [3], $\frac{de_r}{d\varphi} = e_\varphi$, $\frac{de_\varphi}{d\varphi} = -e_r$. Додатково введемо орти натуральної системи координат: нормаль n, спрямовану у напрямі найбільшої увігнутості траєкторії, та дотичну τ. Ці вектори пов'язані із векторами e_r та e_φ залежностями:

$$\tau = \left(r'_\varphi(\varphi)e_r + r(\varphi)e_\varphi\right)\Big/J(\varphi);\ n = \left(-r(\varphi)e_r + r'_\varphi(\varphi)e_\varphi\right)\Big/J(\varphi),$$

де $J(\varphi)=\sqrt{\left[r(\varphi)\right]^2+\left[r'_\varphi(\varphi)\right]^2}$ – якобіан; штрихами позначено похідні за змінними, що розташовані в індексі, тобто $r'_\varphi=\dfrac{dr}{d\varphi}$.

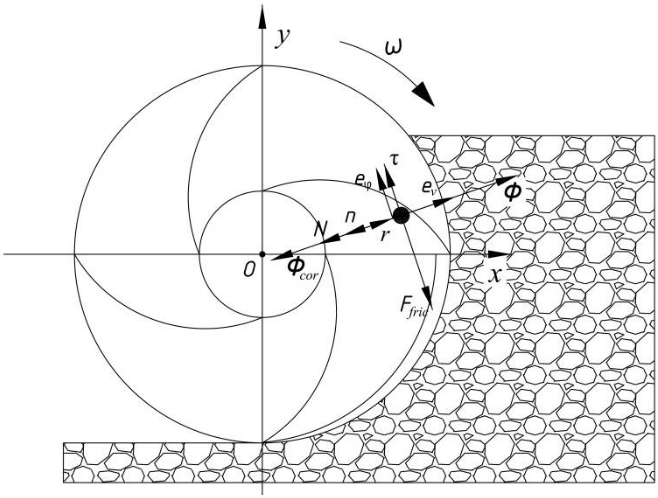

Рис. 1 – Схема дії сил на матеріальну точку, яка рухається криволінійною поверхнею

Відносна швидкість матеріальної точки, відповідно до означення [4], дорівнює:

$$v_{rel}=\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(re_r\right)=\frac{dr}{dt}e_r+r\frac{de_r}{dt}=\dot\varphi\left(r'_\varphi(\varphi)e_r+r(\varphi)e_\varphi\right)=\dot\varphi J(\varphi)\tau\,, \quad (1)$$

Тут $\dot\varphi=\dfrac{d\varphi}{dt}$ – похідна за часом від полярного кута φ, що задає розташування матеріальної точки на її траєкторії.

Відповідно до (1) та означення [4], відносне пришвидшення матеріальної точки дорівнює:

$$a_{rel}=\frac{dv_{rel}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\dot\varphi\left(r'_\varphi(\varphi)e_r+r(\varphi)e_\varphi\right)\right]=$$

$$=\ddot\varphi J(\varphi)\tau+(\dot\varphi)^2\left[\left(r''_\varphi(\varphi)-r(\varphi)\right)e_r+2r'_\varphi(\varphi)e_\varphi\right]=$$

$$=\left[\ddot\varphi J(\varphi)+(\dot\varphi)^2\alpha(\varphi)\right]\tau+\frac{\left(\dot\varphi J(\varphi)\right)^2}{\rho(\varphi)}n, \quad (2)$$

де $\alpha(\varphi)=r'_{\varphi}(\varphi)\left(r''_{\varphi}(\varphi)+r(\varphi)\right)\Big/J(\varphi)$;

$\rho=\left[J(\varphi)\right]^{3}\Big/\left(r(\varphi)\left[r(\varphi)-r''_{\varphi}(\varphi)\right]+2\left[r'_{\varphi}(\varphi)\right]^{2}\right)$ – радіус кривини траєкторії.

Переносне (транспортне) пришвидшення (тобто пришвидшення, зумовлене обертанням системи координат разом із кривою) для матеріальної точки дорівнює:

$$a_{tr}=-\omega^{2}r(\varphi)e_{r} \tag{3}$$

і спрямоване до центра O обертання, оскільки кутове пришвидшення системи координат, незмінно пов'язаної з кривою, відповідно до умови задачі дорівнює нулю ($\omega=const$, $\varepsilon=\dot{\omega}=0$).

Коріолісове пришвидшення матеріальної точки обчислимо із урахуванням того, що вектор переносної кутової швидкості, відповідно до умови задачі, дорівнює $\omega_{tr}=\omega\left[n\times\tau\right]$. Тобто коріолісове пришвидшення точки, відповідно до означення [4], дорівнює:

$$a_{cor}=2\left[\omega_{tr}\times v_{rel}\right]=2\omega J(\varphi)\dot{\varphi}\left[\left[n\times\tau\right]\times\tau\right]=$$
$$=-2\omega J(\varphi)\dot{\varphi}\left[\tau\times\left[n\times\tau\right]\right]=-2\omega J(\varphi)\dot{\varphi}n\ . \tag{4}$$

Тут символом « $\times$ » позначено операцію векторного добутку.

Отже, відповідно до (3) і (4) та принципу Даламбера [4] переносна та коріолісова сили інерції дорівнюють:

$$\Phi_{tr}=-ma_{tr}=m\omega^{2}r(\varphi)e_{r}\,,\ \Phi_{cor}=-ma_{cor}=2m\omega J(\varphi)\dot{\varphi}n\ . \tag{5}$$

Окрім сил інерції (5) на матеріальну точку діють нормальна реакція в'язі (кривої):

$$N=Nn\,, \tag{6}$$

сила тертя ковзання, що відповідно до закону Кулона [4] вважається рівною:

$$F_{fric}=-fN\,sign\left(v_{rel}\times\tau\right)\tau=-fN\,sign\left(\dot{\varphi}\right)\tau\,, \tag{7}$$

та сила ваги і сила Архімеда матеріальної точки, сумарний вектор яких у вибраній неінерційній системі координат має вигляд:

$$G=mg\left(1-\frac{d_{s}}{d_{w}}\right)\left[\sin(\omega t-\varphi)e_{r}-\cos(\omega t-\varphi)e_{\varphi}\right]. \tag{8}$$

Відповідно до другого закону Ньютона [4], записаного для неінерційної системи відліку, відносне пришвидшення матеріальної точки пропорційне до векторної суми активних сил, реакцій в'язей та сил інерції, що діють на неї, тобто:

$$ma_{rel}=F_{fric}+G+N+\Phi_{tr}+\Phi_{cor}\,. \tag{9}$$

Запишемо векторну рівність (9) у проекціях на осі натуральної системи координат, означеної векторами (n,τ). Для цього помножимо скалярно рівність (9) спочатку на τ, а потім на n із урахуванням таких залежностей:

$$n\cdot n=1,\ \tau\cdot\tau=1,\ n\cdot\tau=0,\ e_r\cdot e_r=1,\ e_\varphi\cdot e_\varphi=1,\ e_r\cdot e_\varphi=0,$$

$$n\cdot e_r=\left(-r(\varphi)e_r+r'_\varphi(\varphi)e_\varphi\right)/J(\varphi)\cdot e_r=-r(\varphi)/J(\varphi);$$

$$n\cdot e_\varphi=\left(-r(\varphi)e_r+r'_\varphi(\varphi)e_\varphi\right)/J(\varphi)\cdot e_\varphi=r'_\varphi(\varphi)/J(\varphi);$$

$$\tau\cdot e_r=\left(r'_\varphi(\varphi)e_r+r(\varphi)e_\varphi\right)/J(\varphi)\cdot e_r=r'_\varphi(\varphi)/J(\varphi);$$

$$\tau\cdot e_\varphi=\left(r'_\varphi(\varphi)e_r+r(\varphi)e_\varphi\right)/J(\varphi)\cdot e_\varphi=r(\varphi)/J(\varphi).$$

У такий спосіб отримаємо рівняння відносного руху матеріальної точки уздовж кривої $r=r(\varphi)$:

$$\ddot{\varphi}J(\varphi)+(\dot{\varphi})^2\alpha(\varphi)=-f\tilde{N}\,sign(\dot{\varphi})+$$

$$+\frac{g}{J(\varphi)}\left(1-\frac{d_s}{d_w}\right)\left[r'_\varphi(\varphi)sin(\omega t-\varphi)-r(\varphi)cos(\omega t-\varphi)\right]+$$

$$+\frac{\omega^2r(\varphi)r'_\varphi(\varphi)}{J(\varphi)}, \qquad (10)$$

де

$$\tilde{N}=\frac{N}{m}=\frac{(\dot{\varphi}J(\varphi))^2}{\rho(\varphi)}+\frac{[\omega r(\varphi)]^2}{J(\varphi)}-2\omega J(\varphi)\dot{\varphi}+$$

$$+\frac{g}{J(\varphi)}\left(1-\frac{d_s}{d_w}\right)\left[r(\varphi)sin(\omega t-\varphi)+r'_\varphi(\varphi)cos(\omega t-\varphi)\right]. \qquad (11)$$

Якщо матеріальна точка поміщена на криву без початкової швидкості в абсолютній системі координат, то початкові умови задачі, з урахуванням вибраних напрямів відліку кута φ та кутової швидкості ω обертання системи відліку, мають вигляд:

$$\varphi(0)=\varphi_0=0;\ v_{rel}(0)\times e_\varphi(\varphi_0)=\omega r(\varphi_0)\Rightarrow\dot{\varphi}(0)=\omega. \qquad (12)$$

Рівняння (10) необхідно розв'язувати з урахуванням умови $\tilde{N}\geq 0$, тобто того, що матеріальна точка не відривається від поверхні кривої.

Диференціальне рівняння (10) є нелінійним диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами, тому для його розв'язування використовуються числові методи. Оскільки в (10) присутня розривна функція *sign*, то для забезпечення стійкості розв'язку необхідно вибирати числову схему зі сталим кроком. Отже, оптимальним є розв'язування задачі методом Рунге-Кута 4 порядку.

Реалізація даної задачі в середовищі MathLab з урахуванням прийнятих, та отриманих в результаті теоретичних досліджень параметрів показала дійсність робочого процесу запропонованого добуваючого органу, але забезпечення бажаного переміщення сапропелю по спіралі Архімеда можливе при збільшенні частоти обертання фрези із запропонованих 15хв$^{-1}$ до 20хв$^{-1}$, а стабільний робочий процес можливий при 25хв$^{-1}$, що допускається запропонованими нормами.

Розв'язок математичної моделі дав можливість отримати наступні графічні залежності, а саме: кутове розташування точки на лопаті фрези в залежності від часу (рис. 2), відносна кутова швидкість руху стосовно лопаті фрези (рис. 3) та траєкторія переміщення точки в абсолютних координатах (рис. 4)

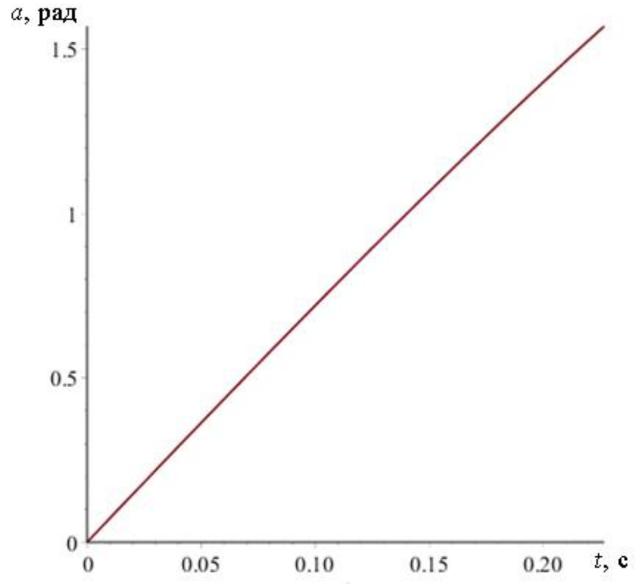

Рис. 2 – Кутове розташування точки на лопаті фрези в залежності від часу

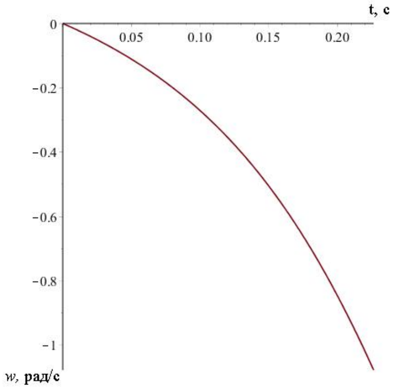

Рис. 3 – Відносна кутова швидкість руху стосовно лопаті фрези

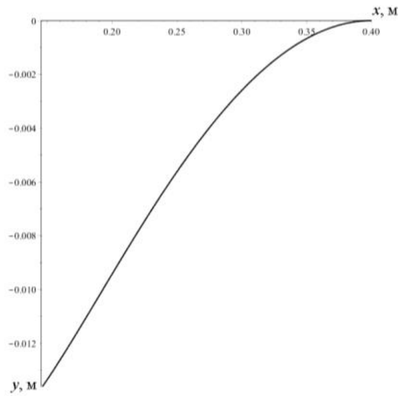

Рис. 4 – Траєкторія переміщення точки в абсолютних координатах

Отже, можна зробити **висновок**, що у запропонованому способі добування сапропелю з-під шару води новим робочим органом добувного модуля для його реалізації є реальним процес відокремлення пласта сапропелю та переміщення його до центра обертання фрези, що підтверджує математична модель руху матеріальної точки по поверхні лопаті у вигляді спіралі Архімеда із зміною частоти обертання добуваючої фрези у сторону збільшення.

Література

1. Шевчук М.Й. Сапропелі України: запаси, якість та перспективи використання: Монографія. – Луцьк: Надстир’я, 1996. – 384 с.

2. Патент України на корисну модель № 60252 «Установка для добування спропелю» МПК: E02F 3/46 (2006.01), 2011 р.

3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – Т. 1. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 478 с.

4. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – М.: ЧеРо, 1999 – 572 с.

Рецензент д.т.н., проф. В.Ф. Дідух