

*Петро Васильович Фриз (канд. техн. наук, доцент, професор кафедри)*

*Житомирський військовий інститут ім. С. П. Корольова, Житомир, Україна*

## УДОСКОНАЛЕНИЙ НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ АПАРАТ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЗБУРЕНОГО РУХУ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ

У статті систематизовано та вдосконалено відомий науково-методичний апарат для моделювання незбуреного руху космічних апаратів (КА) у прикладних завданнях як на етапах створення космічних систем (КС), так і під час їх цільового застосування. Значно розширено математичний апарат для моделювання просторо-часового положення КА за рахунок модифікацій базових векторів. Аналітичні викладки доповнено переходами між векторами за допомогою оригінальних гіперграфів, що суттєво спрощує процес моделювання. Наведено методики перерахунків одних елементів орбіт в інші, розкрито підхід до розв'язку трансцендентного рівняння Кеплера методом ітерацій. Запропоновано алгоритм переходу від безперервних функцій польотного часу до їх дискретної форми.

**Ключові слова:** незбурений рух; моделювання; параметри орбіт; вектор просторо-часового положення; космічний апарат; TLE-файли.

### Вступ

Відомо, що на етапах розроблення та цільового застосування КС математичне моделювання як інструмент їх дослідження відіграє ключову роль, оскільки “замінює” ще не створені КС або “наближує” до персоналу вже існуючі віддалені космічні засоби, що функціонують у складних умовах.

Особливо ефективним видається моделювання орбітального руху КА, оскільки для цього існує добре відпрацьований математичний апарат, а також використовуються макети, посібники, кінцеві формули, готові програмні продукти та ін.

При цьому традиційно вважається, що в першу чергу варто досліджувати збурений (тобто реальний) орбітальний рух КА, оскільки природно він відбувається у багатофакторному просторі зі слабко передбачуваними параметрами і випадковими процесами. І це насправді так.

Однак з методичного погляду простіше, а іноді і достатньо спочатку вивчити або дослідити незбурений (ідеальний) рух КА, а далі враховувати збурювальні фактори та їх вплив на орбітальний рух у цілому. З огляду на останнє зауваження дана стаття орієнтована якраз на незбурений орбітальний рух як основу для подальших досліджень реальних КС та процесів у них.

**Постановка проблеми.** Оскільки в теперішній час теорія незбуреного руху достатньо вивчена, то наслідком цього є добре розвинутий відповідний математичний апарат. Але, на жаль, він розосереджений у різних джерелах, має різну семантику, не завжди пристосований для моделювання та аналітичних розрахунків у реальних умовах.

Через це існує певне протиріччя між зростаючими об'ємами математичних викладок теорії орбітального руху та обмеженими можливостями щодо їх практичного використання. Крім того,

потребує вдосконалення або розроблення сама методика розрахунків, оцінювання отриманих результатів та прийняття відповідних рішень.

У зв'язку з цим метою статті є систематизація та вдосконалення відомого науково-методичного апарату для моделювання незбуреного руху КА як передумови подальших досліджень.

**Огляд останніх досліджень і публікацій.** Питанням моделювання орбітального руху КА присвячено значну кількість сучасних наукових робіт [1–9]. Але в них тільки вибірково висвітлюється застосований математичний апарат або не приводиться взагалі. Більшість із цих робіт мають вузько спрямоване застосування або вирішують тільки окремі специфічні завдання. У ряді зарубіжних розробок [8, 9] акцент зроблено на порядок їх використання без наведення математичних моделей.

**Викладення основного матеріалу.** У загальному випадку для опису (моделювання) просторо-часового положення КА при їх незбуреному русі використовують вектор орбітальних параметрів або вектор кеплерових елементів еліптичної орбіти вигляду [10, 11]:

$$\mathbf{R}_0 = \{a, e, w, i, W, t_{\Pi}\}, \quad (1)$$

де  $a$  і  $e$  – велика піввісь і ексцентриситет еліпса (розміри і форма орбіти);

$w, i, W$  – аргумент перигею, нахилення та інерціальна довгота висхідного вузла (ВВ) орбіти;

$t_{\Pi}$  – момент знаходження КА в перигеї орбіти.

Але на практиці [12] найчастіше розміри і форму орбіти первісно описують через висоту її апогею  $H_A$  та перигею  $H_{\Pi}$ . Тому велика піввісь еліптичної орбіти обчислюється (рис. 1) як [10]

$$a = 0,5 (r_A + r_{\Pi}) = 0,5 (H_A + H_{\Pi} + 2R_3), \quad (2)$$

де  $r_A = R_3 + H_A$  – відстань від центра Землі до апогею орбіти  $A$ ;

$r_{\Pi} = R_3 + H_{\Pi}$  – відстань від центра Землі до перигею орбіти  $\Pi$ ;

$R_3 = 6371$  км – середній радіус Землі.

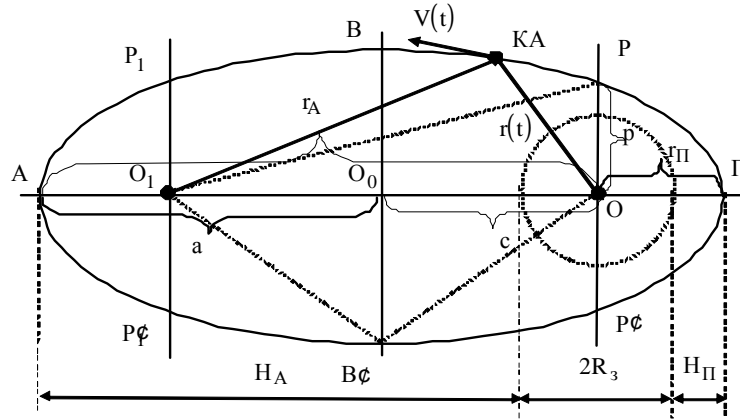


Рис. 1. До визначення елементів орбіти

Для розрахунків *ексцентриситету* можна користуватись залежностями [10]

$$e = \frac{c}{a} = \frac{H_A - H_{\Pi}}{H_A + H_{\Pi} + 2R_3} = \frac{H_A - H_{\Pi}}{2a}, \quad (3)$$

де  $c = OO_0$  – половина міжфокусної відстані еліпса орбіти.

Отже, як видно із аналізу виразів (2) і (3), замість класичного вектора (1) можна користуватись модифікованим вектором, більш пристосованим до реальних задач:

$$\mathbf{R}\Phi = \{H_A, H_{\Pi}, w, i, W, t_{\Pi}\}, \quad (4)$$

Більше того, розміри і форму орбіти можна характеризувати комплексним показником – *фокальним параметром*:

$$p = a(1 - e^2). \quad (5)$$

Враховуючи (5), можна запропонувати ще один модифікований вектор орбітальних параметрів:

$$\mathbf{R}\Phi = \{a, p, w, i, W, t_{\Pi}\} = \{p, e, w, i, W, t_{\Pi}\}. \quad (6)$$

Вектор (6) менш зручний для практики, оскільки фокальний параметр (5), що входить до його складу, має меншу інформативність порівняно з парою його компонентів  $\{a, e\}$  внаслідок їх “згортання” через арифметичні операції над ними. Тому виникає потреба доповнювати його одним із своїх же компонентів.

Із формул (2), (3) та (5) можна отримати і такі співвідношення, придатні для моделювання еліптичних орбіт при незбуреному русі КА:

$$r_A = a(1 + e) = p/(1 - e); \quad (7)$$

$$r_{\Pi} = a(1 - e) = p/(1 + e);$$

$$H_A = H_{\Pi} \frac{1 + e}{1 - e} + 2R_3 \frac{e}{1 - e}; \quad (8)$$

$$H_{\Pi} = H_A \frac{1 - e}{1 + e} - 2R_3 \frac{e}{1 + e},$$

причому формули (8) оприлюднюються вперше.

Поряд з висотами орбіт на практиці часто використовують *сидеричний період* обертання КА, який однозначно обчислюється за формулою [10]

$$T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu_0}, \quad (9)$$

де  $\mu_0 = 398602 \text{ км}^3/\text{с}^2$  – гравітаційний параметр Землі.

Із сидеричним періодом однозначно пов’язана середня кутова швидкість КА, названа в теорії польоту *середнім рухом* КА, який для еліптичних орбіт обчислюється за формулою

$$n = 2\pi/T = \sqrt{\mu_0/a^3}. \quad (10)$$

Тому вектор (1) можна подати як

$$\mathbf{R}\Phi = \{T, e, w, i, W, t_{\Pi}\} = \{n, e, w, i, W, t_{\Pi}\}. \quad (11)$$

Теоретично в разі  $e = 0$  говорять про *колові* орбіти, але на практиці скоріш за все використовують *майже колові* орбіти, коли  $e \gg 0$ , внаслідок чого із залежностей (5) та (7)–(10) отримуємо ряд прикладних формул:

$$\begin{aligned} H_A &\gg H_{\Pi} \gg H_0; \\ r_A &\gg r_{\Pi} \gg r_0 \gg H_0 + R_3; \\ a &\gg H_0 + R_3 \gg r_0 \gg p; \end{aligned} \quad (12)$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{r_0^3/\mu_0}; \quad n_0 = 2\pi/T_0 = \sqrt{\mu_0/r_0^3}.$$

Крім того, оскільки у *колових* орбіт не існує апогею і перигею, то аргумент перигею  $w$  у складі векторів (1), (4) та (6) втрачає сенс, а замість моменту  $t_{\Pi}$  слід використовувати момент перетинання КА площини екватора  $t_W$ .

В таких ситуаціях достатньо користуватись модифікованим вектором

$$\mathbf{R}_0 = \{H_0, e \gg 0, i, W, t_W\}. \quad (13)$$

Якщо *колова* орбіта *пряма приекваторіальна* ( $i \gg 0$ ), що можна подати логіко-аналітичним виразом:

$$(e \gg 0) \dot{(i \gg 0)} = 1,$$

то втрачають сенс інерціальна довгота  $W$  і момент часу  $t_W$ . Натомість для визначеності можна використовувати географічну довготу КА як функцію польотного часу  $t_t$ , який відносно конкретного спостерігача являє собою місцевий або всесвітній час.

Тоді вектор (13) набуває вигляду

$$\mathbf{R}_{00} = \{H_0, e \gg 0, i \gg 0, t_t\}. \quad (14)$$

І, нарешті, у разі стаціонарних орбіт висота колової екваторіальної орбіти  $H_0 \gg 35800$  км, тому виконується умова [11]:

$$(e \gg 0) \dot{U}(i \gg 0) \dot{U}(H_0 \gg 35800) = 1.$$

У цьому випадку КА залишається нерухомим відносно обертової Землі, “зависаючи” на географічній довготі  $l_0$ , а вектор (14) перетворюється до вигляду

$$\mathbf{R}_{CT} = \{H_0 \gg 35800, e \gg 0, i \gg 0, l_t \gg l_0\}. \quad (15)$$

На основі такого підходу можна отримати ряд інших векторів, які однозначно описують незбурені орбіти КА та зручні для практичного застосування.

Поряд з вектором кеплерових елементів (1) та його модифікаціями (4), (6) та (11) використовують й інші вектори, які комплексно характеризують параметри орбіти та параметри орбітального руху КА. Одним із них є вектор [10,11]

$$\mathbf{R}_t = \{r(t), V(t), q(t), u(t), W, i\}, \quad (16)$$

де  $r(t)$  і  $V(t)$  – поточні модулі радіуса-вектора КА та його лінійної швидкості (рис. 2);

$q(t)$  і  $u(t)$  – поточні кут місцевого горизонту та аргумент широти КА;

$t$  – польотний час КА, відлік якого ведеться від моменту  $t_{II}$ .

**Радіус-вектор** КА  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  з'єднує центр Землі і центр мас КА. Модуль радіуса-вектора змінюється у межах  $r_{II} \leq r \leq r_A$ , а його поточна величина визначається із *рівняння орбіти* у полярних координатах:

$$r(t) = \frac{p}{1 + e \cos J(t)}, \quad (17)$$

де  $J(t)$  – істинна аномалія КА (див. далі).

Для колових орбіт при  $e \gg 0$  із формули (17) одержимо  $r(t) = r_0 = p = a = \text{const}$ .

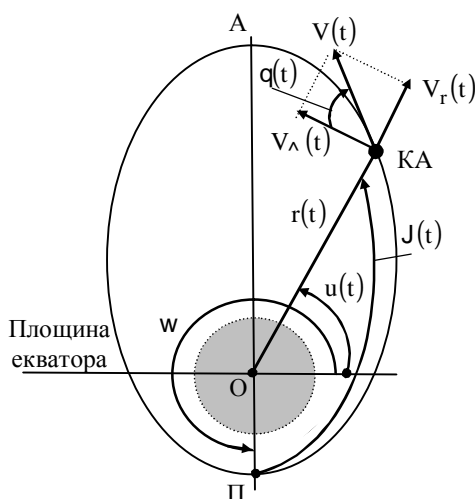


Рис. 2. Зв'язок між параметрами орбітального руху

**Лінійна швидкість** КА  $\vec{V} = \vec{V}(t)$  являє собою швидкість *поступального* руху центра мас КА у площині орбіти відносно інерціального простору.

Цей вектор завжди спрямований по дотичній до орбіти у точці знаходження КА (див. рис. 2).

Модуль *лінійної еліптичної* швидкості КА визначається як [10]

$$V(t) = \sqrt{m_0 \frac{2}{r(t)} - \frac{1}{a}}. \quad (18)$$

Формула (18) універсальна, оскільки вона придатна і для колових орбіт як часткового випадку еліптичних. Якщо КА рухається по *коловій* орбіті з радіусом  $r = a = r_0$ , то із рівняння (18) одержимо формулу для його *лінійної колової* швидкості:

$$V_0 = \sqrt{m_0 / r_0} = \text{const}. \quad (19)$$

**Радіальна** складова  $\vec{V}_r = \vec{V}_r(t)$  являє собою проекцію вектора лінійної швидкості КА на його радіус-вектор  $\vec{r}$ . Вона характеризує швидкість зміни модуля (довжини) радіуса-вектора КА і може бути обчислена за формулою [10]

$$V_r(t) = \sqrt{\frac{m_0}{p}} e \sin J(t). \quad (20)$$

Як впливає із цього виразу, для еліптичних орбіт радіальна швидкість може бути додатною (КА віддаляється від центра Землі), від'ємною (КА наближається) або такою, що дорівнює нулю (КА перебуває в апогеї або перигеї).

Максимального значення модуль радіальної швидкості досягає у точках P та Pϕ (див. рис. 1), тобто при  $\sin J(t) = \pm 1$  або  $J = 90^\circ$  і  $J\phi = 270^\circ$ . Для колових орбіт ( $e \gg 0$ ) завжди виконується умова  $V_r \gg 0$ .

**Трансверсальна** складова  $\vec{V}_\lambda = \vec{V}_\lambda(t)$  – це проекція вектора лінійної швидкості КА на лінію місцевого горизонту (перпендикуляр до радіального напрямку). Вона завжди більше нуля, характеризує швидкість поступального переміщення кінця радіуса-вектора під час руху КА та обчислюється як [10]

$$V_\lambda(t) = \sqrt{\frac{m_0}{p}} [1 + e \cos J(t)]. \quad (21)$$

Для еліптичних орбіт в апогеї і перигеї трансверсальна швидкість дорівнює лінійній швидкості КА в цих же точках. Для колових орбіт (при  $e \gg 0$ )

$$V_r \gg 0; V_\lambda \gg V \gg \text{const}.$$

Як видно із рис. 2, на еліптичних орбітах для будь-якого моменту часу справедливі такі співвідношення:

$$V_r = V \sin q; V_\lambda = V \cos q; \quad (22)$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\lambda^2}.$$

У цих формулах  $q = q(t)$  – кут *місцевого горизонту* – кут нахилення вектора лінійної швидкості до місцевого горизонту, відлічуваний за годинниковою стрілкою.

Як впливає із формул (22), поточні значення цього кута

$$q = \arcsin(V_r / V) = \arccos(V_\lambda / V). \quad (23)$$

Кут місцевого горизонту може отримувати додатні значення (при віддаленні КА від центра Землі), від'ємні (при наближенні КА), а також нульові в апогеї і перигеї орбіти. Із виразу (23) видно також, що для колових орбіт кут  $q(t) \gg 0$ .

Аргумент широти КА  $u = u(t)$  являє собою поточне кутове положення КА у площині орбіти, відлічуване від площини екватора Землі по ходу орбітального руху КА. Його можна знайти через аргумент перигею  $w$  та істинну аномалію КА  $J = J(t)$  як

$$u(t) = w + J(t). \quad (24)$$

Істинна аномалія КА  $J = J(t)$  теж являє собою кутове положення КА у площині орбіти, але відлічуване від точки перигею орбіти по ходу орбітального руху КА. Її можна знайти через ексцентричну аномалію КА  $E = E(t)$  як

$$J(t) = 2 \arctg \frac{e \sqrt{1+e} \frac{dE(t)}{dt}}{e \sqrt{1-e} \frac{dE(t)}{dt}} \quad (25)$$

Ексцентрична і середня аномалії пов'язані між собою рівнянням Кеплера, що явно описує елементи орбіт і параметри руху КА в часі у вигляді

$$E(t) - e \sin E(t) = M(t), \quad (26)$$

де  $M = M(t)$  – середня аномалія КА, яку можна обчислювати через середній рух  $n$  та польотний час КА  $t$  відносно моменту його перебування в перигеї  $t_{II}$  як

$$M(t) = n(t - t_{II}). \quad (27)$$

Із викладеного випливає, що вектори (1) та (16) однозначно пов'язані між собою, наочно описують просторово-часове положення КА, мають зрозумілий геометричний смисл і через це широко застосовуються при вивченні теорії орбітального руху та проведенні наукових досліджень.

Однак на практиці найбільш вживаним є підхід до просторово-часового опису КА за допомогою TLE-файлів (*Two-Line Element set* – дворядковий елементи), які можна знайти за адресою: <http://celestrac.com/NORAD/documentation/tle-fmy.htm> [13, 14].

Приклад реального TLE-файла наведено у табл. 1, його структуру подано у табл. 2, а семантику вживаних позначень можна знайти в [10].

Таблиця 1

Реальний TLE-файл з казахського КА KAZEOSAT 1

KAZ 1										
1	39731U	14024A	17104.79072753	.00000003	00000-0	14338-4	0	9993		
2	39731	98.4208	184.7429	0001376	91.2441	268.8898	14.420031	18155755		

Таблиця 2

Структура TLE-файлів

Назва КА (не більше 24 символів)										
1	CCCCC	U	YYN <sub>0</sub> N <sub>0</sub> N <sub>0</sub> A	DDDDD.ddddddd	.GGGGGGGG	PPPPP-P	QQQQQQ-Q	0	SSS	Z
2	CCCCC	iii.iii	WWWWWWW	eeeeeee	WWW.WWWW	MMM.MMMM	NN.NNNNNNNN	OOOOO		Z

Аналіз змісту TLE-файлів показує, що із їх складу можна виділити лише ті параметри, які подібно векторам (1) та (2) характеризують просторово-часове положення КА:

$$\mathbf{R}_{tle} = \{t_D, i, W, e, w, M, N, Q\}, \quad (28)$$

де  $t_D$  – епоха □ момент часу, в який сформовано даний TLE-файл;

$M$  – середня аномалія КА на момент  $t_D$ ;

$N$  – середньодобовий рух КА (кількість витків орбіти за добу);

$Q = \{G, P, O, D\}$  – решта даних (перша  $G$  та друга  $P$  похідні від середньодобового руху, кількість витків на епоху  $O$  та інші  $D$ ).

Аналіз векторів (1), (16) та (28) показує, що між ними існує певний взаємозв'язок, що дозволяє однозначно переходити від відомих компонентів одного вектора до шуканих компонентів іншого за схемою:  $\mathbf{R}_{tle} \ll \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0 \ll \mathbf{R}_t, \mathbf{R}_{tle} \ll \mathbf{R}_t$ , – а далі проводити моделювання за допомогою найбільш придатного із них.

На практиці найчастіше постає завдання переходу від вектора (28) до векторів (1)  $\mathbf{R}_{tle} \otimes \mathbf{R}_0$  та (16)  $\mathbf{R}_0 \otimes \mathbf{R}_t$ .

**Методика переходу  $\mathbf{R}_{tle} \otimes \mathbf{R}_0$**  в разі незбуреного руху КА може бути такою (рис. 3):

По-перше, при незбуреному орбітальному русі КА елементи  $i, W, e, w$  векторів (1) та (28) збігаються і перерахунків не потребують.

По-друге, знайти велику піввісь  $a$  для вектора (1) із формули (12) як

$$a = \sqrt[3]{m_0/n}, [n] = c^{-1}. \quad (29)$$

По-третє, оскільки в TLE-файлах надається середньодобовий рух КА  $N = \text{const}$  як кількість витків за середньосонячну добу  $T_{cd} = 86400^s$ , то для знаходження середнього руху  $n$  слід скористатись очевидною залежністю:

$$n = N/T_{cd} = N/86400^s. \quad (30)$$

По-четверте, для розрахунків моменту проходження КА через перигей орбіти  $t_{II}$  у складі вектора (1) застосувати формулу (27).

Справді, прийнявши  $t = t_D$  і скориставшись відомою із TLE-файла середньою аномалією  $M(t) = M(t_D) = M$  та середнім рухом КА (30), із виразу (27) знайдемо

$$t_{II} = t_D - M/n. \quad (31)$$

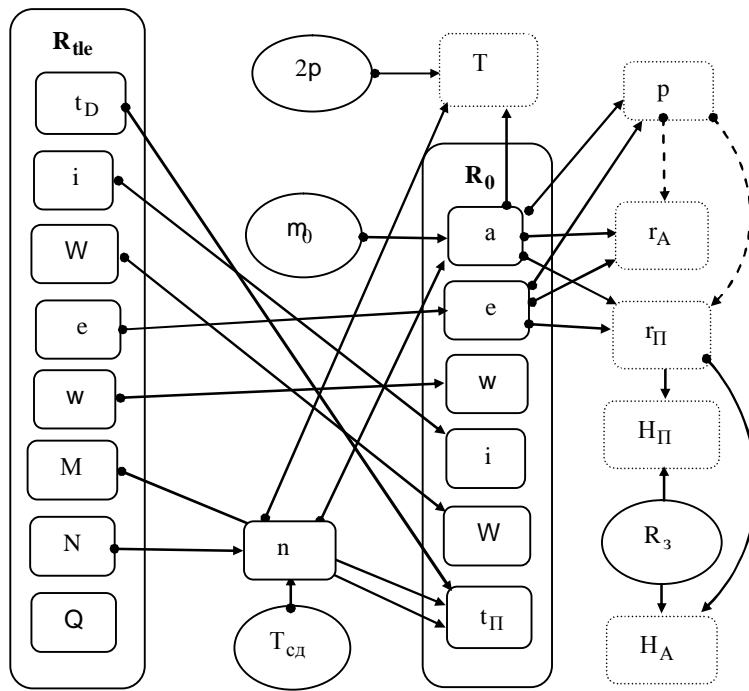


Рис. 3. Гіперграф переходів від вектора  $R_{tle}$  до вектора  $R_0$  та його модифікацій

По-н'яте, при моделюванні безперервних у часі процесів слід перейти від аналогових величин до дискретних за алгоритмом (рис. 4):

$$t_0 = t_{\Pi} \textcircled{R} t_1 = t_0 + dt \textcircled{R} t_2 = t_0 + 2dt \textcircled{R} t_j = t_0 + jdt \textcircled{R} t_J = t_0 + Jdt, \quad (32)$$

де  $j = \overline{0, J}$  – номери дискрет (натуральні числа від 0 до J);

$J^3 2$  – загальна кількість дискрет (натуральне число);

$dt = Dt/J$  – розмір однієї дискрети (дискретизація рівномірна);

$Dt = |t_k - t_{\Pi}|$  – заданий часовий інтервал моделювання;

$t_k, t_{\Pi}$  – кінцевий і початковий моменти часу.

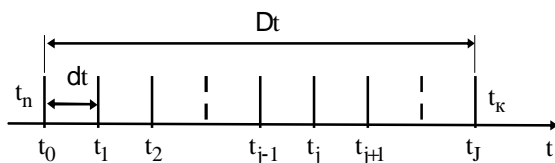


Рис. 4. До перетворення часових інтервалів у дискретну форму

При такому підході формула (27), наприклад, перетвориться до вигляду

$$M(t_j) = n(t_j - t_{\Pi}), \quad j = \overline{0, J}, \quad t_j = t_{j-1} + dt, \quad (33) \\ dt = Dt/J,$$

де  $Dt = T$  – сидеричний період обертання КА.

По-шосте, використовуючи формули (5), (7–10) та (12), можна перейти від вектора (1) до його модифікацій (4), (6), (11) або (13–15), елементи яких показано на рис. 3 пунктиром.

Методика переходу  $R_0 \textcircled{R} R_t$  у разі незбуреного руху КА полягає у такому (рис. 5):

По-перше, при незбуреному орбітальному русі КА елементи  $i, W$  векторів (1) та (16) збігаються і перерахунків не потребують.

По-друге, для зручності перерахунків доцільно від вектора (1) перейти до його розширеної модифікації (див. рис. 5):

$$R_0^* = \{T, p, a, e, w, i, W, t_{\Pi}\}, \quad (34)$$

де  $T$  і  $p$  – сидеричний період обертання та фокальний параметр, розраховані за формулами (9) та (5) відповідно.

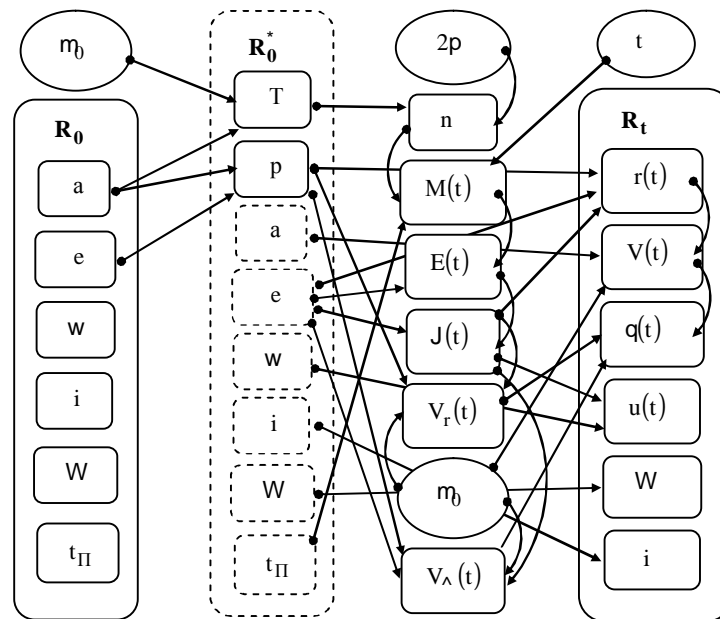
По-третьє, через відомий сидеричний період обертання  $T$  за формулою (10) отримати середній рух КА  $n$ .

По-четверте, оскільки відомий момент часу  $t_{\Pi}$ , коли КА перебуватиме в перигеї орбіти, то використовуючи знайдений середній рух  $n$ , за формулою (27) з урахуванням (33) знайти середню аномалію КА  $M(t_j)$  на будь-який фіксований момент польотного часу  $t = t_j$ .

По-п'яте, для цього ж моменту із трансцендентного рівняння (26) методом ітерацій обчислити ексцентричну аномалію як

$$E_{i+1}(t_j) = M(t_j) - e \sin E_i(t_j); \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad (35) \\ \text{поклавши } E_0(t_j) = M(t_j).$$

Для практичних цілей досить прийняти  $I = 6$  і, отже, остаточним значенням шуканої ексцентричної аномалії вважати  $E(t_j) = E_6$ .

Рис. 5. Гіперграф переходів від вектора  $R_0$  до вектора  $R_t$ 

По-шосте, за формулою (25) розрахувати істинну аномалію КА  $J(t_j)$ , а далі за виразом (24) знайти шуканий аргумент широти  $u(t_j)$ .

По-сьоме, у разі необхідності можна об'єднати гіперграфи, зображені на рис. 4 і 5, і на цій основі здійснити глобальний перехід  $R_{de} \otimes R_0 \otimes R_t$ .

**Висновки й перспективи подальших досліджень:**

1. У статті систематизовано ряд відомих із теорії орбітального руху КА залежностей та доповнено їх новими, що дало змогу отримати вдосконалений науково-методичний апарат, пристосований для моделювання незбуреного руху КА. Його основу становлять аналітичні залежності, оригінальні алгоритми та методичні рекомендації щодо їх застосування.

2. Цей апарат може стати базовим інструментом для опису і прогнозування збуреного руху КА, а також моделювання їх положення як у космічному просторі, так і відносно заданих наземних об'єктів спостереження і пунктів прийому цільової інформації.

### Література

1. **Артюшенко М. В.** Моделирование и синтез орбитальной группировки космических аппаратов зонального наблюдения территории Украины / М. В. Артюшенко, С. С. Дугин, А. Д. Федоровский // Космічна наука і технологія. – К. : Вид. дім "Akadempriodika", 2011. – Т. 17. – № 5. – С. 50–57. 2. **Куренков В. И.** Методы исследования эффективности ракетно-космической техники : электрон. учеб. пособ. / В. И. Куренков, М. Ю. Гоголев. – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2012. – 285 с. 3. **Лабуткина Т. В.** Математическая модель для анализа кинематики сопровождения орбитальных объектов наземными антеннами / Т. В. Лабуткина // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Ракетно-космічна техніка. – Т. 17. – 2011. – С. 40–50. 4. **Матюшин М. М.** Моделирование сценариев оперативного управления полетом космиче-

ского аппарата / М. М. Матюшин / Наука и образование. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана. Эл. №ФС 77-48211, 2011. – С. 1–17. 5. **Ручинская Е. В.** Математическое моделирование управляемого движения космических аппаратов : дис. кандидата техн. наук / Е. В. Ручинская. – М. : – 2010. – 175 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.dissertat.com. 6. **Сомова Т. Е.** Моделирование и анимация пространственного движения маневрирующего спутника землеобзора / Т. Е. Сомова // Известия Самарского науч. центра РАН. – Самара : Самарский НЦ РАН, 2012. – Т. 14. – № 6. – С. 125–128. 7. **Спиридонов А. А.** Моделирование движения сверхмалого космического аппарата / А. А. Спиридонов, В. А. Саечников, И. А. Шалатонин // Гелиофизические исследования. – М. : Институт прикладной геофизики им. акад. Е. К. Федорова. – 2015. – С. 1–4. 8. **Stoff S.** Orbitron – Satellite Tracking System // Stoff.pl: website. [Electronic resource]. – Mode of access: http://www.stoff.pl. 9. **STK overview** [Electronic resource]. URL: http://www.agi.com/products/by-producttype/ applications/stk/default.aspx. 10. **Фриз П. В.** Основы орбитального руху космічних апаратів : підручник / П. В. Фриз. – Житомир : ЖВІ НАУ, 2012. – 348 с. : іл. 11. **Фриз П. В.** Теоретико-множинний підхід до опису просторово-часового положення космічних апаратів в задачах спостереження Землі / П. В. Фриз // Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України : наук.-техн. журнал. – Х. : ХУПС, 2013. – Вип. 1(10). – С. 205–208. 12. **Практикум** з використання програмних комплексів Orbitron та WXtrack для моделювання процесів у космічних інформаційних системах / П. В. Фриз, С. П. Фриз. – Житомир : ЖВІ, 2017. – 52 с. 13. **NORAD Two-Line Element Set Format** // Celestrak.com: website [Electronic resource]. – Mode of access: http://celestrak.com/NORAD/documentation/tle-fmt.asp. 14. **Hoots F. R.** Models for Propagation of NORAD Element Sets. / F. R. Hoots, R. L. Roehrich // Space track Report no. 3. Colorado Springs: Peterson AFB, CO, 1980. – 91 p [Electronic resource]. – Mode of access : http://www.celestrak.com/NORAD/documentation/spacetrk.pdf.

## УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЙ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

*Петр Васильевич Фриз (канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры)*

*Житомирский военный институт им. С. П. Королева, Житомир, Украина*

*В статье систематизирован и усовершенствован известный научно-методический аппарат для моделирования невозмущенного движения космических аппаратов в прикладных задачах как на этапах создания космических систем, так и в процессе их целевого применения. Значительно расширен математический аппарат для моделирования пространственно-временного положения КА за счет модификаций базовых векторов. Аналитические выкладки дополнены переходами между векторами с помощью оригинальных гиперграфов, что существенно упрощает процесс моделирования. Приведены методики пересчета одних элементов орбит в другие, раскрыто подход к решению трансцендентного уравнения Кеплера методом итераций. Предложен алгоритм перехода от непрерывных функций полетного времени до их дискретной формы.*

**Ключевые слова:** невозмущенное движение; моделирование; параметры орбит; вектор пространственно-временного положения; космический аппарат; TLE-файлы.

## IMPROVED SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL APPARATUS FOR MODELING UNBELIEVED MOVEMENT OF SPACE APPLIANCES

*Petr V. Frees (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department)*

*Zhitomir Military Institute named after S. P. Korolev, Zhitomir, Ukraine*

*In the article, a well-known scientific and methodical apparatus for modeling the unperturbed motion of space vehicles in applied problems both at the creation stages of space systems and in the process of their targeted application is systematized and improved. The mathematical apparatus for modeling the space-time position of the spacecraft due to modifications of the base vectors has been significantly expanded. Analytic calculations are supplemented by transitions between vectors with the help of original hypergraphs, which greatly simplifies the modeling process. Methods are given for recalculating some elements of orbits into others, the approach to solving the Kepler transcendental equation is described by the iteration method. An algorithm for the transition from continuous flight time functions to their discrete form is proposed.*

**Keywords:** unperturbed motion; modeling; parameters of orbits; vector of space-time position; spacecraft; TLE files.

### References

1. **Artyushenko M.V.** Modeling and synthesis of the orbital constellation of space vehicles for the zonal observation of the territory of Ukraine / MV Artyushenko, SS Dugin, AD Fedorovskii // Cosmic Science and Technology-Giya. - K.: View. Dim "Akademperiodika", 2011. - T. 17. - № 5. - P. 50-57. 2. **Kurenkov V. I.** Methods of researching the effectiveness of rocket and space technology: electron. Training. Help. / VI Kurenkov, M. Yu. Gogolev. - Samara: Samara Publishing House. State. Aerospace. University, 2012. - 285 with. 3. **Labutkina T. V.** Mathematical model for the analysis of the kinematics of tracking of orbital objects by terrestrial antennas / TV Labutkina // Visnik Dnipropetr. Un-tu. Rocket and space technology. - T. 17. - 2011. - P. 40-50. 4. **Matyushin M. M.** Modeling scenarios for operational control of the space vehicle's flight / MM Matyushin / Science and education. - M.: MSTU them. NE Bauman. El. No. FS 77-48211, 2011. - P. 1-17. 5. **Ruchinskaya E. V.** Mathematical modeling of controlled motion of space vehicles: dis. Candidate tehn. Sciences / EV Ruchinskaya. - M.: - 2010. - 175 p. [Electronic resource]. - Access mode: www.dissertat.com. 6. **Somova T. E.** Simulation and animation of the spatial motion of the maneuvering earth survey satellite / T. Somova // Izvestiya Samar-skogo nauchn. Center of the Russian Academy of Sciences. - Samara: Samara Scientific Center of RAS, 2012. - T. 14. - № 6. - P. 125-128. 7. **Spiridonov A. A.** Modeling of the motion of an ultra-small

spacecraft / AA Spiridonov, VA Saechnikov, IA Shalatonin // Heliophysical Investigations. - M.: Institute of Applied Geophysics. Acad. E. K. Fedorova. - 2015. - pp. 1-4. 8. **Stoff S.** Orbitron - Satellite Tracking System // Stoff.pl: website. [Electronic resource]. - Mode of access: <http://www.stoff.pl>. 9. **STK** overview [Electronic resource]. URL: <http://www.agi.com/products/by-producttype/applications/stk/default.aspx>. 10. **P. V. Friz.** Fundamentals of the orbital motion of space vehicles: a textbook / PV Friz. - Zhitomir: ZhVI NAU, 2012. - 348 p. : Ill. 11. **P. V. Friz.** The set-theoretic approach to the description of the space-time position of space vehicles in the problems of Earth observation / PV Friz // Science and Technology of the Air Force of the Armed Forces of Ukraine: Sciences.-Tech. Journal. - H.: HUPS, 2013. - Vip. 1 (10). - P. 205-208. 12. **Workshop** on the use of Orbitron and WXtrack software complexes for modeling processes in space information systems / PV Friz, SP Friz. - Zhitomir: ZhVI, 2017. - 52 with. 13. **NORAD** Two-Line Element Set Format // Celestrak.com: website [Electronic resource]. - Mode of access: <http://celestrak.com/NORAD/documentation/tle-fmt.asp>. 14. **Hoots F. R.** Models for Propagation of NORAD Element Sets. / F. R. Hoots, R. L. Roehrich // Space track Report no. 3. Colorado Springs: Peterson AFB, CO, 1980. - 91 p [Electronic resource]. - Mode of access: <http://www.celestrak.com/NORAD/documentation/spacetrk.pdf>.