

УДК 539.375

© Ю.П. Фещук, к.т.н.

Луцький національний технічний університет

### **ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ РІВНОВАГИ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОЇ ТЕХНІКИ**

*Розглянуто тонкостінні елементи конструкцій сільськогосподарської техніки, які працюють під внутрішнім тиском, для яких задачу про граничну рівновагу пружно-пластичних оболонок з тріщинами використовується для дослідження ізотропних циліндричних оболонок із взаємодіючими наскрізними тріщинами. Числовий аналіз показав, що розтяг вздовж тріщини може впливати на її розкриття і, відповідно, на міцність оболонкової конструкції*

#### **ГРАНИЧНА РІВНОВАГА, ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА, ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ.**

**Постановка проблеми.** У зв'язку з інтенсифікацією ведення сільськогосподарських робіт значного поширення набули самохідні обприскувачі та розчинонасоси різноманітних конструкцій. Проте всі вони містять значну кількість тонкостінних труб та шлангів, які працюють в агресивному середовищі під тиском. Зважаючи на те, що по них транспортуються отрутохімікати, досить важливим є перевірка на відсутність внутрішніх дефектів, розмір яких перевищує граничний.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Для реалізації метод зведення задач про граничну рівновагу пружно-пластичних оболонок з тріщинами використовується для дослідження ізотропних циліндричних оболонок із взаємодіючими наскрізними тріщинами.

Особливості в околі точки зосереджених навантажень у функцій, що характеризують переміщення, зусилля та моменти в оболонках, вивчені в багатьох роботах [1, 2, 3, 5, 6, 7], проте пружно-пластична рівновага таких оболонок досліджена не в повній мірі.

**Мета дослідження.** Вивчається вплив кривини оболонки, параметра тонкостінності, кількості тріщин, їх взаємного розміщення та інших геометричних і фізико-механічних параметрів на розкриття берегів тріщин та розміри пластичних зон біля їх вершин в тонкостінних елементах конструкцій.

**Результати дослідження.** Розглянемо віднесену до ліній кривини  $\alpha$ ,  $\beta$  замкнуту нескінченну циліндричну оболонку із ідеально пружно-пластичного матеріалу з поздовжньою наскрізною тріщиною  $|\alpha| \leq \alpha_0$  ( $\alpha_0 = l_0 / R$ ,  $l_0$  – півдовжина тріщини). Нехай оболонка знаходиться під дією зовнішнього навантаження, а береги тріщини завантажені самозрівноваженими симетричними та антисиметричними відносно ліній тріщин зусиллями і моментами.

Пластичні зони, що виникають в процесі навантаження на продовженні тріщини у відповідності з припущеннями прийнятого аналога  $\delta_c$ -моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла замінимо розрізом, на берегах якого прикладені додаткові самозрівноважені зусилля і моменти еквівалентні реакції матеріалу пластичної зони на пружний об'єм. Пружно-пластична задача зведена до пружної задачі про граничну рівновагу циліндричної оболонки з тріщиною невідомої довжини  $2l_1$ , збільшеної на величину пластичних зон. На берегах тріщини умови самозрівноваженості приймають вигляд:

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) = N_2(\alpha, 0) &= \begin{cases} N_2^1(\alpha) - N_2^0(\alpha), & |\alpha| < \alpha_0, \\ N - N_2^0(\alpha), & \alpha_0 \leq |\alpha| \leq \alpha_1, \end{cases} \\ f_2(\alpha) = M_2(\alpha, 0) &= \begin{cases} M_2^1(\alpha) - M_2^0(\alpha), & |\alpha| < \alpha_0, \\ M - M_2^0(\alpha), & \alpha_0 \leq |\alpha| \leq \alpha_1, \end{cases} \\ f_3(\alpha) = S(\alpha, 0) &= \begin{cases} S^1(\alpha) - S^0(\alpha), & |\alpha| < \alpha_0, \\ S - S^0(\alpha), & \alpha_0 \leq |\alpha| \leq \alpha_1, \end{cases} \\ f_4(\alpha) = Q_2^*(\alpha, 0) &= \begin{cases} Q_2^{*1}(\alpha) - Q_2^{*0}(\alpha), & |\alpha| < \alpha_0, \\ Q - Q_2^{*0}(\alpha), & \alpha_0 \leq |\alpha| \leq \alpha_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

де  $N_2^0$ ,  $S^0$ ,  $Q_2^{*0}$ ,  $M_2^0$  – нормальне, зсувне і узагальнене перерізує зусилля та згинний момент в оболонці без тріщин;  $N_2^1$ ,  $S^1$ ,  $Q_2^{*1}$ ,  $M_2^1$  – відповідно ті самі зусилля та момент, прикладені до берегів реальної

тріщини;  $N, S, Q, M$  – невідомі величини зусиль та моменту, що відповідають реакції пластичної зони на пружну і задовольняють задану умову пластичності

$$F_p(N, M, S, Q, \sigma_T) = 0. \quad (2)$$

Умови (1), (2) записані для випадку, коли зовнішнє навантаження симетричне відносно лінії  $\alpha = 0$ , тобто в обох кінцях тріщини виникли однакові зони пластичності.

Поле деформацій в даному випадку приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^0(\alpha, \beta) &= \frac{1}{R} [v(\alpha)] \delta(\beta), \quad \varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{R} [u(\alpha)] \delta(\beta); \\ \chi_{22}^0(\alpha, \beta) &= \frac{1}{R} [\theta_2(\alpha)] \delta(\beta) + \frac{1}{R^2} [w(\alpha)] \frac{\partial}{\partial \beta} \delta(\beta); \\ 2\chi_{12}^0(\alpha, \beta) &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} [w(\alpha)] \delta(\beta), \quad \varepsilon_{11}^0(\alpha, \beta) = \chi_{11}^0(\alpha, \beta) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для побудови розв'язку задачі, що розглядається, використаємо вихідні рівняння в переміщеннях, які для даного випадку мають вигляд:

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w = q_k^0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Скориставшись операторним методом [9] і відкидаючи величини порядку  $C_i^2$  в порівнянні з одиницею, розв'язок системи диференціальних рівнянь (4), який зникає на безмежності, зобразимо так:

$$\begin{aligned} u &= R \sum_{j=2}^3 L_{ju} \varphi_j + P_{ju} \psi_j, \quad v = R \sum_{j=2}^3 L_{jv} \varphi_j + P_{jv} \psi_j; \\ w &= R \sum_{j=2}^3 L_{jw} \varphi_j + P_{jw} \psi_j. \end{aligned} \quad (5)$$

Зусилля і моменти визначаються за допомогою формул:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{D_0}{(1-\nu^2)R} [\partial_1 u + \nu(\partial_2 v + w) - \nu R \varepsilon_{22}^0]; \\ N_2 &= \frac{D_0}{(1-\nu^2)R} [\partial_2 v + w + \nu \partial_1 u - R \varepsilon_{22}^0]; \\ S &= \frac{Eh}{(1-\nu)R} [\partial_2 u + \partial_1 v - R \varepsilon_{12}^0]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= -D_0 c^2 \left[ \partial_1^2 w + \nu (\partial_2^2 w - \partial_2 \nu) + \nu R^2 \chi_{22}^0 \right]; \\ M_2 &= -D_0 c^2 \left[ \partial_2^2 w - \partial_2 \nu + \nu \partial_1^2 w + R^2 \chi_{22}^0 \right]; \\ H &= D_0 c^2 (1 - \nu) \left[ \partial_1 (\partial_2 w - \nu) + R^2 \chi_{12}^0 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Функції  $\varphi_j, \psi_j$  є ключовими функціями задачі, так як знаходження величин, що характеризують напружено-деформований стан оболонки, зводиться, як це видно з (5) та (6), до дії на них відповідних лінійних диференціальних операторів. Для визначення цих ключових функцій скористаємось  $2\pi$  періодичним фундаментальним розв'язком [4, 12] рівняння

$$D\Phi = \delta(\alpha - \xi)(\beta - \theta). \quad (7)$$

З цією метою замінимо  $\delta(\beta - \theta)$  її формальним розкладом в тригонометричний ряд

$$\delta_{2\pi}(\beta - \theta) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(\beta - \theta) \right]. \quad (8)$$

і відповідно розв'язок рівняння (7) шукатимемо у вигляді

$$\Phi(\alpha, \beta, \xi, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\delta_{on}}{2} \right) \Phi_n(\alpha, \xi) \cos n(\beta - \theta). \quad (9)$$

Тут  $\delta_{on}$  – символ Кронекера. Підставляючи тепер (8), (9) в рівняння (7) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових косинусах, отримуємо звичайні диференціальні рівняння для визначення функцій  $\Phi_n(\alpha, \xi)$

$$D_n \Phi_n(\alpha, \xi) = \delta(\alpha - \xi), \quad (10)$$

де

$$D_n = \frac{d^8}{d\alpha^8} - 4n^2 \frac{d^6}{d\alpha^6} + [6n^4 + c^{-2}] \frac{d^4}{d\alpha^4} - 4n^2 (n^2 - 1)^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} + n^4 (n^2 - 1)^2.$$

Використовуючи перетворення Фур'є, розв'язок рівняння (10) зобразимо так:

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{c^2 |z|^3}{12} - \frac{c^2 \sqrt{2c}}{4} \exp\left(-\frac{|z|}{\sqrt{2c}}\right) \left( \cos \frac{z}{\sqrt{2c}} + \sin \frac{|z|}{\sqrt{2c}} \right), \\ \Phi_n(z) &= \frac{1}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{g_{jn}} \exp(-a_{jn} |z|) (R_{jn} \cos b_{jn} z + T_{jn} \sin b_{jn} |z|) \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут

$$R_{jn} = \frac{b_{jn}C_{jn} - a_{jn}B_{jn}}{a_{jn}^2 + b_{jn}^2}, \quad T_{jn} = \frac{a_{jn}C_{jn} - b_{jn}B_{jn}}{a_{jn}^2 + b_{jn}^2};$$

$$B_{1n} = 2(P_{2n} - P_{1n})g_{1n}, \quad B_{2n} = 2(P_{1n} - P_{2n})g_{2n};$$

$$C_{1n} = (P_{2n} - P_{1n})^2 + g_{2n}^2 - g_{1n}^2, \quad C_{2n} = (P_{1n} - P_{2n})^2 + g_{1n}^2 - g_{2n}^2;$$

$$L_n = 2(B_{1n}^2 + C_{1n}^2), \quad P_{jn} = a_{jn}^2 - b_{jn}^2, \quad g_{jn} = 2a_{jn}b_{jn},$$

де  $a_{jn}, b_{jn}$  – відповідно уявна та дійсна частина комплексних коренів характеристичного рівняння.

$$y^8 + 4n^2 y^6 + (6n^4 + c^{-2})y^4 + 4n^2(n^2 - 1)y^2 + n^4(n^2 - 1)^2 = 0, \quad (12)$$

які, застосовуючи теорему Штурма, можна записати у вигляді

$$y_{1,2,3,4} = \pm(b_{1n} \pm ia_{1n}), \quad y_{5,6,7,8} = \pm(b_{2n} \pm ia_{2n}). \quad (13)$$

При  $n=1$  рівняння (12) має чотирикратний нульовий корінь, тобто  $a_{11} = b_{11} = 0$ . В цьому випадку розв'язок має вигляд

$$\Phi_1(z) = \left[ \exp(-a_{21}|z|) (R_{21} \cos b_{21}\alpha + T_{21} \sin b_{21}|\alpha|) / g_{21} + 2(z^2 (P_{21}^2 + g_{21}^2) / 12 + P_{21}) |z| \right] / L_1. \quad (14)$$

Використавши фундаментальний розв'язок (9), отримуємо формули для визначення ключових функцій  $\varphi_i, \psi_i$ .

Ключові функції  $\varphi_i, \psi_i$  запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi_j(\alpha, \beta) &= \varphi_j^0(\alpha, \beta) + \varphi_j^*(\alpha, \beta); \\ \psi_j(\alpha, \beta) &= \psi_j^0(\alpha, \beta) + \psi_j^*(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (15)$$

Функції  $\varphi_i, \psi_i$ , визначаються за допомогою фундаментального розв'язку рівняння (7), якщо в операторі  $D$  зберегти тільки старші похідні:

$$D^0 \Phi^0(\alpha, \beta, \xi, \theta) = \delta(\alpha - \xi) \delta(\beta - \theta). \quad (16)$$

$2\pi$  – періодичний розв'язок рівняння (16) з використанням перетворення Фур'є отримуємо у вигляді:

$$\Phi^0(\alpha, \beta, \xi, \theta) = \frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\delta_{on}}{2} \right) \Phi_n^0(\alpha - \xi) \cos kn(\beta - \theta). \quad (17)$$

*Система інтегральних рівнянь.* Підставляючи вирази для зусиль та моментів в умови на берегах фіктивної тріщини (1) і враховуючи, що [28, 32]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn|x|} \sin kn\beta = \frac{1}{2} \frac{\sin k\beta}{\operatorname{sh} kz - \cos k\beta}, \quad \frac{d}{dx} u(|x|) = \frac{du}{dx} \operatorname{sgn} x;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn|z|} \cos kn\beta = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} k|z|}{\operatorname{ch} kz - \cos k\beta} - \frac{1}{2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k n e^{-kn|z|} \sin kn\beta = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} k|z| \sin k\beta}{(\operatorname{ch} kz - \cos k\beta)^2};$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} |z|}{\operatorname{ch} z - \cos \beta} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{|z|}{2}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{sgn} x = 2\delta(x);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k n e^{-kn|z|} \cos kn\beta = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch} kz \cos k\beta - 1}{(\operatorname{ch} kz - \cos k\beta)^2} + \pi \delta(z) \delta(\beta), \quad (18)$$

після деяких перетворень, отримуємо систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь для визначення шуканих функцій  $[u'(\xi)]$ ,  $[v'(\xi)]$ ,  $[w'(\xi)]$ ,  $[\theta_2(\xi)]$ . Ця система розпадається на дві незалежні системи рівнянь. Перша система

$$\sum_{j=1,2}^{\alpha_1} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_j(\xi) K_{ij}(\xi - \alpha) d\xi = f_i^*(\alpha), \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad i = 1, 2 \quad (19)$$

відповідає випадку, коли оболонка знаходиться під симетричним відносно тріщини навантаженням, тобто  $f_3 = f_4 = 0$ , друга система

$$\sum_{j=3,4}^{\alpha_1} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_j(\xi) K_{ij}(\xi - \alpha) d\xi = f_i^*(\alpha), \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad i = 3, 4 \quad (20)$$

відповідає антисиметричному навантаженню, тобто  $f_1 = f_2 = 0$ .

Перетворимо систему (19) до системи інтегральних рівнянь з ядрами Коші. Для цього введемо нові змінні  $u = \xi / \alpha_1$ ,  $s = \alpha / \alpha_1$ . Після деяких перетворень систему (19) запишемо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_m(\alpha_1 u)}{u - s} du = G_m(s), \quad |s| < 1, \quad m = 1, 2. \quad (22)$$

Із зображення (22) бачимо, що ядра отриманої системи інтегральних рівнянь складаються із сингулярного ядра Коші та регулярної частини. Сингулярні інтеграли приймаються, як головне значення за Коші

$$\int_{-1}^1 \frac{\Omega_m}{u - s} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-1}^{s-\varepsilon} \frac{\Omega_m(u)}{u - s} du + \int_{s+\varepsilon}^1 \frac{\Omega_m(u)}{u - s} du \right], \quad s \in [-1, 1]. \quad (23)$$

Розв'язки систем сингулярних інтегральних рівнянь (19), (20) повинні задовольняти умови

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_m(\xi) d\xi = 0 \quad (m = 1, 2, 3, 4), \quad \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_4(\xi) d\xi d\xi = 0, \quad (24)$$

які забезпечують неперервність переміщень та кутів повороту у вершинах тріщин і випливають із співвідношень (3).

*Побудова розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь.* Зупинимось на випадку, коли оболонка і береги тріщин завантажені лише симетричними відносно лінії тріщини зусиллями та моментами, тобто  $f_3 = f_4 = 0$ . Тоді задача про напружений стан оболонки з поздовжньою тріщиною зводиться до сумісного розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (22), умов (24), умови пластичності та умов обмеженості напружень.

При побудові розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь з розривними функціями в правих частинах використаємо метод, запропонований в роботі [11] для одного рівняння аналогічного типу. З цією метою шукані функції  $\Omega_m$  запишемо у вигляді суми

$$\Omega_m(s) = h_m(s) + \psi_m(s) \quad (m = 1, 2). \quad (25)$$

Тут  $h_m(s)$  – розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} \int_{-1}^1 \frac{h_j(t)}{t-s} dt = f_i(s), \quad |s| \leq 1 \quad (i = 1, 2). \quad (26)$$

Для випадку, коли оболонка і береги тріщин завантажені симетрично відносно лінії  $\alpha = 0$ , шукані функції будуть непарні і тому розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь можна звести до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(p)}(t) &= \sum_{v=1}^{n_c/2} A_{i, 2v-1}^{(p)} T_{2v-1}(t); \\ A_{i, 2v-1}^{(p)} &= \frac{4}{nc} \sum_{l=1}^{n_c/2} \varphi_{iv}^{(p)} \cos[(2v-1)\vartheta_l]; \\ \varphi_{iv}^{(p)} &= \varphi_i^{(p)}(\cos \vartheta_v), \quad i = 1, 2, \quad p = 0, 1, 2, \quad l = \overline{1, n_c} / 2, \end{aligned} \quad (27)$$

де  $\varphi_{iv}^{(p)}$  – значення шуканих функцій у вузлових точках, визначаються із системи

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{v=1}^{n_c/2} (\alpha_{iv}^{ij} \varphi_{jv}^{(p)}) = g_{il}^{(p)}. \quad (28)$$

Інтегруючи отриманий розв'язок, розкриття тріщини  $\delta(\alpha, \gamma)$  в довільній її точці визначимо за формулою:

$$\delta(\alpha, \gamma) = [\nu(\alpha / \alpha_1)] + \gamma[\theta_2(\alpha / \alpha_1)], \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad |\gamma| < h. \quad (29)$$

Привівнявши праву частину (29) до величини критичного розкриття тріщини  $\delta_c$ , яке при заданих умовах навколишнього середовища та швидкості деформації є константою матеріалу [8, 10], прийдемо до критеріального співвідношення, яке встановлює зв'язок між зовнішнім навантаженням, довжиною тріщини, геометричними та фізико-механічними параметрами оболонки в умовах гранично-рівноважного стану.

*Результати числового аналізу.* Числовий аналіз проводився для оболонки, що знаходиться під внутрішнім тиском інтенсивності  $p$  ( $M_2^0 = 0, N_2^0 = R_p$ ) при таких значеннях параметрів:  $h/R = 0,01$ ;  $\nu = 0,3$ . Використовувалась умова пластичності Треска у вигляді умови пластичності поверхневого шару. Під час обчислень перевірялась умова відсутності контакту берегів тріщин  $\delta(\alpha, \gamma) > 0$ . Регулярна частина ядер, що зображена безмежними рядами, обчислювалась з похибкою не більшою 0,1%. Розв'язок системи інтегральних рівнянь контролювався шляхом порівняння результатів при  $n_c = \bar{N}$  та  $n_c = 2\bar{N}$ . Відносна похибка не перевищувала 1%. Допустима похибка виконання умови пластичності задавалась в границях  $10^{-2}$ . Система лінійних алгебраїчних рівнянь (28) розв'язувалась блочним методом.

На рис. 1 показано залежність параметра  $\tau_0 = l_0 / l_1$ , що визначає розмір пластичної зони, а на рис. 2 – відносного розкриття тріщини в її вершині  $\delta_i^* = \delta(l_0 / R, 0) E / (l_0 \sigma_T)$  від відносної довжини реальної тріщини  $l_0 / R$  для різних значень відносного зовнішнього навантаження ( $n^0 = pR / (2h\sigma_T)$ ). Цифрами показано рівень навантаження:  $1 - n^0 = 0,1$ ;  $2 - n^0 = 0,2$ ;  $3 - n^0 = 0,3$ ;  $4 - n^0 = 0,6$ . Як бачимо з рисунків, розкриття тріщини та довжина пластичних зон монотонно зростають зі збільшенням  $2l_0$  та  $n^0$ .

Розкриття тріщини визначалось на серединній поверхні оболонки ( $\gamma = 0$ ). Розкриття вершини тріщини обчислене на зовнішній ( $\gamma = h$ ) чи внутрішній ( $\gamma = -h$ ) поверхнях оболонки відрізнялось від приведеного на рис. 2 менше ніж на 2%.



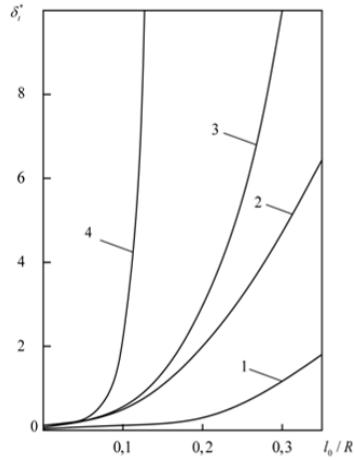
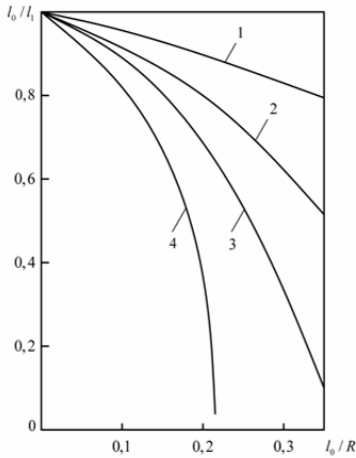


Рис. 1 - Залежність параметра  $\tau_0 = l_0 / R$  від  $l_0 / l_1$   
 Рис. 2 - Залежність параметра  $\delta_1$  від  $l_0 / R$

Числовий аналіз показав, що для  $M_2^0 \geq 0, IhN_2^0$  настає контакт берегів тріщини, тобто  $\delta(\alpha, \gamma) \leq 0$ . В цей же час порівняння  $\delta(\gamma, \alpha)$  для  $\gamma=0$ ,  $\gamma=h$  та  $\gamma=-h$  показало, що другий доданок у формулі (58) малий в порівнянні з першим.

Це означає, що  $[\theta_2(\alpha)]$  мале в порівнянні з  $[u_2]$  і відповідно згинний момент  $M$ , що викликаний кривиною оболонки за відсутності  $M_2^0$  ( $M_2^0 = 0$ ) малий в порівнянні з  $hN$ . Тому умови пластичності можна записати у вигляді:

$$\frac{N}{2h} = \sigma_2 = \sigma_T, \quad (30)$$

а систему сингулярних інтегральних рівнянь як одне інтегральне рівняння типу Коші:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{F_1(\alpha, u)}{u-s} du = \frac{f_1(\alpha, s)}{Eh} - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 F_1(\alpha, u) \Psi_{11}^0[\alpha, (u-s)] du \quad (31)$$

**Висновки.** Метод зведення задач про граничну рівновагу пружно-пластичних оболонкових елементів конструкцій з тріщинами застосовано для дослідження ізотропних циліндричних із взаємодіючими наскрізними тріщинами. На прикладі задачі про напружений стан замкнутої циліндричної оболонки апробовано методику зведення пружно-пластичної задачі до системи чотирьох

нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь. В отриманій системі інтегральних рівнянь невідомі границі інтегрування, а праві частини – розривні функції, які містять невідомі величини зусиль і моментів, що діють в пластичних зонах. Побудовано алгоритм числового розв’язування таких систем інтегральних рівнянь сумісно з умовами пластичності Треска або Мізеса, умовами однозначності переміщень та умовами обмеженості зусиль і моментів біля вершин тріщин. Розглянуто випадки:

- оболонка знаходиться під дією внутрішнього тиску;
- на оболонку одночасно діють внутрішній тиск і поздовжній розтяг.

Числовий аналіз показав, що розтяг вздовж тріщини може впливати на її розкриття і, відповідно, на міцність оболонкової конструкції.

#### Література

1. Довбня Е.Н. Система прямолинейных трещин в пологой ортотропной оболочке произвольной кривизны / Е.Н. Довбня, В.П. Шевченко // Теор. и прикл. мех. – 1984. – № 15. – С. 48 – 53.
2. Здолбіцька Н.В. Напружено-деформований стан тонкої ортотропної плити на трипараметричній пружній основі / Н.В. Здолбіцька, М.В. Десяцький // Вісник донецького національного університету, Сер. А: Природничі науки. – 2009. – Вип. 1. – С. 134 – 140.
3. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости / Каландия А.И. – М: Наука, 1973. – 304 с.
4. Максимович В.М. Дослідження процесу підростання криволінійних втомних тріщин у кругових пластинках при стиску / В.М. Максимович, Я.В. Максимович // Наукові нотатки, Міжвузівський збірник (за напрямом „Інженерна механіка”), вип. 19 – Луцьк. – 2007. – С. 178 – 189.
5. Максимович В.М. Метод неоднорідних розв’язків в задачах теорії пружності для шару / В.М. Максимович, В.І. Шваб’юк, Р.О. Сорока // Наукові нотатки. – Луцьк: держ. техн. ун-т, 1999. – Вип.5. – С.149–159.
6. Николишин М.М. Гранична рівновага трансверсально-ізотропної пружно-пластичної сферичної оболонки з двома колінеарними тріщинами / М.М. Николишин, Є.М. Федюк, Ю.П. Фещук // машинознавство. – 2004. – №7. – С. 17 – 20.

7. Осадчук В.А. О критерии распространения трещин в замкнутых цилиндрических оболочках / В.А. Осадчук // Докл. АН УССР. – 1979. – Т. 246, № 2. – С. 290 – 293.

8. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / Панасюк В.В. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.

9. Підстригач Я.С. Температурні напруження в оболонках / Я.С. Підстригач, С.Я. Ярема – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.

10. Erdogan F. Plastic strip model for thin shells / Erdogan F. // Prospects Fract. Mech.– Leyden, 1974. – P. 609 – 617

11. Loakimidie N.I. The numerical solution of crack problems in plane elasticity in the case of loading discontinuities / Loakimidie N.I. // Eng. Fract. Mech. – 1980. –13. № 4. – P. 709 – 716.

12. Sanders J.L. Dugdale model for circumferential through-crack in pipes loaded by bending / Sanders J.L. // Int. J. Fract. –1987. – 34, № 1. – P. 71 – 81.

*Рецензент д.т.н., проф. П.П. Савчук*