

*Владимир Иванович Гостев  
Игорь Вячеславович Панченко  
Ольга Владимировна Невдачина*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И РОБАСТНОСТИ AQM-СИСТЕМЫ С PI-РЕГУЛЯТОРОМ МЕТОДОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

### Постановка проблемы. Анализ последних исследований и публикаций

В последние годы непредсказуемый рост Интернета все более и более указывает на проблему борьбы с перегрузками. Явление перегрузок сети происходит, когда количество данных, введенных в сеть, больше чем количество данных, которые доставляются по назначению. При пакетной передаче источники данных должны уменьшать скорость передачи при наличии потери пакетов. Такой подход борьбы с перегрузками принят протоколом TCP. Для решения проблем уменьшения высокой задержки из-за полных очередей нужны более сложные и превентивные стратегии. Такой стратегией является Активное Управление Очередью – Active Queue Management (AQM). При AQM уведомления о перегрузке производятся отбрасыванием (или маркировкой) поступающих пакетов прежде, чем очереди маршрутизаторов станут полными. Другими словами, AQM использует принцип обратной связи: оконечные hosts реагируют на отбрасывание/маркировку пакетов в очередях маршрутизатора, уменьшая их скорость передачи. Длина очереди в маршрутизаторах уменьшается и непрерывная задержка, испытываемая пакетами, также уменьшается. Для борьбы с перегрузками в работах [1-4] предложен пропорционально-интегральный алгоритм, который является более эффективным, чем другие известные алгоритмы, для AQM-систем. В данной работе исследуется устойчивость и робастность AQM-системы с PI-регулятором методом логарифмических частотных характеристик.

### Формулирование цели статьи.

#### Изложение основного материала

Рассмотрим AQM-систему, скорректированную PI-регулятором, модель которой представлена на рис. 1. В этой системе автоматического управления объект управления в стационарном режиме описывается передаточной функцией [2-4].

$$G(s) = \frac{\frac{C^2}{2N}}{s(s + \frac{1}{R_o})(s + \frac{2N}{R_o^2 C})} \cdot e^{-sR_o} = \frac{\frac{(R_o C)^3}{(2N)^2}}{(R_o s + 1)(\frac{R_o^2 C}{2N} s + 1)} e^{-sR_o}, \quad (1)$$

где  $C$  – емкость связи (пакеты/сек),  $N$  – коэффициент нагрузки – load-factor (число TCP сессий),  $q$  – предполагаемая (средняя) длина очереди (в пакетах),  $R_o = q/C + T_p$  – время следования туда и обратно – round trip time (в сек),  $T_p$  – задержка распространения (в сек),  $p$  – вероятность маркировки/отбрасывания пакетов, а блок AQM-алгоритма представляет собой PI-регулятор. Задача регулятора – обеспечить устойчивость и качественные показатели системы управления. Во-первых, у системы должен быть приемлемый переходный процесс. Во-вторых, регулятор должен обеспечить робастность системы к вариациям параметров модели.

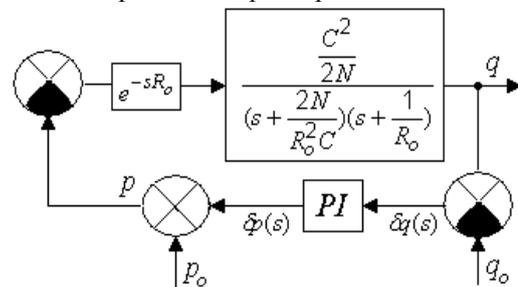


Рис. 1. AQM система, скорректированная PI-регулятором

Передаточную функцию PI-регулятора определим как

$$G_{PI}(s) = K + K_i \frac{1}{s} = \frac{Ks + K_i}{s} = K_i \frac{\tau_a s + 1}{s}, \quad (2)$$

где  $\tau_a = K/K_i = 1/z$ , сек.

Тогда передаточная функция AQM-системы в разомкнутом состоянии будет определена как

$$L(s) = \frac{K_i (R_o C)^3 (\tau_a s + 1)}{(2N)^2} \frac{e^{-sR_o}}{s(R_o s + 1)(\frac{R_o^2 C}{2N} s + 1)}. \quad (3)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) на основании этой передаточной функции определяется как

$$20\log_{10}|L(j\omega)| = 20\log_{10}\left\{\frac{K_1(R_0C)^3}{(2N)^2} \cdot \frac{\sqrt{(\tau_a\omega)^2 + 1}}{\omega\sqrt{(R_0\omega)^2 + 1}} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_0^2C}{2N}\right)^2 + 1}\right\}, \quad (4)$$

логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ) определяется как

$$\varphi = \arctg(\tau_a\omega) - \arctg(R_0\omega) - \arctg\left(\frac{R_0^2C}{2N}\omega\right) - 90^\circ - \frac{180^\circ}{\pi}R_0\omega. \quad (5)$$

При построении ЛАЧХ и ЛФЧХ по оси ординат откладываются амплитуды в децибелах, фазы в градусах, а по осям абсцисс – частоты в радиан/сек.

При построении ЛАЧХ и ЛФЧХ по оси ординат откладываются амплитуды в децибелах, фазы в градусах, а по осям абсцисс – частоты в радиан/сек.

Введем обозначения  $alf = \frac{K_1(R_0C)^3}{(2N)^2}$ ;  $\tau_1 = R_0$ ;

$\tau_2 = \frac{R_0^2C}{2N}$ ;  $\tau_a = K / K_1 = 1/z$ . Можно заключить,

что для этой системы с астатизмом первого порядка наиболее рациональным вариантом будет следующая расстановка для частот сопряжения ЛЧХ:  $\frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau_a} < \frac{1}{\tau_2}$  или  $\frac{1}{R_0} < \frac{K_1}{K} < \frac{2N}{R_0^2C}$ , ибо при

этой расстановке наклоны ЛАХ будут в последовательности -20, -40, -20, -40 дБ/декаду. Последнее неравенство можно использовать для выбора параметров АМ-системы.

Существенно отметить, что при использовании логарифмических амплитудно-частотных характеристик запас по модулю определяется как величина, обратная модулю функции  $G(j\omega)$  на частоте  $\omega_\pi$ , при которой фазовый сдвиг равен  $180^\circ$ , и показывает во сколько раз можно увеличить коэффициент усиления системы, прежде чем она окажется на границе устойчивости. Запас по фазе – величина, которая определяется на частоте среза  $\omega_c$ , при которой  $|G(j\omega)| = 1$ , и показывает, какой дополнительный отрицательный фазовый сдвиг допустим в системе, прежде чем она окажется на границе устойчивости. Метод линейно-частотной характеристики (ЛЧХ) для определения устойчивости системы имеет то преимущество, что позволяет очень просто учесть влияние запаздывания, которое характеризуется передаточной функцией  $e^{-R_0s}$ , на устойчивость системы, поскольку множитель  $e^{-j\omega R_0}$  приводит к дополнительному сдвигу фазовой характеристики на угол  $\varphi_1(\omega) = -\omega R_0$ . Таким образом, характеристики  $20\log_{10}|L(j\omega)|$  будут одинаковыми для системы, имеющей звено

запаздывания  $e^{-R_0s}$ , и для этой же системы без звена запаздывания, а фазовая характеристика для системы, имеющей звено запаздывания  $e^{-R_0s}$ , будет отлична от фазовой характеристики этой же системы без звена запаздывания на дополнительный фазовый сдвиг  $\varphi = -(R_0\omega) \times 180^\circ / \pi = -(R_0\omega) \times 57,3$ , градусов.

Используя пакет Control System Toolbox 5.0 интерактивной системы MATLAB [5], определим ЛЧХ (диаграммы Bode) системы (см. рис. 1), скорректированной PI-регулятором, по передаточной функции (3), но без звена запаздывания при следующих параметрах:  $R_0 = 0,246$ (сек),  $C = 3750$  (пакетов/сек),  $K = 9,6426 \cdot 10^{-6}$ ,  $1/z = 0,53$ ,  $N = 60$  (параметры сети взяты из работы [2]).

Программа расчета ЛЧХ в системе MATLAB следующая:

```
R=0.246; C=3750; N=60;
K=9.6426*10^(-6); z=0.53;
alf=K*(R*C)^3/(2*N)^2;
b=R^2*C/(2*N); f1=[1 0]; f2=[b*R b+R 1];
num=alf*[1/z 1]; den=conv(f1,f2);
sys=tf(num,den); [mag,phase,w]=bode(sys);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w);
margin(sys).
```

Рассчитанные ЛАЧХ и ЛФЧХ показаны на рис. 2 (кривые 1). Характеристика ЛАЧХ для системы (см. рис. 1), скорректированной PI-регулятором, с передаточной функцией (3) со звеном запаздывания и теми же параметрами будет такой же как и у системы без звена запаздывания. Но характеристика ЛФЧХ для системы, скорректированной PI-регулятором, с передаточной функцией (3) со звеном запаздывания и теми же параметрами будет отличаться от ЛФЧХ системы без звена запаздывания на дополнительный фазовый сдвиг  $\varphi = -(R_0\omega) \times 57,3$ , градусов, где  $\omega$  – частота, радиан/секунда, (см. рис.2, кривая 2). При  $R_0 = 0,246$  (сек) для некоторых частот этот сдвиг рассчитан в таблице 1.

Если передаточную функцию звена запаздывания аппроксимировать приближением Паде второго порядка, то передаточную функцию АМ системы в разомкнутом состоянии можно определить в виде (см. формулу (3))

$$L(s) = \frac{K_1 \frac{(R_0C)^3}{(2N)^2} \frac{1}{z} (s + \frac{\tau^2}{3})}{s \frac{R_0^2C}{2N} (s + 1) (R_0s + 1) (\frac{\tau^2}{3}s^2 + \tau s + 1)}. \quad (6)$$

Используя пакет Control System Toolbox 5.0 интерактивной системы MATLAB [5], определим ЛЧХ характеристики (диаграммы Bode) системы (см. рис. 1), скорректированной PI-регулятором, по передаточной функции (6). Вначале приведем логарифмическую фазо-частотную характеристику звена запаздывания ЛФЧХ при аппроксимации

передаточной функции звена приближением Паде второго порядка для  $R_o = 0,246$ , сек. (см. рис. 3).

Таблица 1

$\omega$ рад./сек	$\varphi = -(R_o \omega) \times 57,3$ , градусов.
0.01	- 0.14
0.02	- 0.28
0.03	- 0.423
0.04	- 0.56
0.06	- 0.85
0.08	- 1.135
0.1	- 1.41
0.2	- 2.82
0.3	- 4.23
0.4	- 5.64
0.6	- 8.46
0.8	- 11.28
1	- 14.1
2	- 28.2
3	- 42.3
4	- 56.4
6	- 84.6
8	- 112.8
10	- 141

Bode Diagram

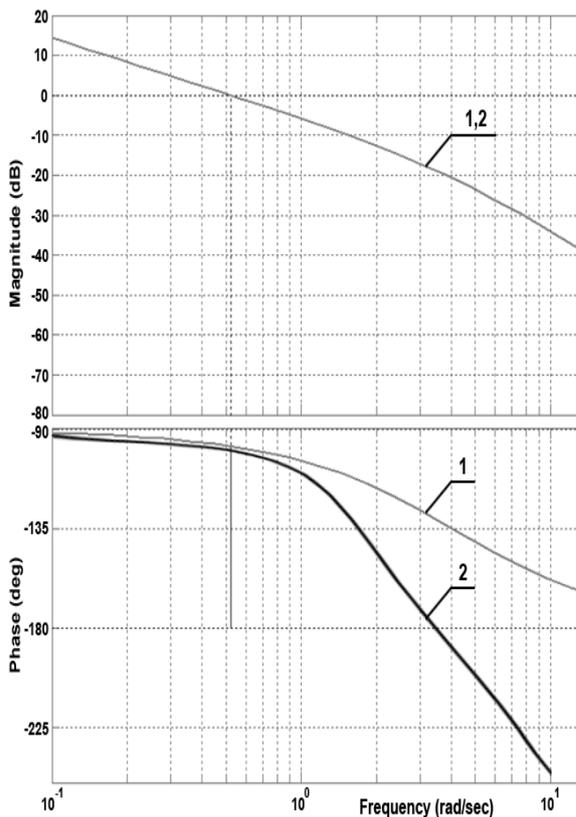


Рис. 2. ЛЧХ системы с PI-регулятором при  $N = 60$  без звена запаздывания (кривые 1) и со звеном запаздывания (кривая 2)

ЛЧХ характеристики (диаграммы Bode) системы (см. рис. 1), скорректированной PI-регулятором, при номинальных параметрах схемы  $R_o = 0,246$ (сек),  $C=3750$  (пакетов/сек), параметрах регулятора  $K = 9,6426 \cdot 10^{-6}$ ,  $1/z = 0,53$ , и числе сессий  $N = 60$  приведены на рис. 4.

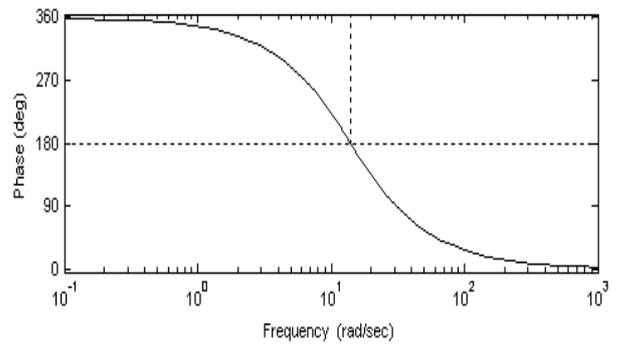


Рис. 3. ЛФЧХ звена запаздывания при аппроксимации передаточной функции звена приближением Паде второго порядка ( $R_o=0,246$ ,сек)

Программа расчета ЛЧХ в системе MATLAB:  
 $R=0.246$ ;  $C=3750$ ;  $N=60$ ;  $K=9.6426 \cdot 10^{-6}$ ;  
 $z=0.53$ ;  
 $alf=K \cdot (R \cdot C)^3 / (2 \cdot N)^2$ ;  $b=R^2 \cdot C / (2 \cdot N)$ ;  
 $f1=alf \cdot [1/z \ 1]$ ;  $f2=[(0.123)^2/3 \ -0.123 \ 1]$ ;  
 $f3=[1 \ 0]$ ;  $f4=[b \cdot R \ b+R \ 1]$ ;  $f5=[(0.123)^2/3 \ 0.123 \ 1]$ ;  
 $num=conv(f1,f2)$ ;  $den=conv(f3,conv(f4,f5))$ ;  
 $sys=tf(num,den)$ ;  $[mag,phase,w]=bode(sys)$ ;  
 $[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)$ ;  
 $margin(sys)$

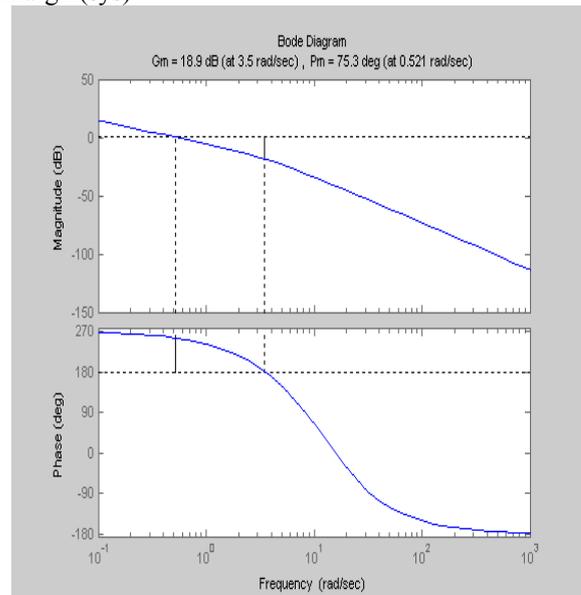


Рис. 4. ЛЧХ системы с PI-регулятором при  $N = 60$  при аппроксимации передаточной функции звена запаздывания приближением Паде второго порядка

Приведем еще один вариант программы расчета ЛЧХ в системе MATLAB с PI-регулятором:

$R=0.246$ ;  $C=3750$ ;  $N=60$ ;  $K=9.6426 \cdot 10^{-6}$ ;  
 $z=0.53$ ;  
 $alf=K \cdot (R \cdot C)^3 / (2 \cdot N)^2$ ;  $b=R^2 \cdot C / (2 \cdot N)$ ;  
 $[np,dp]=pade(R,2)$ ;  $sysp=tf(np,dp)$ ;  $f1=[1 \ 0]$ ;  
 $f2=[b \cdot R \ b+R \ 1]$ ;  
 $num=alf \cdot [1/z \ 1]$ ;  $den=conv(f1,f2)$ ;  
 $sysg=tf(num,den)$ ;  
 $sys=series(sysp,sysg)$ ;  $[mag,phase,w]=bode(sys)$ ;

$[G_m, P_m, W_{cg}, W_{cp}] = \text{margin}(\text{mag}, \text{phase}, w);$   
 $\text{margin}(\text{sys})$

В этой программе имеется специальная подпрограмма для функции Паде. Эта функция образует неминимально-фазовую систему.

По ЛЧХ находим: запас устойчивости системы по амплитуде  $G_m=18,9$  на частоте  $\omega_p=3,5$  радиан/сек, запас устойчивости по фазе  $P_m=75,3$  градусов на частоте среза  $\omega_c = 0,521$  радиан/сек.

Весьма важно отметить, что звено, имеющее передаточную функцию полученную аппроксимацией звена чистого запаздывания приближением Паде второго порядка, преобразует передаточную функцию АQM системы из минимально-фазовой в неминимально-фазовую путем добавления к ЛФЧХ минимально-фазовой системы приведенную на рис. 3 характеристику дополнительного сдвига по фазе.

Метод ЛЧХ позволяет достаточно просто определить робастность системы, т.е. способность системы сохранять устойчивость при изменяющихся параметрах объекта управления. В таблицах 2, 3 и 4 определена устойчивость системы при различных  $R_o$ ,  $C$  и  $N$ .

Таблица 2

$R_o$ , сек	$G_m$ , дБ	$\omega_p$ , рад/сек	$P_m$ , град.	$\omega_c$ , рад/сек
0,6	7,24	1,97	18,8	1,15
0,5	9,8	2,25	27,7	1,05
0,4	12,7	2,6	39,4	0,907
0,3	16,4	3,11	58,1	0,7

### Литература

- Hollot C.V.**, Misra V., Towsley D., Gong W.B. "A Control Theoretic Analysis of RED," in Proceedings of IEEE/INFOCOM, April, 2001, pp. 1510-1519.
- Hollot C.V.**, Misra V., Towsley D., Gong W.B. "Analysis and design of controllers for AQM routers supporting TCP flows". IEEE/ACM Transactions on Automatic Control, vol. 47, no.6, pp. 945-959, June 2002.
- Hollot C.V.**, Misra V., Towsley D., Gong W.B., "On Designing Improved

В роботі досліджена методом логарифмічних частотних характеристик система активного управління чергою пакетів в мережах TCP/IP з пропорційно-інтегральним алгоритмом управління (PI-регулятором). Визначені стійкість і робастність системи за допомогою системи MATLAB.

*Ключові слова:* стійкість і робастність системи, PI-регулятор.

Продолжение таблицы 2

0,246	18,9	3,5	75,3	0,521
0,2	21,5	3,94	91,3	0,304
0,1	31,2	5,9	92,5	0,0354

Таблица 3

$R_o$ , сек	$G_m$ , дБ	$\omega_p$ , рад/сек	$P_m$ , град.	$\omega_c$ , рад/сек
0,6	7,24	1,97	18,8	1,15
0,5	9,8	2,25	27,7	1,05
0,4	12,7	2,6	39,4	0,907
0,3	16,4	3,11	58,1	0,7
0,246	18,9	3,5	75,3	0,521
0,2	21,5	3,94	91,3	0,304
0,1	31,2	5,9	92,5	0,0354

Таблица 4

$N$	$G_m$ , дБ	$\omega_p$ , рад/сек	$P_m$ , град.	$\omega_c$ , рад/сек
30	12,1	3,3	75,3	1,09
60	18,9	3,5	87	0,521
120	26,3	3,84	91,7	0,134

### Выводы

По полученным результатам видно, что система (рис. 1) обладает достаточной робастностью, т.е. является устойчивой при изменении параметров объекта в широких пределах.

Controllers for Routers Supporting TCP Flows", in Proceedings of IEEE INFOCOM'2001, April 2001, 1726-1734.

**4. Гостев В.И.**, Скуртов С.Н. Фаззи-системы активного управления очередью в сетях TCP/IP: монография. – Нежин: ООО "Издательство "Аспект-Поліграф", 2011. – 464 с.

**5. Дорф Р.**, Бишоп Р. Современные системы управления / Пер. с англ. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.

In work it is investigated by a method of logarithmic frequency characteristics system active queue management of packages in networks TCP/IP with proportional-integrated algorithm of management (PI-regulator). Are defined stability and robustness systems by the help of system MATLAB.

*Key words:* stability and robustness systems, PI-regulator.