

УДК 355.02 : 519.216.3

Василь Васильович Биченков
Юрій Миколайович Зінченко
Олександр Валентинович Поплінський

РОЗРОБЛЕННЯ АЛГОРИТМУ СИНТЕЗУ ПОЛІНОМУ N-ГО СТУПЕНЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ВІД ОДНОГО АРГУМЕНТУ

Постановка проблеми.

В ЗС України відсутній відомий досвід вдалого проведення об'єктивного оцінювання стану справ з питань обороноздатності держави, об'єктивного оцінювання можливостей ЗС України згідно з поставленими перед ними завданнями. Не відомі методики за якими можливо було б провести об'єктивний аналіз можливостей Збройних Сил України в інтересах проведення ефективної оборонної політики держави [1]. Тому розроблення Методики вирішення завдання оцінки ризиків досягнення визначених можливостей у залежності від рівня фінансування в системі оборонного планування (далі Методика) є вкрай актуальним завданням. В попередній статті [2] визначалось, що виходячи з вимог щодо математичного апарату для Методики найбільш підходять імітаційні або комбіновані методи моделювання. Але у зв'язку з тим, що залежності цільової функції визначеної методики (вихідні параметри) від показників (вхідні параметри) досконало невідомі, найефективнішим рішенням буде застосування експериментальних методів самоорганізації моделей. Одним з таких методів є метод групового урахування аргументів (МГУА [3].

Метою статті є: на основі експериментальних методів самоорганізації моделей побудувати алгоритм синтезу поліному n-го ступеня складності залежності цільової функції від одного аргументу.

Вихідні положення.

Для винайдення ефективної комбінації залежностей аргументів від цільової функції за допомогою методів класу регресійного аналізу необхідно визначити показники, які є складовими факторів, що впливають на можливість Збройних Сил України (рис. 1). Із зазначених показників необхідно обрати ті, що відповідають вимозі відповідності рівня управління, тобто ті, якими оперує особа, яка приймає рішення.

Значення обраних показників факторів та відповідних значень цільової функції заносяться в таблицю початкових даних. (табл. 1).

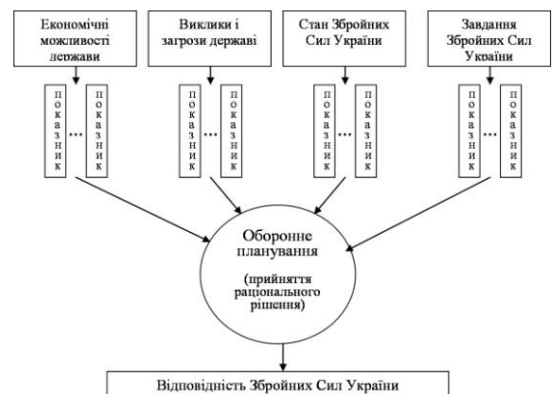


Рис. 1. Місце показників, які виражають зміст факторів, що впливають на відповідність Збройних Сил України своєму призначенню

Наступним кроком для особи, яка приймає рішення, є вибір на основі власного досвіду характеру залежності між показниками факторів та цільовою функцією.

Таблиця 1

Початкові дані значень показників факторів та цільової функції методики

№ вибірки	аргументи						Цільова функція
	X_1	X_2	...	X_j	...	X_n	
1	X_{11}	X_{21}	...	X_{j1}	...	X_{n1}	Y_1
2	X_{12}	X_{22}	...	X_{j2}	...	X_{n2}	Y_2
...
c	X_{1c}	X_{2c}	...	X_{jc}	...	X_{nc}	Y_c

На основі початкових даних (табл. 1) з урахуванням характеру обраної залежності між цільовою функцією та показниками факторів будуються поліноми, які за методом найменших квадратів перевіряються на перевіірочній вибірці даних [4]:

$$\sum_i (Y_i^2 - f(x_{ij})^2) \rightarrow \min,$$

де Y_i – i – те значення цільової функції;

$f(x_{ij})$ – значення полінома, який побудований за методом найменших квадратів:

$$f(x_{ij}) = A + Bx_{ij} + Cx_{ij}^2 + Dx_{ij}^3 + \dots;$$

де x_{ji} – i – те значення j – ого показника $j=1..n$;
 n – кількість показників.

Поліноми, які показали найбільшу сходиність результатів з перевіркою вибіркою (мінімальне розходження дійсної кривої та побудованої кривої за допомогою полінома) обираються для наступної ітерації.

Наступні поліноми будуються з урахуванням двох показників кожний. Перевіряються на точність відображення експериментальної залежності (поведінки цільової функції) аналогічним чином:

$$\sum_i (Y_i^2 - f(x_{ji}, x_{ki})^2) \rightarrow \min,$$

де $f(x_{ji}, x_{ki})$ – значення полінома, який побудований за МГУА:

$$f(x_{ji}, x_{ki}) = A + Bx_{ji} + Cx_{ki} + Dx_{ji}x_{ki} + Ex_{ji}^2 + Fx_{ki}^2 + \dots;$$

x_{ji}, x_{ki} – i – те значення j – ого та k – ого показників відповідно.

Ітерація поліномів припиняється за умов досягнення задовільної точності розрахунків, які висунуті особою, що приймає рішення (рис. 2).

Сформований поліном надає можливості приступити до вирішуваного завдання – оцінювання ризиків досягнення визначених можливостей залежно від рівня фінансування в системі оборонного планування.

На основі розробленого поліному є можливість задати діапазон даних стосовно можливих варіантів реального рівня фінансування Збройних Сил України, задати дискретність розрахунків цільової функції відносно заданого показника і вирахувати очікувані можливості Збройних Сил України

Алгоритм синтезу поліному будь-якого ступеню складності залежності цільової функції від одного аргументу

Основним завданням при вирішенні питання розроблення Методики – є складання алгоритму синтезу поліному n – го ступеню складності залежності цільової функції від заданої кількості аргументів. При вирішенні даного завдання теорію відновлення математичної залежності цільової функції від визначених аргументів можливо буде застосувати у вигляді спеціального математичного програмного забезпечення (СМПЗ).

Інші впливові показники обираються згідно з МГУА (рис. 3).

В ході даної статті розглядається частковий випадок – синтез полінома залежності цільової функції від одного аргументу.

Простішим прикладом вирішення даного завдання – є синтез поліному залежності функції від одного аргументу першого ступеня:

$$Y = A + Bx,$$

де Y – шукана функція;

x – аргумент функції;

A, B – коефіцієнти, що визначають зміщення та нахил прямої.

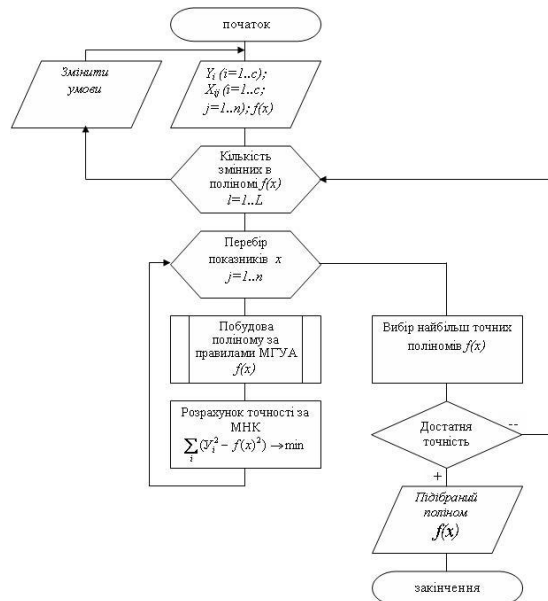


Рис. 2. Алгоритм формування поліному оцінки ризиків досягнення визначених можливостей у залежності від обраних показників

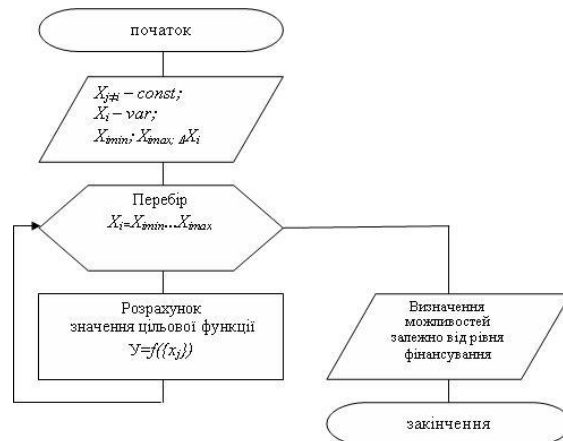


Рис. 3. Методика оцінки ризиків досягнення визначених можливостей у залежності від рівня фінансування в системі оборонного планування

З умов завдання нам відомі значення аргументів та відповідні значення цільової функції. Необхідно з використанням МГУА винайти шукану залежність.

У випадку з однією змінною, МГУА вироджується у класичний метод регресійного аналізу. Так, необхідно відшукати такі коефіцієнти A і B , щоб результати синтезованої залежності максимально наблизилась до значень випробування, тобто

$$\Delta^2 = \sum_i (Y_i - (A + B * x_i))^2 \rightarrow \min.$$

Для винайдення шуканих констант необхідно продиференціювати зазначений вираз, що надасть змогу отримати систему рівнянь:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial A} = n * A + B * \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n Y_i = 0.$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial B} = A \sum_{i=1}^n x_i + B \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n Y_i * x_i = 0.$$

Звідти:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n * A + B * \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i * x_i = A \sum_{i=1}^n x_i + B * \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Після нескладних перетворень отримані вирази розрахунків питомих коефіцієнтів набудуть вигляду:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i * x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i} - \sum_{i=1}^n Y_i * x_i;$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i * x_i - \sum_{i=1}^n Y_i * \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i * \sum_{i=1}^n x_i}.$$

При синтезуванні поліному другого ступеня, формульні вирази будуть мати вигляд:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial A} = n * A + B * \sum_{i=1}^n x_i + C * \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n Y_i = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial B} = A \sum_{i=1}^n x_i + B * \sum_{i=1}^n x_i^2 + C * \sum_{i=1}^n x_i^3 - \sum_{i=1}^n Y_i * x_i = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial C} = A \sum_{i=1}^n x_i^2 + B * \sum_{i=1}^n x_i^3 + C * \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n Y_i * x_i^2 = 0.$$

Для виведення поліному третього ступеня формульні вирази будуть мати вигляд:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial A} = n * A + B * \sum_{i=1}^n x_i + C * \sum_{i=1}^n x_i^2 + D * \sum_{i=1}^n x_i^3 - \sum_{i=1}^n Y_i = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial B} = A \sum_{i=1}^n x_i + B * \sum_{i=1}^n x_i^2 + C * \sum_{i=1}^n x_i^3 + D * \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n Y_i * x_i = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial C} = A \sum_{i=1}^n x_i^2 + B * \sum_{i=1}^n x_i^3 + C * \sum_{i=1}^n x_i^4 + D * \sum_{i=1}^n x_i^5 - \sum_{i=1}^n Y_i * x_i^2 = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial D} = A \sum_{i=1}^n x_i^3 + B * \sum_{i=1}^n x_i^4 + C * \sum_{i=1}^n x_i^5 + D * \sum_{i=1}^n x_i^6 - \sum_{i=1}^n Y_i * x_i^3 = 0.$$

Тобто, можливо бачити тенденцію (див рис.4).

З даних формульних виразів можливо побудувати таблицю коефіцієнтів при змінних A, B, C, D, ... (див. табл.2)

Як було показано вище, змістом побудови полінома є винайдення коефіцієнтів при змінних. Для винайдення коефіцієнтів необхідно всі рівняння, які містяться в загальній системі рівнянь, згорнути до одного рівняння і визначити один з шуканих коефіцієнтів. Далі відомий коефіцієнт підставити в попереднє рівняння з двома невідомими, де знаходиться наступний шуканий коефіцієнт. Таким чином, поновивши всі рівняння, є можливість винайти всі шукані коефіцієнти.

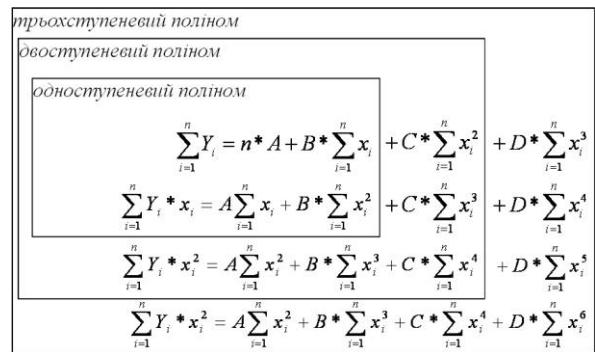


Рис. 4. Порівняння одно - двох - трьохступеневих поліномів

Таблиця 2

Таблиця коефіцієнтів S[i, j] при змінних

	Вільний член	Коеф-т при A	Коеф-т при B	Коеф-т при C	Коеф-т при D	...
i	1	2	3	4	5	...
j	1	2	3	4	5	...
1	$\sum_{i=1}^n Y_i$	n	$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$\sum_{i=1}^n x_i^3$...
2	$\sum_{i=1}^n Y_i * x_i$	$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$\sum_{i=1}^n x_i^3$	$\sum_{i=1}^n x_i^4$...
3	$\sum_{i=1}^n Y_i * x_i^2$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$\sum_{i=1}^n x_i^3$	$\sum_{i=1}^n x_i^4$	$\sum_{i=1}^n x_i^5$...
4	$\sum_{i=1}^n Y_i * x_i^3$	$\sum_{i=1}^n x_i^3$	$\sum_{i=1}^n x_i^4$	$\sum_{i=1}^n x_i^5$	$\sum_{i=1}^n x_i^6$...
...

При згортанні формульних виразів для двохступеневого поліному (див. 1) з трьох рівнянь з трьома невідомими є можливість отримати два рівняння з двома невідомими (2).

З отриманих двох рівнянь неважко отримати одне рівняння з однією невідомою, яку потім можливо вирахувати.

Для побудови СМПЗ важливим є винайдення загальної системи перетворення формульних виразів. Так, зрозуміло, що загальна таблиця коефіцієнтів двохступеневого поліному (див. табл. 2) при згортанні формульних виразів буде мати наступний вигляд (табл. 3).

Наступний крок згортки таблиці коефіцієнтів також не складно показати, якщо розрахувати систему рівнянь (2).

Таблиця 3
Перший крок згортки таблиці коефіцієнтів
двохступеневого поліному $S[i, j]$

i \ j	Вільний член	Коеф-т при A	Коеф-т при B
	1	2	3
1	$\sum_{i=1}^n Y_i * x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3 * \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	$\sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3 * \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
2	$\sum_{i=1}^n Y_i * x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4 * \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4 * n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	$\sum_{i=1}^n x_i^3 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i * \sum_{i=1}^n x_i^4}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Але в даному випадку важливим моментом є не винайдення коефіцієнтів рівнянь, а винайдення загальних формул для алгоритму синтезу поліномів n – го ступеня (рис. 5).

Маючи трьохвимірну таблицю $S[i, j, k]$ значень коефіцієнтів за кроками згортки системи рівнянь для поліномів n-го ступеня для одного аргументу, залишається визначити як винайти значення самих коефіцієнтів. Рівняння щодо винайдення значень коефіцієнтів A, B, C, двухступеневого поліному з однією змінною з використанням таблиці $S[i, j, k]$ значень коефіцієнтів за кроками згортки системи рівнянь будуть мати наступний вигляд:

$$A = \frac{S(1,1,n-k)}{S(2,1,n-k)};$$

$$B = \frac{S(1,1,n-k) - S(2,1,n-k) * A}{S(3,1,n-k)};$$

$$C = \frac{S(1,1,n-k) - S(2,1,n-k) * A - S(3,1,n-k) * B}{S(4,1,n-k)}.$$

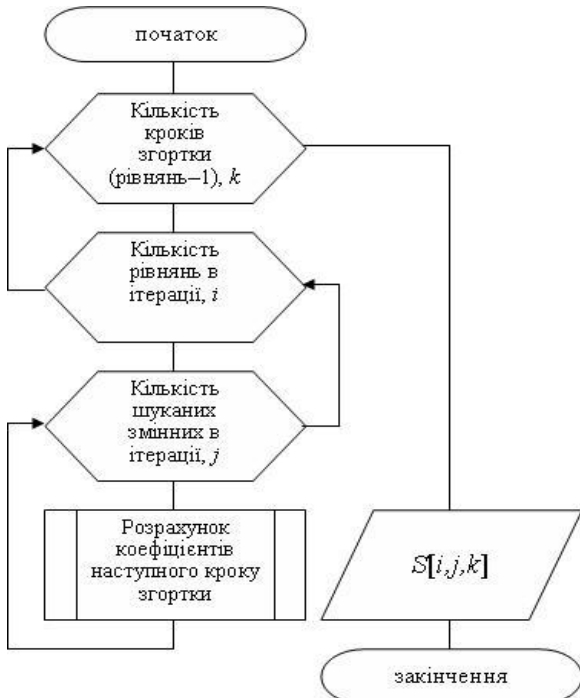


Рис. 5. Загальний алгоритм розрахунку коефіцієнтів системи рівнянь для поліномів n-го ступеня для одного аргументу:

$$A \left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) + B * \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3 * \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) + \sum_{i=1}^n Y_i * x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3 * \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 0$$

$$A \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4 * n}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) + B * \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i * \sum_{i=1}^n x_i^4}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) + \sum_{i=1}^n Y_i * x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4 * \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 0$$

де розрахунок коефіцієнтів наступного кроку згортки виконується за формульним виразом:

$$S(i, j, k) = S(i, j+1, k-1) - \frac{S(n+3-k, j+1, k-1) * S(i, 1, k-1)}{S(n+3-k, 1, k-1)};$$

n – початкова кількість рівнянь (коефіцієнтів, які необхідно розрахувати).

Таким чином, загальний алгоритм винайдення коефіцієнтів поліномів з одним аргументом n-го ступеня з використанням таблиці $S[i, j, k]$ значень коефіцієнтів за кроками згортки системи рівнянь будуть мати наступний вигляд (рис. 6).

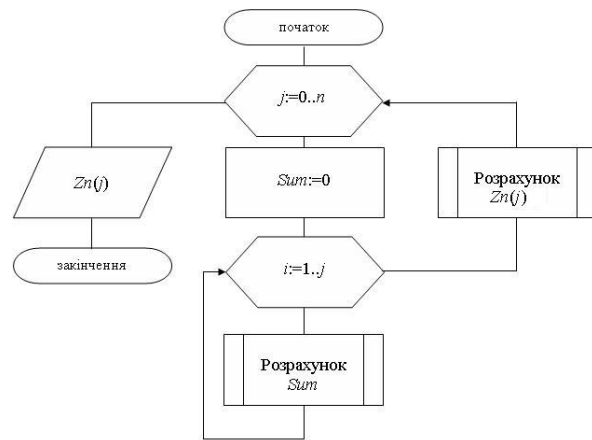


Рис. 6. Алгоритм розрахунку коефіцієнтів поліному будь-якої складності для одного аргументу:

де Sum – змінна поточного сумування:

$$Sum = Sum + sl(i, j+1, chis_arg - j) * Koeff[i, j, chis_arg];$$

Koeff[i, j+1, chis_arg] – значення поточного коефіцієнту поліному:

$$Koeff[i, j, chis_arg] = \frac{(sl[i, 1, chis_arg - j] - Sum)}{sl[i, 1, chis_arg - j]};$$

Koeff[i, j, chis_arg] – значення попередньо розрахованого коефіцієнту поліному;

chis_arg – початкова кількість рівнянь або кількість коефіцієнтів полінома, які необхідно розрахувати;

s_l – масив складових поєднань аргументів поліному;

$Z_n(j)$, $Z_n(n)$ – вектор коефіцієнтів поліномів з одним аргументом j -го ступеня та n -го ступеня відповідно.

Висновки

1. Розроблення Методики вирішення завдання оцінки ризиків досягнення визначених можливостей у залежності від рівня фінансування в системі оборонного планування є актуальним завданням.

Література

1. Підтримка прийняття рішень під час оборонного планування у галузі розвитку Збройних Сил України : звіт про науково-дослідну роботу (проміжний) [шифр «Ризик ОП»] – К.: НУОУ, 2012. – 87 с. 2. Биченков В.В. Вибір математичного апарату для розроблення методики вирішення завдання оцінки ризиків досягнення визначених можливостей у залежності від рівня фінансування в системі оборонного планування

2. Розроблений алгоритм синтезу поліному будь-якого ступеню складності залежності цільової функції від необхідної кількості аргументів має можливість бути застосованим при визначенні відповідності Збройних Сил України своєму призначенню в залежності від рівня їх фінансування.

В подальших публікаціях буде розглянута методика використання розроблених математичних методів алгоритм синтезу поліному будь-якого ступеню складності залежності цільової функції від необхідної кількості аргументів.

/ Биченков В.В., Єфімова Р.Г., Паламарчук А.С. // Труды университета № 114. – К., 2012. – С. 49 – 55. 3. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации сложных систем / Ивахненко А.Г. – К.: Наукова думка, 1982, - 296 с. 4. Ивахненко А.Г. Принятие решений на основе самоорганизации / Ивахненко А.Г., Зайченко Ю.П., Димитров Д.В. – М.: Сов. радио, 1976, - 280 с.

В статті раскрыта послідовність синтезу полінома n -ої степені залежності цільової функції від одного аргумента; виведені загальні математичні залежності синтезу полінома n -ої степені; побудований алгоритм синтезу полінома n -ої степені залежності цільової функції від одного аргумента.

Ключевые слова: методи регресійного аналізу, метод групового урахування аргументів, поліном, математичні залежності, алгоритм.

In the article is written the polynomial n -degree synthesis sequence of dependence objective function of one argument; the general mathematical dependences of polynomial synthesis are written; the polynomial n -degree synthesis algorithm of dependence objective function of one argument is built.

Key words: regressive analysis methods, group account of arguments method, polynom, mathematical dependences, algorithm.