УДК 531/534

© В.П. Ковбаса, д.т.н., В.П. Курка, к.т.н., Алі Ахмед Кадем
Національний університет біоресурсів і природокористування України

ПРО ПОДОЛАННЯ ТРУДНОЩІВ ПРИ ВИРІШЕННІ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ПРУЖНОСТІ

Представлений спосіб вирішення завдань взаємодії абсолютно жорсткого деформатора довільної геометричної форми з деформованим середовищем, що дозволяє визначати напруження або деформації (залежно від заданих умов) на поверхні контакту.

ДЕФОРМАТОР, КОНТАКТНА ЗАДАЧА, ПЕРЕМІЩЕННЯ, ДЕФОРМАЦІЇ.

Постановка проблеми. Недоліком відомих рішень контактних задач є надзвичайна складність, а у багатьох випадках і неможливість інтегрування потенційних гармонійних функцій при нелінійності функції поверхні контакту. При цьому саме такі завдання є найбільш поширеними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Відомі рішення контактних задач для пружного середовища [1,2,3] не являются адекватними для випадків, коли середовище (напівплощина для постановки задачі у площині) обмежена абсолютно твердою опорою, оскільки не забезпечує виконання граничних умов. Тоді вирішення для середовища при зміні $x=\{-\infty;\infty\}$, $z=\{0;H\}$, чи $x=\{0;\infty\}$, $z=\{0;H\}$ пропонується вирішувати з використанням гармонічних потенціальних функцій:

$$p(x,z) = ln\left[ch\left[\frac{\pi(x-\xi)}{H}\right] - cos\left[\frac{\pi(z-\zeta)}{H}\right]\right];$$

$$p(x,z) = sin\left[\frac{\pi(z-\zeta)}{H}\right]\frac{1}{ch\left[\frac{\pi(x-\xi)}{H}\right] - cos\left[\frac{\pi(z-\zeta)}{H}\right]}. \qquad [2].$$

Таке рішення для внутрішньої задачі першого типу з кінематичними крайовими умовами , тобто заданою функцією:

$$U(x,z)\big|_{x=0,z=0} = \{u = f(\xi,\zeta), w = f(\xi,\zeta)\};$$

$$U(x,z)\big|_{x=\infty,z=H} = \{u = 0, w = 0\}. \qquad (1)$$

не відповідає реальному, оскільки, на поверхні контакту функція

$U(x,z)\big|_{x=0,z=0} \to \infty$, а при $U(x,z)\big|_{x=\infty,z=H} \neq 0$.

Така постановка завдання надзвичайно поширена в галузі механізації сільського господарства [4 - 6], переробки продукції агропромислового комплексу та інших областях. Простіше кажучи, завдання формулюється таким чином: на середовище (яке може бути формалізовано як ізотропне, і яке дозволяє застосовувати методи пружності) діє деформатор, форма якого, описується рівнянням поверхні: $F = f(\xi,\zeta)$, при цьому відомими крім його форми є умови на поверхні і на границях (1).

Завдання полягає в знаходженні можливих переміщень в межах середовища, деформацій, а при застосуванні фізичних рівнянь зв'язку деформацій з напруженнями в які входять механічні властивості даного середовища - компонентів напружень та розподілу сил по поверхні деформатора [7 - 8].

Рішення такого завдання дозволяє оптимізувати поверхню деформатора і кінематичні режими його дії з метою забезпечення бажаних змін властивостей середовища при мінімальних витратах енергії.

Мета дослідження - знаходження можливих переміщень в межах середовища, деформацій, а при застосуванні фізичних рівнянь зв'язку деформацій з напруженнями в які входять механічні властивості даного середовища - компонентів напружень та розподілу сил по поверхні деформатора.

Результати дослідження. Розглянемо плоску постановку задачі, при якій однорідні рівняння статики можна задовольнити шляхом вираження напруження $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ через одну функцію напружень [1].

Два однорідних рівняння статики:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0\ ,\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

тотожно задовольняються за допомогою гармонійних потенційних функцій:

$$\sigma_x=\frac{\partial p1}{\partial z}\ ,\ \tau_{zx}=\frac{\partial p1}{\partial x}\ ,\ \tau_{xz}=\frac{\partial p2}{\partial z}\ ,\ \sigma_z=\frac{\partial p2}{\partial x}\ ,$$

при цьому умова $\tau_{zx}=\tau_{xz}$ приводить до рівняння того ж виду, що і (2):

$$\frac{\partial p1}{\partial x}+\frac{\partial p2}{\partial z}=0\ .$$

Тому , вводячи до розгляду нову гармонійну потенційну функцію $p(x,z)$:

$$p1=\frac{\partial p0}{\partial z}\ ,\ p2=-\frac{\partial p0}{\partial x}\ .$$

Звідки основні співвідношення для напружень виражаються таким чином:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 p0}{\partial z^2}\ ,\ \tau_{zx}=-\frac{\partial^2 p0}{\partial z\,\partial x}\ ,\ \sigma_z=\frac{\partial^2 p0}{\partial x^2}\ . \qquad (3)$$

Рівняння рівноваги (2) і сумісності деформацій $\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z\,\partial x}$ будуть тотожно задовольнятися, якщо:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 p0}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 p0}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 p0}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 p0}{\partial x^2}\right)=0\ .$$

Узагальнений закон Гука для плоского напруженого стану матиме вигляд:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}\left(\left(1-\nu^2\right)\sigma_x-\nu\left(1+\nu\right)\sigma_z\right);$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{E}\left(\left(1-\nu^2\right)\sigma_z-\nu\left(1+\nu\right)\sigma_x\right);$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{xz}\ , \qquad (4)$$

де ν - коефіцієнт Пуассона, E - модуль пружності лінійних деформацій.

З урахуванням (3) деформації ε_x, ε_z виразяться через потенціальні гармонічні функції таким чином:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{E}\left((1+\nu)\frac{\partial^2 p0}{\partial x^2} - (1-\nu^2)\frac{\partial^2 p0}{\partial z^2} \right);$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{E}\left((1+\nu)\frac{\partial^2 p0}{\partial z^2} - (1-\nu^2)\frac{\partial^2 p0}{\partial x^2} \right). \qquad (5)$$

Після інтегрування першого рівняння (6) по x, а другого по z, отримаємо вирази:

$$u = C1 - \frac{1}{E}\left(\nu\frac{\partial p0}{\partial x} + x(-1+\nu)\frac{\partial^2 p0}{\partial z^2} \right);$$

$$w = C2 - \frac{1}{E}\left(\nu\frac{\partial p0}{\partial z} + x(-1+\nu)\frac{\partial^2 p0}{\partial x^2} \right);$$

$$w = C2 - \frac{1}{E}\left(\nu\frac{\partial p0}{\partial z} + x(-1+\nu)\frac{\partial^2 p0}{\partial x^2} \right), \qquad (6)$$

де $C1 = u0$, $C2 = w0$ – компоненти швидкостей на поверхні контакту.

Потенційна гармонійна функція, яка задовольняє граничні умови і може бути прийнята у вигляді логарифмічного потенціалу (рис. 1):

$$p0 = 2Gk\,lg[(z-\zeta+1-H)^2 + (x-\xi)^2],\ k = 1/2\pi. \qquad (7)$$

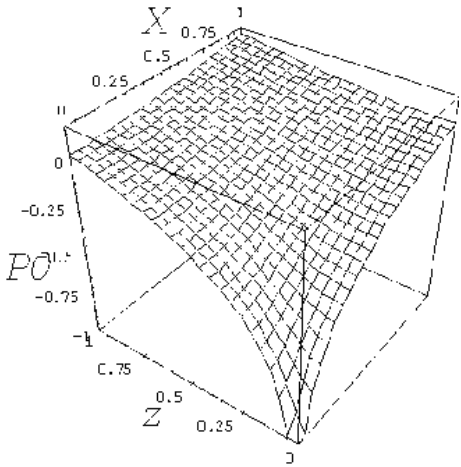


Рис. 1 – Вигляд функції $p0$

Для випадку, коли на поверхні контакту відомі умови вигляду $U(x,z)\big|_{x=0,z=0} = \{u = f(\xi,\zeta), w = f(\xi,\zeta)\}$, компоненти швидкостей переміщення середовища визначаться, як криволінійні інтеграли виду:

$$u = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(u_0(\xi,\zeta) - u_0(\xi,\zeta)\frac{1}{E}\left(\nu \frac{\partial p0}{\partial x} + x(-1+\nu)\frac{\partial^2 p0}{\partial z^2} \right) \right) d\zeta;$$

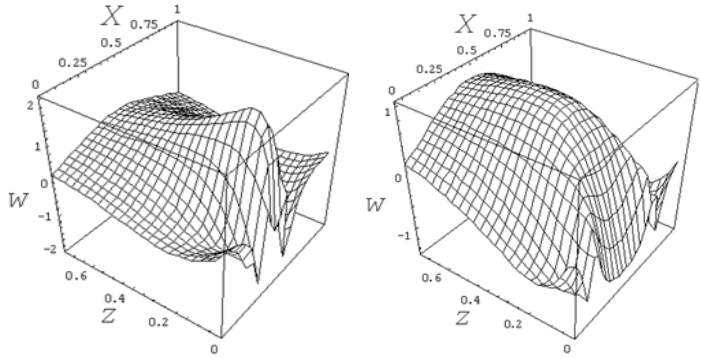
$$w = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(w_0(\xi,\zeta) - w_0(\xi,\zeta)\frac{1}{E}\left(\nu \frac{\partial p0}{\partial z} + x(-1+\nu)\frac{\partial^2 p0}{\partial x^2} \right) \right) d\xi, \quad (8)$$

де $u_0(\xi,\zeta)$, $w_0(\xi,\zeta)$ – компоненти переміщень на поверхні контакту деформатор - середовище.

Деформації середовища визначаються як:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (9)$$

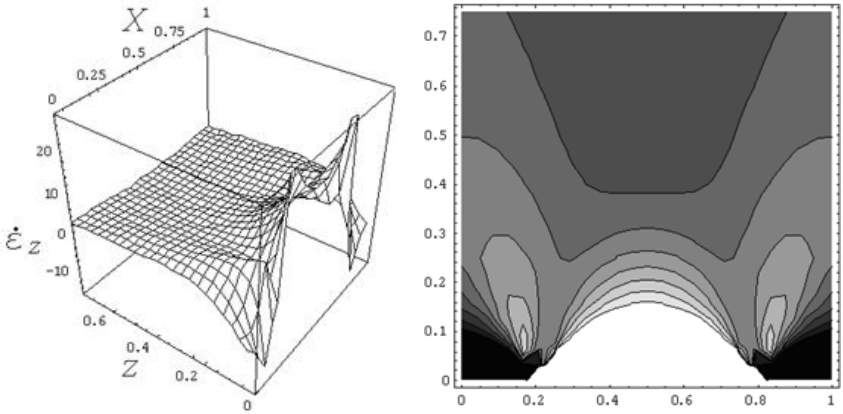
Наявність функцій деформацій і фізичних рівнянь зв'язку напружень з деформаціями дозволяє визначити розподіл напружень в середовищі. Загальний вигляд функції розподілу деформацій ε_z представлений на рис. 3. Таким чином, визначаються функції розподілу переміщень, деформацій і напружень в пружною середовищі при заданих поверхневих умовах у вигляді переміщень (швидкостей переміщень) (рис. 2).



а) б)

Рис. 2 – Вигляд функції w – швидкості пружних переміщень при навантаженні вертикальним плоским штампом (розміром $\xi_1 \div \xi_2$) з швидкістю переміщення ***V*** в напрямку осі OZ: а – ***V=2***, $\xi_1 = 0.4$, $\xi_2 = 0.6$; б – ***V=1***, $\xi_1 = 0.2$, $\xi_2 = 0.8$

У багатьох випадках рішення задач контактної взаємодії важливим буває необхідність знань про вид розподілу напружень (тиску) на поверхні контакту деформатори довільної геометричної форми – середовище (рис. 3). Контактний тиск визначається при знанні фізичних рівнянь зв'язку напружень з деформаціями при використанні рівнянь (9) за умови, що $x-\xi=\delta, z-\zeta=\delta$, де δ – мінімальна величина, яка дозволяє позбавитися сингулярності функцій (9).



а) б)

Рис. 3 – Вигляд функції розподілу деформацій ε_z при $V=1$, $\xi_1=0.2$, $\xi_2=0.8$: а – абсолютні значення, б – ізолінії деформацій

При вирішенні конкретних завдань контактної взаємодії, особливо коли функцій поверхні $F=f(\xi,\zeta)$ не є лінійною, виникають , майже , непереборні труднощі при інтегруванні функцій (8). Для подолання цих труднощів при визначені розподілу деформацій (напружень) на поверхні контакту можна застосувати таку процедур :

- визначаються компоненти переміщень (швидкостей) (кінематичні початкові умови);
- шляхом диференціювання визначаються функції:

$$du=u_0(\xi,\zeta)-u_0(\xi,\zeta)\frac{1}{E}\left(\nu\frac{\partial p0}{\partial x}+x(-1+\nu)\frac{\partial^2 p0}{\partial z^2}\right),$$

$$dw=w_0(\xi,\zeta)-w_0(\xi,\zeta)\frac{1}{E}\left(\nu\frac{\partial p0}{\partial z}+x(-1+\nu)\frac{\partial^2 p0}{\partial x^2}\right);$$

– шляхом диференціювання визначаються компоненти деформацій:

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial du}{\partial x}; d\varepsilon_z = \frac{\partial dw}{\partial z};$$

– визначається вид функцій $d\varepsilon_{x0} = d\varepsilon_x \big|_{x-\xi=\delta, z-\zeta=\delta}$, $d\varepsilon_{z0} = d\varepsilon_z \big|_{x-\xi=\delta, z-\zeta=\delta}$;

– шляхом інтегрування визначаються функції типу: $\varepsilon_{x0} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \varepsilon_{x0} d\zeta$, $\varepsilon_{z0} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\varepsilon_{z0} d\xi$, які є нічим іншим, як деформаціями середовища на поверхні контакту.

Слід зазначити, що за досвідом розв'язання контактних задач інтегрування останніх виразів не викликає істотних труднощів.

Висновок. Представлений спосіб вирішення завдань взаємодії абсолютно жорсткого деформатора довільної геометричної форми з деформованим середовищем дозволяє визначати напруги або деформації (залежно від заданих умов) на поверхні контакту.

Література

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т.2. Г.: Мир, 1969.- 864 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.:Мир, 1989.- 510 с.
3. Дубровін В.О., Ковбаса В.П. Фізичні рівняння формалізації ґрунту// Наук. вісник НАУ.- Київ –2003.–Вип. 60. - С.172-176.
4. Про критерій міцності та співвідношення між компонентами сипкого середовища/ Ковбаса В.П., Ярошенко В.В.// Загальнодержавний міжвідомчий науково-технічний збірник: Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. – Кіровоград: КНТУ.-2010.-Вип. 40. Част. 1. – С.35-39.
5. Шелудченко Б.А., Котков В.І., Шубенко В.О., Забродський П.М. Напружено – деформований стан оброблюваного ґрунту і оптимізація кутових параметрів ґрунтообробних знарядь // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту – 1994, №1, с. 115-123.
6. Про визначення критерію вигляду напружено-деформованого стану суцільного середовища / Ковбаса В.П. //Вісник ХДТУСГ, „Підвищення надійності відновлюваних деталей машин” – Харків, 2001. – Вип. 8, т.2. – С. 79–82.

7. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 701 с.

8. Лурье А.И. Теория упругости. Г.:Наука, 1970.-940 с.

9. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. Г.:ФИЗМАТЛИТ, 2001.-576 с.