УДК 623.54:629.192

***В'ячеслав Віталійович Прокопенко** (канд. техн. наук)*
***Євген Григорович Іваник** (канд. фіз.-мат. наук)*
***Петро Іванович Ванкевич** (д-р техн. наук, доцент)*
***Юрій Віталійович Щавінський** (доцент)*

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, Україна

ОПИС РУХУ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ НА АКТИВНІЙ ДІЛЯНЦІ ТРАЄКТОРІЇ

Викладено основні аспекти вивчення руху керованого ракетного пристрою на різних ділянках траєкторії, які постають перед дослідниками з питань зовнішньої балістики. Подано перелік низки проблем, пов'язаних з математичним моделюванням даного науково-технічного явища, яке само по собі є комплексною проблемою, кінцевою метою вирішення якої є побудова балістичних таблиць і таблиць стрільби стосовно певного типу зарядного пристрою. Дано систематизацію підходу до вивчення руху літального апарату на різних ділянках траєкторії (в атмосфері та в умовах пасивного руху як балістичне тіло), а також математичний апарат та інструментарій вирішення даної проблеми. Рішення поставленої проблеми зведено до відшукання чотирьох невідомих функцій (кінематичні характеристики руху та змінна в часі маса об'єкта) з чотирьох диференціальних рівнянь руху. З використанням асиметричних одиничних функцій представлено аналітичним виразом зміну сили тяги в часі. Для пасивної ділянки траєкторії, де вважається, що рух ракети відбувається лише під дією сили тяжіння, записано проміжний інтеграл системи диференціальних рівнянь, які описують даний рух.

***Ключові слова:** зовнішня балістика; рух літального апарату; система диференціальних рівнянь; системи координат; аеродинамічні фактори; чисельне інтегрування диференціальних рівнянь руху.*

Вступ

Постановка проблеми. Особливе місце в розвитку засобів військової техніки належить ракетному озброєнню різного призначення. При вивченні руху керованого ракетного пристрою чи літального апарату (ЛА) в атмосфері дослідники з питань зовнішньої балістики стикаються з низкою різноманітних проблем, пов'язаних з математичним моделюванням даного науково-технічного явища, яке само по собі є комплексною проблемою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогодні відома велика кількість джерел, на основі матеріалів яких можна розвивати математичні методи аналізу результатів вимірювань, спробувати виділити з загальних результатів вплив окремих з багаточисельної сукупності факторів, які так чи інакше впливають на перебіг розглядуваного явища.

Значну кількість публікацій проблем зовнішньої балістики складають технічні доповіді державних лабораторій або науково-дослідних установ військово-промислового комплексу, які в тій чи іншій мірі є секретними. Але відомі загальнодоступні відкриті джерела, в яких ще з минулого сторіччя започатковано дослідження в даній галузі, і які на сьогодні вже стали класичними. Зокрема, можна відзначити чотиритомну наукову працю К. Кранца [1], яка повною мірою охоплює майже всі питання балістики. Незважаючи на те, що дослідження, висвітлені у цій праці, повністю базуються на даних часів Першої світової війни, їх цінність не втрачає своєї актуальності; багатотомна праця рясніє величезним історичним матеріалом та детальним викладом обчислювальних методів, які були використані на той час. Ще одна фундаментальна монографія, яка охоплює всі питання курсу "Зовнішня балістика" є праця Е. Макшейна та співавторів [2], в якій досконало, повно і всеохоплююче викладено всі аспекти даної науки. Можна також відзначити книгу Т. Гайєса [3], де в доступній формі подано вступ у зовнішню балістику.

Серед досліджень, присвячених розгляду математичних основ про рух бойових зарядів у просторі та принципам ведення артилерійського вогню, виданих на теренах України та на території СНД, за актуальністю, сучасністю, повноті та детальності викладу питань можна відзначити праці [4-8]. В серії робіт [9, 10] подано системний виклад способів визначення дериваційного відхилення літальних апаратів, досліджено вплив параметрів двигуна снарядів на траєкторію руху їх центра мас, дальність і кучність стрільби.

Відносно висока неушкодженість ракетного озброєння і результативність нанесених ним ударів обумовлюють його неперервне удосконалення і накладають жорсткі вимоги щодо розвитку наукових підходів з метою його подальшої модифікації. Особливістю ракетного озброєння є його практична необмежена дальність дії – від десятків до кількох тисяч кілометрів. Ефективність застосування ракетного озброєння в основному залежить від точності стрільби, потужності бойових частин, характеру цілей.

Розкриттю змісту математичного моделювання польоту ракет на різних стадіях траєкторії та розвитку математичних моделей руху в умовах програмованого маневру присвячено достатньо велика кількість досліджень, відображених в працях [9, 10]. На даний час універсальним, але досить громіздким є метод чисельного інтегрування рівнянь, що описують траєкторію руху ракет за наперед визначеними даними [9, 10]. Тому подальший розвиток вивчення особливостей і закономірностей руху та систематизація відомих методів відкриває можливості удосконалення загальної теорії руху без урахування конструктивних особливостей того чи іншого класу ЛА.

Незважаючи на те, що задачі, які стосуються розрахунку траєкторій керованих літальних пристроїв, мають давню історію, однак загальний підхід і специфічні методи їх розв'язування, які відповідають особливостям їх фізичного змісту і математичного опису, неперервно розвиваються паралельно з розвитком теорії оптимального управління.

Всі пуски ракет включають етап, який починається зі старту, і завершується виведенням в задану точку простору. На цьому етапі виведення постає низка задач управління, основною з яких є керування рухом центра мас ракети. Відповідно система управління, яка вирішує цю задачу, має назву система управління виведенням або наведенням [11;12]. Основне призначення системи управління виведенням полягає у виробленні керуючих команд, які гарантують досягнення ракетою з необхідною точністю наперед встановлених кінцевих умов, такими можуть бути параметри траєкторії, всі або частина компонент вектора швидкості, часу виведення.

На етапі виведення ракета перетинає область великих швидкісних зустрічних потоків, при цьому аеродинамічні навантаження мають підтримуватись на достатньо низькому, наскільки це можливо, рівні. Тому до системи управління висуваються вимоги мінімізації кутів атаки на ділянці польоту з великими швидкісними опорами.

Якщо виходити з припущення про незначне відхилення збуреної траєкторії від номінальної, то багатократне використання наближених спрощених розв'язків в процесі управління, дає змогу забезпечити прийнятну точність виведення, такого роду керування центром мас має назву ітеративне згідно термінології, прийнятої в роботі [11].

Один з важливих етапів створення системи управління виведенням полягає у виборі алгоритму прогнозування кінцевого стану активної ділянки траєкторії. При цьому слід брати до уваги обмеження, що випливають з практичних можливостей.

Постановка завдання.

Основним завданням даної роботи визначимо систематизацію підходу до вивчення руху ЛА на різних ділянках траєкторії (в атмосфері та в умовах пасивного руху як балістичне тіло), а також математичний апарат та інструментарій вирішення даної проблеми.

Виклад основного матеріалу дослідження

При розгляді руху ЛА в керованому (програмному) режимі на деякому віддаленні від Землі зазвичай нехтується притяганням Сонця та інших планет Сонячної системи, а також рухом Землі навколо Сонця. Для опису руху ЛА візьмемо систему декартових координат з початком в центрі Землі $Ox_1x_2x_3$, тобто в центрі її мас (геоцентрична прямокутна система), приблизно нерухому відносно віддалених небесних тіл. Нехтуючи опором атмосфери Землі і приймаючи керований літальний пристрій у вигляді матеріальної точки описуємо його рух трьома функціями часу $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ – координатами ЛА в довільний момент часу t.

Поряд з геоцентричною системою координат слід також розглядати ще дві: топоцентричну прямокутну (стартова) систему координат $O_cx_{1c}x_{2c}x_{3c}$, та систему координат, жорстко зв'язану з характерними елементами конструкції ЛА $O_ex_{1e}x_{2e}x_{3e}$ яка переміщується разом з ним.

Розглядаємо рух даної матеріальної системи, тобто ЛА, який характеризується зміною маси в цілому; ця зміна обумовлена витіканням продуктів згорання двигунної установки, яка входить в склад системи.

Траєкторія польоту ракети складається з активної і пасивної ділянок. На активній ділянці траєкторії ракета рухається з працюючим двигуном, а система керування забезпечує задані параметри руху. Далі двигун вимикається (за умови досягнення ракетою регламентованої швидкості або повного вигорання палива), бойова частина відділяється від ракети і рухається як вільно кинуте тіло (балістичне) під дією притягання Землі.

На активній ділянці траєкторії діють сила притягання Землі, сила тяги маршового ракетного двигуна, аеродинамічні сили, сили, створювані органами керування, а також низка інших додаткових сил [12]. Всі вони виявляють вплив на величину і характер зміни швидкості вздовж траєкторії, що відображено кривими на рис. 1, результати яких запозичені з роботи [12].

На активній ділянці траєкторії до вимкнення двигунів (точка K на кривій траєкторії) швидкість ракети збільшується. На пасивній ділянці (до її вершини – точка B) швидкість польоту бойової частини спадає внаслідок дії сили притягання Землі. На низхідній вітці траєкторії швидкість починає незначно збільшуватись, а потім різко спадати внаслідок зростання опору повітря, обумовленого збільшенням густини.

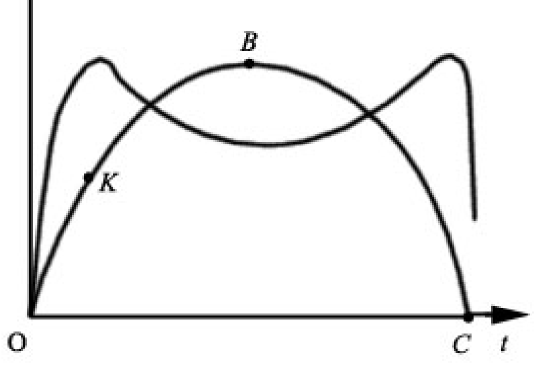

Рис. 1. Зміна швидкості руху ракети на різних ділянках траєкторії

Тоді, згідно другого закону Ньютона (основного рівняння динаміки), сума всіх сил, які діють на рухомий ЛА, має бути рівною вектору прискорення з компонентами $\left(\ddot{x}_1(t),\ddot{x}_2(t),\ddot{x}_3(t)\right)$, помноженому на масу балістичного тіла. Отже, рівняння руху матимуть вигляд

$$m(t)\ddot{x}_i(t)=F_i+G(t)+F_i^{(d)}+P_i+R_i^{(r)}\ \left(i=1,2,3\right),\quad(1)$$

де $m(t)$ – маса ЛА, змінна в часі; F_i – компоненти сили притягання балістичного тіла Землею; $G(t)=G_p(t)\delta_{i2}$ – змінна в часі сила ваги ракети (сила тяжіння), завжди направлена вздовж осі Ox_2; $F_i^{(d)}$ – керуючі сили; P_i – компоненти сили тяги двигуна $\vec{P}\left(P_1,P_2,P_3\right)$ ЛА; $R_i^{(r)}$ сила лобового опору; $\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j\end{cases}$ – символ Кронекера.

Як відомо [17], компоненти сили притягання Землі визначаються співвідношеннями

$$F_i=-\frac{x_i}{r}g\left(x_2\right)\frac{R^2}{r^2}m(t),\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\quad(2)$$

де R – радіус Землі.

При роботі реактивних двигунів маса ЛА зменшується тому візьмемо наступний закон зміни

$$\frac{dm(t)}{dt}=-\alpha P,\ P=\sqrt{P_1^2+P_2^2+P_3^2},\ \alpha>0.\quad(3)$$

Зазначимо, що у залежності (3) значення коефіцієнта α залежить від багатьох факторів, серед яких основними є: вид палива, напрям сили тяги $\vec{P}=\left(P_1,P_2,P_3\right)$ та її величина в технічно допустимих межах, які визначаються програмою польоту. Сила тяги завжди направлена вздовж конструктивної осі ракети, тобто має лише одну компоненту.

Сила ваги ракети $G_p(t)$ змінюється на траєкторії як внаслідок вигорання палива, так і внаслідок зміни прискорення вільного падіння з висотою. За сталості секундних витрат $\bar{G}$ палива вага одноступінчатої ракети в польоті змінюється за лінійним законом

$$G_p(t)=G_0-\bar{G}g\left(x_2\right)t,\quad(4)$$

де G_0 – стартова вага ракети. Зазначимо, що ракети з невеликим діапазоном дії по дальності польоту володіють особливістю стосовно траєкторій, яка полягає в тому, що максимальна висота траєкторії значно менша за радіус Землі, тобто $h=x_2-R\cong R$. Тоді згідно закону тяжіння Ньютона отримується наближена залежність зміни прискорення g з висотою

$$g\left(x_2\right)=\frac{K}{\left(R+h\right)^2}=\frac{K}{x_2^2},$$

де $K=3,986\cdot10^{14}$, м^3/с^2 – постійний коефіцієнт (гравітаційний параметр планети); $h=x_2-R$ – висота підіймання над поверхнею Землі; $R=6371$ км – радіус Землі. Розрахунки свідчать, що прискорення g на 1 км підіймання зменшується на 0,0031 м/с^2, а на активній ділянці траєкторії (до висот 30-40 км) в розрахунках, що не вимагають високої точності, можна прийняти $g\left(x_2\right)\approx g_0=9,78$ м/с^2.

Згідно конструктивних особливостей ракетних двигунів [5] сила тяги є рівнодійною всіх сил, прикладених до камери під час її роботи, за виключенням сили ваги і реакцій опор. При визначенні траєкторії руху вважається, що тяга двигуна спрямована вздовж осі ракети і її центр мас лежить на цій осі. Тому складові тяги двигуна по поперечних осях зв’язаної системи координат рівні нулю. А це означає, що тяга визначається силами, які діють з боку газоподібного робочого тіла на внутрішню поверхню камери, і силами впливу навколишнього середовища на її зовнішню поверхню. Залежність для номінального значення величини сили тяги згідно [12] має вигляд:

$$P_{tm}=Gw_a+F_a\left(p_a-p_{at}\right),\quad(5)$$

де позначено: G – витрати палива на одиницю маси (кг/с); w_a – швидкість газів на зрізі сопла (швидкість витікання газів, м/с); F_a – площа вихідного січення сопла (м^2); p_a – тиск газів на зрізі сопла (Н/м^2); p_{at} – тиск оточуючого середовища (Н/м^2).

Залежність виду (5) для сили тяги отримано в припущенні, що напрям потоку газів, який виходить з сопла, паралельний осі сопла. Конструктивні особливості ЛА передбачають також можливість, за якої у вихідному січенні напрям стінки сопла не паралельний осі, тому швидкість потоку газів, направлена вздовж стінки, відхиляється від напряму дії сили тяги; з урахуванням даної обставини вираз для сили тяги (5) підправляється відповідним коефіцієнтом втрати тяги на розсіювання. Графік залежності сили тяги двигуна від часу для різних схем горіння показано на рис. 2.

Зазначимо, що в ракетних двигунах керованих балістичних ракет намагаються забезпечити сталість тяги на всій активній ділянці траєкторії.

Використавши апарат узагальнених функцій [14] та одиничні функції відрізка [16] зміну сили тяги в часі у випадку горіння за сталої поверхні зручно подати у вигляді

$$\begin{aligned}P(t)&=P_{tm}\frac{t}{t_0}\left[S_+(t)-S_+\left(t-t_0\right)\right]+\\&+P_{tm}\left[S_+\left(t-t_0\right)-S_+\left(t-t_1\right)\right]+\\&+P_{tm}\frac{t-t_k}{t_1-t_k}\left[S_+\left(t-t_1\right)-S_+\left(t-t_k\right)\right].\quad(6)\end{aligned}$$

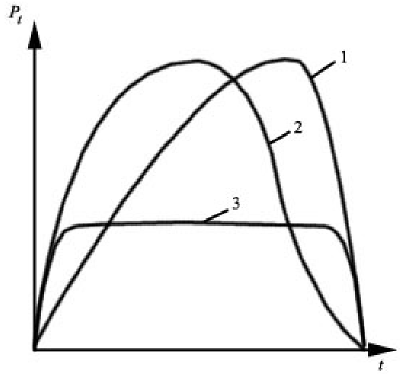

Рис. 2. Графік зміни сили тяги в часі для різних схем горіння: 1 – прогресивне горіння; 2 – дегресивне горіння; 3 – горіння за сталої поверхні

В залежності (6) позначено: t_0 – час виходу роботи двигунної установки на номінальний режим; t_1 – час початку спадання величини сили тяги; t_k – час вимкнення двигунної установки і початку переходу польоту ракети в пасивну стадію; $S_+(\xi) = \begin{cases} 0, \xi \le 0, \\ 1, \xi > 0 \end{cases}$ – одинична функція Гевісайда [18].

Ракета може виконувати маневр відносно осей стабілізації і змінювати траєкторію польоту за умови, що до неї прикладена сила, направлена під кутом відносно положення дотичної до траєкторії (тобто до вектора швидкості). Складова цієї сили $F_n^{(d)}$, направлена по нормалі до траєкторії, а також по нормалі до сили тяги P_t, має назву керуючої сили.

При складанні рівнянь руху центра мас ракети, представлені у вигляді (1), сили, які діють на неї, проектуються спочатку на осі системи координат, жорстко зв'язаній з ЛА (зв'язана система координат), початок якої збігається з центром мас ракети, а осі спрямовані вздовж характерних елементів її конструкції (рис.3). Проекції $R_i^{(rs)}$ сумарної аеродинамічної сили $\vec{R}^{(rs)}$ на осі зв'язаної системи координат, мають назву відповідно сила лобового опору $R_1^{(rs)}$, підіймальна сила $R_2^{(rs)}$ і бокова сила $R_3^{(rs)}$; їх розрахункові формули згідно праці [11], мають вигляд

$$R_i^{(rs)} = C_i q S, \qquad (7)$$

де $q = 0,5\rho v^2 = 0,5\rho\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right)$ – швидкісний напір, Н/м^2; ρ – густина повітря; S – характерна площа ракети, до якої віднесено коефіцієнти C_i її аеродинамічних сил. Відзначимо, що для осесиметричних за конструктивним виконанням ракет значення S приймається як площа міделевого січення (для крилатих ракет значення S приймають як площу крил в плані). Аеродинамічна сила, тобто сила опору повітря, діє на ракету лише при її русі в щільних шарах атмосфери, а саме до висот біля 80 км. Вище цієї висоти опором повітря можна знехтувати і вважати, що ракета летить в пустоті [4].

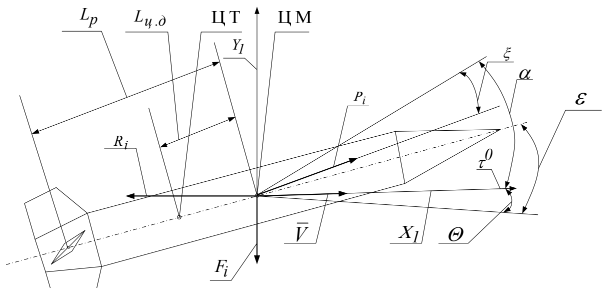

Рис. 3. Сили які діють на ракету під час польоту на активній ділянці траєкторії: α кут атаки; ε - кут тангажу; Θ - кут нахилу траєкторії; τ^0 - напрямок дотичної до траєкторії; $\bar{V}$ - вектор швидкості ракети; P_i - сила двигуна; F_i - сила притягання ракети; R_i - сила лобового опору повітря; $L_{ц.д}$ - відстань між центром маси і центром тиску; L_p - відстань від центру тиску керуючими органами до центру мас ракети; Ц Т – центр тиску; Ц М – центр маси.

Отже, вважаючи заданою силу $\vec{P}(t) = (P_1, P_2, P_3)$, яка діє на рухомий ЛА, визначення руху зводиться до відшукання чотирьох невідомих функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ та $m(t)$ з чотирьох диференціальних рівнянь виду (1), (3) та урахування залежностей (2), які утворюють систему диференціальних рівнянь другого порядку.

Початковими умовами задачі є радіус-вектор $\vec{r}(t_0)$, компоненти якого задаються скалярними величинами в заданий момент часу $t = t_0$, та початкова маса ЛА:

$$x_i(t_0) = x_{Ci} \quad (i = 1,2,3); \; m(t_0) = M_0. \qquad (8)$$

Вважається, що поверхня Землі в межах траєкторії збігається з площиною горизонту в точці старту (кривизна Землі не враховується), внаслідок чого граничні умови (5) матимуть вигляд:

$$x_1(t_0) = R\cos\alpha_1,$$

$$x_2(t_0) = R\cos\alpha_2, \; x_3(t_0) = R\cos\alpha_3,$$

де $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ – напрямні косинуси радіуса-вектора, який сполучає початок геоцентричної системи з точкою старту; напрямні косинуси пов'язані залежністю:

$$\cos\alpha_1^2 + \cos\alpha_2^2 + \cos\alpha_3^2 = 1.$$

У момент часу $t = t_k$, який відповідає розрахунковому часу вимкнення двигуна в певній точці на активній ділянці траєкторії, маємо кінцеву масу ЛА M_k ("суха маса" конструкції) з урахуванням її змінності, пов'язаній витіканням продуктів згорання ракетного двигуна

$$m(t_k) = M_k = M_0 - \frac{1}{t_k - t_0}\int_{t_0}^{t_k} m(t)\,dt. \quad (9)$$

Кінцева точка активної ділянки траєкторії характеризується тим, що її положення, а також значення та напрямок вектора швидкості $v_k\left(\dot{x}_1(t_k), \dot{x}_2(t_k), \dot{x}_3(t_k)\right)$ має приймати такі величини, за яких траєкторія руху ЛА проходитиме через ціль ураження.

З урахуванням співвідношення (6) інтегрування рівняння (3) у межах для маси від M_0 до M_k дає такий розв'язок

$$m(t) = -\alpha\int_0^t P(\tau)\,d\tau + M_0 =$$

$$= -\alpha P_{tm}\left\{\frac{t^2}{2t_0^2}\left[S_+(t) - S_+(t-t_0)\right] + \frac{t}{2t_0}S_+(t-t_0) + \right.$$
$$+(t-t_0)S_+(t-t_0) - (t-t_1)S_+(t-t_1) +$$
$$+\frac{(t-t_k)^2}{2(t_1-t_k)}\left[S_+(t-t_1) - S_+(t-t_k)\right] +$$
$$\left. + \frac{t-t_k}{2}S_+(t-t_1)\right\} + M_0, \quad (10)$$

який визначає масу ЛА з плином часу в процесі польоту. Зокрема, поклавши в співвідношенні $t = t_k$, дістанемо значення "сухої маси":

$$M_k = M_0 - \alpha P_{tm}\left(\frac{t_k}{2t_0} + t_1 - t_0\right).$$

На пасивній ділянці руху, яка перебуває в сильно розріджених шарах атмосфери, нехтується опором повітря і вважається, що рух ракети відбувається лише під дією сили тяжіння, що характеризується залежностями

$$\vec{P}(t) = 0, \; m(t) = M_k = \text{const};$$

тоді виходячи з системи рівнянь (1) та співвідношень (2), приходимо до трьох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{x}_i(t) = -\frac{x_i}{r^3}gR^2\,(i = 1,2,3). \quad (11)$$

В умовах руху ЛА як балістичне тіло він перебуватиме в площині розміщення вектора швидкості $\left(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)\right)$ і вектора прискорення $\left(\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t)\right)$, який можна переписати у вигляді $\frac{\vec{F}}{M_k} = -\left\{\frac{x_1}{r^3}, \frac{x_2}{r^3}, \frac{x_3}{r^3}\right\}gR^2\,(i = 1,2,3)$. Розміщуючи координатні осі x_1 і x_2 в цю площину отримуємо як частковий випадок систему двох рівнянь $(x_3 = 0)$:

$$\ddot{x}_i(t) = -\frac{x_i}{r^3}gR^2\,(i = 1,2); \; r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (12)$$

Помноживши послідовно кожне з рівнянь (12) на величини x_i та сумуючи їх приходимо до рівняння

$$\dot{x}_1(t)\ddot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t)\ddot{x}_2(t) =$$
$$= -\frac{gR^2}{r^3}\left(x_1(t)\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t)\right),$$

яке можна переписати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}{2}\right) = -\frac{gR^2}{r^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1^2(t) + x_2^2(t)}{2}\right) =$$
$$= gR^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right),$$

або надавши певного фізичного сенсу

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M_k}{2}\left(\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)\right) - \frac{M_k gR^2}{r}\right) = 0. \quad (13)$$

Співвідношення (13) виражає закон збереження енергії на пасивній ділянці траєкторії: сума кінетичної енергії корабля $U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)\right)$ і його потенціальної енергії $V = -\frac{M_k gR^2}{r}$ стала.

З співвідношення (13) як наслідок отримується диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}{2} - \frac{gR^2}{r} = C = \text{const}. \quad (14)$$

Зазначимо, що залежність (14), згідно термінології [13;15-17], має назву проміжний інтеграл системи рівнянь (11). Стала C в залежності (14) може бути визначеною з умови, якщо в деякій точці траєкторії зафіксовано швидкість ЛА, тобто величина $v(t_k) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$, та віддаль $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ від центра Землі.

Висновки й перспективи подальших досліджень

Серед багатьох розгалужень балістики, ми зовсім не торкнулись питання теорії польоту ракет, розгляд якого приводить до появи нових і заплутаних ускладнень. Також важливою є проблема вимірювання різного роду аеродинамічних коефіцієнтів. В цій царині спостерігається широке поле діяльності для інженерів-дослідників, оскільки виникає нагальна необхідність будь-яким способом записати поведінку рухомого заряду в реальному або модельованому русі. Тому помітну роль в окресленій проблемі відіграє сучасна математика для інженера – при аналізі результатів вимірювань або спробах виокремити вплив з сукупності множини факторів кожного зокрема, а також дослідити їх взаємозв'язок.

В зв'язку з цим постає питання активного використання відповідних статистичних методів, оскільки специфіка досліджуваного явища вимагає розгляду та урахування неточно виміряних величин або даних вимірювань, які відбуваються за змінних і неточно детермінованих фізичних умов; отже, щоб перевірити надійність і отримати максимум відомостей з деякого фіксованого набору даних, слід залучати статистичні методи.

Відомо, що основне завдання математичної статистики полягає в отриманні достовірних висновків про властивості досліджуваних об'єктів або процесів на основі математичних показників вибіркової статистичної сукупності [14-19]. Очевидно, що при цьому бажано, щоб вибіркова статистична сукупність мала б мати достатньо велике число спостережень, які давали б надійні висновки про властивості загальної сукупності. Однак специфіка експериментальних стрільб, полягає у значних труднощах, пов'язаних з їх організацією і проведенням, а також складністю оцінки кута нахилу головних осей розсіювання, обумовленого достатньо невеликою кількістю числа випробувань (не більше десятка). Внаслідок цього ефективним є застосування методу найбільшої правдоподібності, хоча на практиці він вимагає великої кількості складних обчислень.

На завершення зазначимо, що систематичний аналіз проблем балістики передбачає використання такого математичного апарату, який дає змогу вирішити питання, чим саме без значної шкоди для остаточного результату вирішення проблеми можна знехтувати, а чим – тимчасово, маючи на увазі пізніше в результаті відповідних уточнень, внести відповідні поправки. Тому найбільш вагомих і суттєвих результатів можна досягнути, використовуючи методи математичного моделювання вкупі з апроксимаційними методами.

Література

1. Cranz K.J. Lehrbuch der Ballistik / K. J. Cranz. – Berlin : Springer-Verlag, 1927. – 484 p. **2. McShane E.J.** Exterior Ballistics / E.J. McShane, J.L. Kelley, P.V. Reno. – Denver: University of Denver Press, 1953. – 382 p. **3. Hayes T.J.** Elements of Ordnance / T.J. Hayes. – New York: John Wiley, 1938. – 288 p. **4. Дмитриевский А. А.** Внешняя баллистика / А. А. Дмитриевский, Л. Н. Лысенко. – М. : Машиностроение, 2005. – 607 с. **5. Основи теорії** польоту і конструкції ракет : навчальний посібник / П. І. Гайда, П. Є. Трофименко, М. М. Ляпа. – Суми: Сумський державний університет, 2011. – 248с. **6. Коновалов А. А.** Внешяя баллистика / А. А. Коновалов, Ю. В. Николаев. – М.: ЦНИИ информации, 1979. – 228 с. **7. Лисенко В. М.** Баллистика ствольных систем. Справочная библиотека разработчика-исследователя / Л. Н. Лисенко, В. В. Грабин. – М.: Машиностроение, 2006. – 461 с. **8. Равдин И. Ф.** Внешняя баллистики неуправляемых реактивних снарядов / И. Ф. Равдин. – М.: ВАА, 1972. – 184 с. **9. Розрахунок** дериваційного відхилення літальних апаратів, що обертаються / [В.І. Макєєв, В.І. Грабчак, П.Є. Трофименко, Ю.І. Пушкарьов] // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2008. – Вип. 3(7). – С.116-119. **10. Исследвание влияния** параметров работы реактивного двигателя на дальность и кучность стрельбы реактивних снарядов / [В.И. Макеев, В.И. Грабчак, П.Е. Трофименко, Ю.И. Пушкарев] // Системы обработки информации. – 2008. – Вип. 6(73). – С.77-81. **11. Физические основы** ракетного оружия / [Алексеев М. И., Жуков И. И., Савин Н. В. и др.]. – М.: Воениздат, 1972. – 312 с. **12. Савкин Л. С.** Метеорология и стрельба артиллерии / Л. С. Савкин, Б. Д. Лебедев. – М.: Воениздат, 1974. – 144 с. **13. Карташев А. П.** Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. – М.: Наука, 1980. – 288 с. **14. Гельфанд И. М.** Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с. **15. Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1986. – 1108 с. **16. Справочник** по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с. **17. Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1975. – 831 с. **18. Кеч В.** Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике / В. Кеч, П. Теодореску. – М.: Мир, 1978. – 518 с.

ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАЛЬНОГО АППАРАТА НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ

***Вячеслав Витальевич Прокопенко** (канд. техн. наук)*
***Евгений Григорьевич Іваник** (канд. физ.-мат. наук)*
***Петро Иванович Ванкевич** (д-р техн. наук, доцент)*
***Юрий Витальевич Щавинский** (доцент)*

Национальная академия сухопутных войск имени гетмана Петра Сагайдачного, Львов, Украина

Изложено основные аспекты изучения движения артиллерийского снаряда или управляемого ракетного приспособления в атмосфере, возникающие перед исследователями по вопросам внешней баллистики. Приведено перечень проблем, связанных с математическим моделированием исследуемого научно-технического явления, которое по существу является комплексной проблемой, конечной целью решения которой есть построение баллистических таблиц и таблиц стрельбы для определенного типа зарядного приспособления. Дано систематизацию подхода к изучению движения летательного аппарата на разных участках траектории (в атмосфере и в условиях пассивного движения как баллистическое тело), а также математический аппарат и инструментарий решения данной проблемы. Решения поставленной проблемы сведено к отысканию четырех неизвестных функций (кинематические характеристики движения и переменная во времени масса объекта) из четырех *дифференциальных уравнений движения. С использованием ассиметричных единичных функций представлено аналитическим выражением изменение силы тяги во времени. Для пассивного участка траектории, где полагается, что движение ракеты осуществляется лишь под действием силы тяготения, записано промежуточный интеграл системы дифференциальных уравнений, описывающих данное движение.*

Ключевые слова: *внешняя баллистика; движение летательного аппарата; система дифференциальных уравнений; система координат; аэродинамические факторы; числовое интегрирование дифференциальных уравнений движения.*

DESCRIPTION OF THE AERIAL VEHICLE MOTION ON THE ACTIVE TRAJECTORY LEG

Viacheslav V. Prokopenko ***(Candidate of Technical Sciences)***
Yevhen H. Ivanyk ***(Candidate of Physical and Mathematical Sciences)***
Petro I. Vankevych ***(Doctor of Technical Sciences, Associate Professor)***
Yurii V. Shchavinsky ***(Associate Professor)***

Hetman Petro Sahaidachny National Army Academy, Lviv, Ukraine

There are outlined the main aspects of study of an artillery shell or missile, or managed devices in the atmosphere motion, facing by researchers on the external ballistics. There is the list of problems associated with the mathematical modeling of the studied scientific and technical phenomena, which is in fact a complex problem, ultimate solution of which will be construction of ballistic tables and firing tables for particular type of charger device. Given the systematization of approach to the study of aircraft movement at different phases of its trajectory (in atmosphere and during ballistic motion as a passive body), as well as the mathematical formalism and tools for this problem. The solution of problem is reduced to determination of the four unknown functions (kinematic characteristics of motion and time-variable mass of the object) of the four differential equations of motion. An analytical expression of traction changes with time, using asymmetric unit features were presented. For the passive part of the trajectory where movement of the rocket is supposed be carried out only under the influence of gravitation, written down an intermediate integral system of differential equations describing this movement.

Keywords: *exterior ballistics; aerial vehicle movement; differential equation system; systems of coordinates; aerodynamic contributors; numerical integration of differential equations of motion.*

References

1. Cranz K.J. (1927), Lehrbuch der Ballistik, Berlin: Springer-Verlag, 484 p. **2. McShane E.J.** (1953), Exterior Ballistics, Denver: University of Denver Press, 382 p. **3. Hayes T.J.** (1938), Elements of Ordnance, New York: John Wiley, 288 p. **4. Dmitrievskyy A.A.** (2005), External Ballistics, [*Vneshniaia ballistika*], A.A. Dmitrievskyy, L.N. Lysenko, Moscow: Mechanical engineering, 607 p. **5. Basic Theory** of Flight and Rocket Construction: Tutorial, [*Osnovy teorii polotu i konstruktsii raket : navchalnyi posibnyk*], (2011), P.I. Gaida, P.Ye. Trofymenko, M.M. Lyapa, Sumy: Sumy State University, 248 p. **6. Konovalov A.A.** (1979), External Ballistics [*Vneshniaia ballistika*], A.A. Konovalov, Yu.V. Nikolaev - Moscow: CRI for Information, 228 p. **7. Lysenko V.M.** (2006), Ballistics barrel systems. Reference library for Developer-Researcher, [*Ballistika stvolnykh sistem. Spravochnaia biblioteka razrabotchika-issledovatelia*], L.N. Lysenko, V.V. Grabin, Moscow: Mechanical Engineering, 461 p. **8. Ravdin I.F.** (1972), External ballistics unguided missiles. [*Vneshniaia ballistiki neupravliaemykh reaktivnikh snariadov*], I.F. Ravdin, Moscow: BAA, 184 p. **9. Calculation of** Derivational Rejection for Rotating Aircrafts, (2008), [*Rozrakhunok deryvatsiinoho vidkhylennia litalnykh aparativ, shcho obertaiutsia*], V.I. Makeev, V.I. Grabchak, P.E. Trofymenko, Yu.I. Pushkaryov, Systems of control, navigation and communication, Vol. 3 (7), pp.116-119. **10.Investigation** of Effect of the Jet Engine Parameters on the Range and Accuracy of Rockets Fire, (2008), [V.I. Makeev, V.I. Grabchak, P.E. Trofymenko, Yu.I. Pushkarev], [*Issledvanie vliianiia parametrov raboty reaktivnogo dvigatelia na dalnost i kuchnost strelby reaktivnikh snariadov*], Systems for information processing, Vol. 6 (73), pp.77-81. **11. Physical** bases of missiles, (1972), [*Fizicheskie osnovy raketnogo oruzhiia*], [Alekseev M.I., Zhukov I.I., Savin N.V. et al.], Moscow, Military Publishing, 312 p. **12. Savkin L.S.** (1974), Meteorology and Artillery Fire, [*Meteorologiia i strelba artillerii*], L.S. Savkin, B.D. Lebedev, Moscow: Military Publishing, 144 p. **13. Kartashov A.P.** (1980), Ordinary Differential Equations and the Basics of Variational Calculus, [*Obyknovennye differentcialnye uravneniia i osnovy variatcionnogo ischisleniia*], A.P. Kartashov, B.L. Rozhdestvenskyy, Moscow: Nauka, 288 p. **14. Gelfand I.M.** (1959) Generalized Functions and Operations on Them, [*Obobshchennye funktcii i deistviia nad nimi*], I.M. Gelfand, G.E. Shilov, Moscow: Fizmatgiz, 470 p. **15. Gradshtein I.S.** (1986), Tables of Integrals, Sums, Series and Multiplications, [*Tablitcy integralov, summ, riadov i proizvedenii*], I.S. Gradshtein, I.M. Ryzhik, Moscow.: Nauka, 1108 p. **16. Handbook of Mathematical** Functions with Formulas, Graphs and Tables (1979), [*Spravochnik po spetcialnym funktciiam s formulami, grafikami i tablitcami*], Ed. M. Abramowitz, I. Steagan, Moscow: Nauka, 832 p. **17. Korn G.** (1975), Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, [*Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*], G. Korn and T. Korn, Moscow: Nauka, 831 p. **18. Kech V.** (1978), Introduction to the Theory of Generalized Functions with Applications in Engineering, [*Vvedenie v teoriiu obobshchennykh funktcii s prilozheniiami v tekhnike*], V. Kech, P. Teodorescu, Moscow: Mir, 518 p.

Отримано: 03.03.2016 року.