

Инструмент, порошки, пасты

УДК 621.922.34

М. Н. Шейко

Институт сверхтвердых материалов им. В. Н. Бакуля
НАН Украины, г. Киев, Украина
max-kiiev@i.ua

**К вопросу теоретического обоснования
выбора эффективной формы профиля
зерна при моделировании алмазного слоя
правящего инструмента.**

Сообщение 2. Гальванопластика

Теоретически раскрыт статистический механизм образования круглой формы усредненного поперечного сечения царапин, производимых плоскими гранями алмазных зерен в абразивном материале шлифовальных кругов при правке их алмазными роликами, изготовленными методом гальванопластики. Установлено распределение параметров ориентации режущих граней алмазных зерен и дан краткий сравнительный анализ характеристик правящих инструментов, изготовленных методами гальванопластики и гальваностегии. В модельное представление об алмазном режущем зерне введено понятие о приведенном эффективном диаметре, установлена его связь с зернистостью алмазного порошка в инструменте, необходимая для расчета единичных и суммарных сечений срезов, сил правки и шероховатости поверхности изделий, шлифованных предварительно заправленными абразивными кругами.

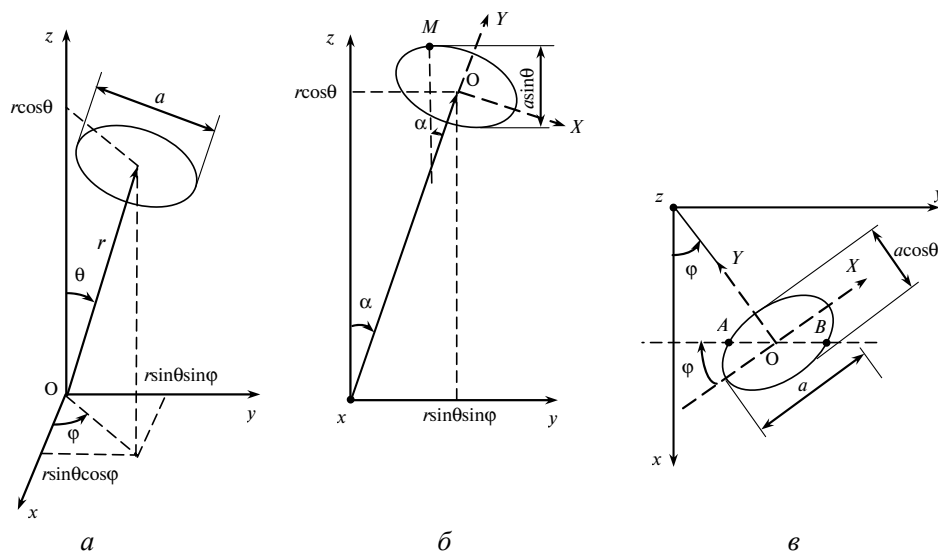
Ключевые слова: *правящий инструмент, технология гальваностегии, метод гальванопластики, алмазное зерно, поперечное сечения царапины, статистический механизм, распределение параметров ориентации режущих граней.*

В Сообщении 1 [1] было дано объяснение феномену образования “усредненного” сечения царапин с закругленным дном, производимых при правке острыми, не скругленными вершинами алмазных зерен, характерными для инструмента, изготовленного методом гальваностегии [2]. Для технологии гальванопластики [2] существенно то, что алмазные зерна базируются на рабочей поверхности своими гранями, а не вершинами, и производят срезы этими гранями. Следовательно, естественно было ожидать трапециевидную форму поперечного сечения царапин с плоским горизонтальным

© М. Н. ШЕЙКО, 2017

дном, что, однако, противоречило наблюдениям округлых сечений. Поэтому целью настоящей работы является теоретическое обоснование статистического механизма образования скругленной формы усредненного поперечного сечения царапин, производимых плоскими формообразующими элементами. При этом, как и в [1], форму профиля такого усредненного сечения называем эффективной формой профиля зерна, а отклонение фактической формы поперечного сечения царапины от соответствующей проекции режущей вершины зерна, обусловленное пластическим или хрупким характером деформации обрабатываемого материала в процессе резания-царапания, оставляем за рамками для будущих исследований.

Итак, полагаем, что формообразующими элементами в алмазном правящем инструменте, изготовленном методом гальванопластики, являются грани алмазных зерен. Грани представляют собой многоугольники, произвольный поворот которых вокруг своих нормалей позволяет (в соответствии с результатами [1]) усреднить их формой круга. Ориентация этих вырожденных в круги многоугольников – назовем их условно гранями-кругами – относительно рабочей поверхности инструмента может быть описана с использованием сферической системы координат (рисунк, *a*), где ось Oz сонаправлена с нормалью рабочей поверхности, а радиус-вектор \mathbf{r} – с нормалью исследуемой грани. Для определения ориентации плоскости исследуемой грани безразлично (в силу вышесказанного) собственное вращение грани вокруг \mathbf{r} , но необходимо задание угла нутации θ и угла прецессии φ . Кроме того, абсолютная величина радиус-вектора \mathbf{r} также безразлична, так как задача состоит в том, чтобы оценить кривизну эллипса как прямоугольной проекции исследуемой грани-круга на плоскость yOz , причем в наивысшей точке M (см. рисунок, *б*), т. е. с максимальной координатой z . Тем самым оцениваем кривизну усредненного поперечного сечения дна царапин, производимых гранями зерен с распределенными параметрами θ , φ и фиксированным размером грани-круга a , зависящим от зернистости алмазного порошка.



Ориентация обобщенной грани-круга зерна относительно плоскости рабочей поверхности инструмента (xOy) в сферической системе координат (*a*) и ортогональная проекция грани-круга на плоскость yOz (*б*) и xOy (*в*).

Как показано в [3], для инструмента, изготовленного методом гальвано-пластики, размер грани-круга $a = 0,617d$, где d – длина ячейки верхнего сита в миллиметрах. Остальные два параметра θ и φ определяются следующим образом. Угол нутации θ в идеале равен нулю (ведь зерна базируются на рабочей поверхности гранями), но на практике изменяется в узком диапазоне и распределен по вполне определенному закону с плотностью $P_\theta(\theta)$. Угол прецессии φ изменяется в пределах от 0 до 2π , но из соображения симметрии в рамках задачи достаточно рассмотреть интервал $[0, \pi/2]$, а распределение угла принять за равномерное на этом интервале.

Вычислим вначале кривизну проекции окружности диаметром a на плоскость YOz в вышеупомянутой точке M (см. рисунок, б), а затем рассмотрим распределение указанных параметров. Точка определяется на эллипсе углом α , т. е. $M = M(\alpha)$, который находится из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta} = \sin \varphi \operatorname{tg} \theta. \quad (1)$$

Большая и малая оси эллипса (см. рисунок, б), направленные соответственно по осям X и Y привязанной к нему системы координат, равны a и $a \sin \theta \cos \varphi$. Откуда уравнение эллипса, как проекции исследуемой грани-круга, в координатах XOY

$$\frac{X^2}{(a/2)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{a \sin \theta \cos \varphi}{2}\right)^2} = 1, \quad (2)$$

причем уравнение верхней ветви

$$Y(X) = \frac{\sin \theta \cos \varphi}{2} \sqrt{a^2 - 4X^2}, \quad (3)$$

ее первой производной

$$Y'(X) = -\frac{2 \sin \theta \cos \varphi \cdot X}{\sqrt{a^2 - 4X^2}} \quad (4)$$

и ее второй производной

$$Y''(X) = -\frac{2a^2 \sin \theta \cos \varphi}{(a^2 - 4X^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Координата искомой точки $M(\alpha)$ на ось OX определяется как корень X_M уравнения

$$Y'(X_M) = \operatorname{tg} \alpha \equiv \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta, \quad X_M \leq 0 \quad (6)$$

и равна

$$X_M = -\frac{a}{2\sqrt{1 + \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \varphi}}}. \quad (7)$$

В этой точке значение первой производной

$$Y'(X_M) = \sin \varphi \operatorname{tg} \theta$$

и второй производной

$$Y''(X_M) = -\frac{2 \sin \theta \cos \varphi}{a \cos^3 \theta} (\operatorname{tg}^2 \varphi + \cos^2 \theta)^{3/2} \quad (8)$$

подставляем в выражение для радиуса кривизны

$$R = \frac{(1 + Y'(X_M)^2)^{3/2}}{|Y''(X_M)|} \quad (9)$$

и получаем эту величину как функцию углов θ и φ

$$R(\theta, \varphi) = \frac{a}{2 \sin \theta \cos \varphi} \left(\frac{1 + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \theta} \right)^2} \right)^{3/2}. \quad (10)$$

При $\theta \ll 1$ выражение (10) упрощается:

$$R(\theta, \varphi) = \frac{a \cos^2 \varphi}{2 \theta}. \quad (11)$$

Выражение (11) по существу является функцией случайного вектора (θ, φ) и позволяет определить радиус кривизны, усредненный по множеству формообразующих алмазных зерен на рабочей поверхности инструмента. Более точно, усреднять следует не радиус, а некоторую степень радиуса. Так, в [4] показано, что, например, параметр Ra шероховатости шлифованной поверхности зависит от диаметра (а значит, и радиуса) шара, которым моделируется реальное алмазное зерно правящего инструмента, в степени $1/3$. Следовательно, усредняем не сам радиус (11), а его степень с показателем $1/3$:

$$R_{\text{cp}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\overline{R^{1/3}} \right)^3, \quad (12)$$

где

$$\overline{R^{1/3}} = \iint R(\theta, \varphi)^{1/3} P(\theta, \varphi) d\theta d\varphi. \quad (13)$$

Здесь $P(\theta, \varphi)$ – плотность совместного распределения θ и φ , а пределы интегрирования подразумеваются надлежащим образом расставленными. Упрощает задачу вышеупомянутая симметрия и, как следствие, во-первых, независимость θ и φ , т. е.

$$P(\theta, \varphi) = P_\theta(\theta) P_\varphi(\varphi), \quad (14)$$

где $P_\theta(\cdot)$ и $P_\varphi(\cdot)$ – плотности распределения θ и φ соответственно, и, во-вторых, равномерность распределения φ на $[0, \pi/2]$, т. е.

$$P_\varphi(\varphi) \equiv \frac{2}{\pi}, \quad \varphi \in [0, \pi/2]. \quad (15)$$

Тогда с учетом (11) и (14) перепишем формулу (13):

$$\overline{R^{1/3}} = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/3} \int d\varphi \cos^{2/3} \varphi P_{\varphi}(\varphi) \int d\theta \frac{1}{\theta^{1/3}} P_{\theta}(\theta) \equiv \left(\frac{a}{2}\right)^{1/3} \overline{\cos^{2/3} \varphi \cdot \theta^{-1/3}}. \quad (16)$$

Если среднее косинуса в степени 2/3 элементарно рассчитывается с учетом (15):

$$\overline{\cos^{2/3} \varphi} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2/3} \varphi d\varphi = 0,7132, \quad (17)$$

то для вычисления среднего угла нутации в степени $-1/3$ необходима информация о плотности $P_{\theta}(\cdot)$ его распределения.

Возникает задача (относительно самостоятельная) нахождения распределения угла нутации θ , о котором можно судить косвенно, по данным [5, 6], где экспериментально установлено распределение угла ψ' наклона линии пересечения плоскости исследуемой грани-круга и секущей плоскости, параллельной yOz . Как показали измеренные значения, угол ψ' распределен симметрично относительно нуля; поэтому достаточно рассматривать лишь модуль данного угла – назовем его углом следа сечения ψ . Для оценки распределения θ выдвигается гипотеза о виде плотности $P_{\theta}(\cdot)$ и по ней рассчитывается и сравнивается с экспериментальной [5, 6] плотность $P_{\psi}(\cdot)$ распределения угла ψ . Если расчетное распределение угла следа сечения ψ близко к экспериментальному, принимаем гипотезу о распределении угла нутации θ .

В общем виде искомая плотность дается выражением (см., например, [7])

$$\begin{aligned} P_{\psi}(\psi) &= \frac{\partial}{\partial \psi} \iint_{\psi(\theta, \varphi) < \psi} P(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \equiv \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \psi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{-\infty}^{\theta(\psi, \varphi)} d\theta P_{\theta}(\theta) \equiv \\ &\equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} P_{\theta}(\theta(\psi, \varphi)) \frac{\partial}{\partial \psi} \theta(\psi, \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\psi(\theta, \varphi)$ – выражение угла следа сечения ψ через независимые углы нутации θ и прецессии φ , а выражение $\theta(\psi, \varphi)$ – решение уравнения $\psi(\theta, \varphi) = \psi$ относительно θ .

Для вычисления (18) следует установить связь между ψ , θ и φ . В плоскости чертежа (см. рисунок, в) след секущей на исследуемой грани-круге виден как отрезок AB , а натуральная величина следа равна a . Следовательно,

$$\cos \psi = \frac{\text{длина } AB}{a}, \quad (19)$$

причем половину длины AB найдем в системе координат XOY , привязанной к полуосям эллипса как проекции грани-круга. Действительно, в этих координатах уравнение эллипса

$$\frac{X^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{a \cos \theta}{2}\right)^2} = 1, \quad (20)$$

его верхней ветви

$$Y(X) = \frac{\cos \theta}{2} \sqrt{a^2 - 4X^2} \quad (21)$$

и прямой, проходящей через точки A и B ,

$$Y(X) = -\operatorname{tg} \varphi \cdot X. \quad (22)$$

В точке A (с координатой X_A) значение функций (21) и (22) совпадают, поэтому приравняв (21) и (22), найдем X_A , подставим в (19) длину гипотенузы, выраженную через катеты $|X_A|$ и $|Y(X_A)|$, и получим

$$\cos \psi = \frac{2\sqrt{X_A^2 + Y(X_A)^2}}{a} \equiv \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi}}. \quad (23)$$

Из (23) однозначно определяется

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi}\right)^2}}. \quad (24)$$

С учетом $\theta, \psi \ll 1$ выражение (23) упрощается:

$$\psi(\theta, \varphi) \approx \theta \sin \varphi, \quad (25)$$

откуда функция $\theta(\psi, \varphi)$, входящая в (18), имеет вид

$$\theta(\psi, \varphi) = \frac{\psi}{\sin \varphi}, \quad (26)$$

а ее производная

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \theta(\psi, \varphi) = \frac{1}{\sin \varphi}. \quad (27)$$

Теперь окончательно искомая функция $P_\psi(\cdot)$ записывается в виде

$$P_\psi(\psi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin \varphi} P_\theta\left(\frac{\psi}{\sin \varphi}\right) d\varphi. \quad (28)$$

Далее, как отмечено выше, следует выдвинуть гипотезу о виде плотности $P_\theta(\cdot)$ и по ней рассчитать плотность $P_\psi(\cdot)$ и сравнить с ее экспериментальным значением. Естественно предположить нормальное распределение угла нутации θ , точнее не нормальное, а одностороннее нормальное:

$$P_\theta(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sigma_\theta} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}}, \quad (29)$$

что обусловлено рассмотрением только положительных значений угла в принятой системе координат. Здесь параметр распределения σ_θ представляет среднеквадратическое отклонение, но не от среднего, а от нуля. Подставляя (29) в (28), имеем

$$P_{\psi}(\psi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{\sigma_{\theta}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin \varphi} \exp\left(-\frac{\psi^2}{2\sigma_{\theta}^2 \sin^2 \varphi}\right) d\varphi, \quad \psi \geq 0. \quad (30)$$

Легко убедиться, что выражение (30), как и положено плотности, нормируется на единицу и является базой для сравнения с экспериментальными данными [5, 6] частоты угла ψ . Параметр σ_{θ} , входящий в выражение плотности, можно вычислить по экспериментальному массиву углов ψ . Для этого выразим σ_{θ} через среднеквадратическое отклонение σ_{ψ} измеренных в эксперименте углов ψ . Как и σ_{θ} , параметр σ_{ψ} представляет среднеквадратическое отклонение угла наклона секущей от нуля, следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_{\psi}^2 &\stackrel{def}{=} \overline{\psi^2} = \iint \psi^2(\theta, \varphi) P(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \equiv \\ &\equiv \left\{ \psi(\theta, \varphi) \approx \theta \sin \varphi; P(\theta, \varphi) = P_{\varphi}(\varphi) P_{\theta}(\theta) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_{\theta}} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_{\theta}^2}} \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin^2 \varphi \int_0^{\infty} d\theta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_{\theta}} \theta^2 e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_{\theta}^2}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{\sigma_{\theta}} J_1 J_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}; \\ J_2 &= \int_0^{\infty} \theta^2 e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_{\theta}^2}} d\theta = \left\{ x = \frac{\theta^2}{2} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{3}{2^{3/2}\sigma_{\theta}^3} x\right)^{2/3}} dx = \frac{2^{3/2}\sigma_{\theta}^3}{3} \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{\theta}^3. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\sigma_{\psi}^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{\sigma_{\theta}} \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{\theta}^3,$$

откуда

$$\sigma_{\theta} = \sqrt{2} \sigma_{\psi}. \quad (31)$$

Через среднеквадратическое отклонению σ_{ψ} , приведенное в [5, 6], по формуле (31) вычисляли значение параметра σ_{θ} , далее – по (30) – теоретическое распределение ψ . Сравнение теоретического и фактического распределений и процедура принятия гипотезы о распределении по критерию Пирсона производили для каждой зернистости алмазного порошка в диапазоне от 315/250 до 630/500 (табл. 1, 2).

В табл. 1 и 2 вероятность попадания в i -й интервал рассчитывается элементарно:

$$p_i = F(\psi_i) - F(\psi_{i-1}), \quad i = \overline{1, N}, \quad (32)$$

где N – число интервалов; ψ_i – верхняя граница i -того интервала, причем $\psi_0 = 0$; $F(\cdot)$ – функция распределения угла ψ , соответствующая плотности

(30). В силу того, что плотность $P_{\psi}(\cdot)$ имеет интегрируемую особенность в точке $\psi = 0$, функция $F(\cdot)$ вычисляется через несобственный интеграл по схеме

$$F(\psi_k) = \int_0^{\psi_k} P_{\psi}(\psi) d\psi = \int_0^{\epsilon} P_{\psi}^{(1)}(\psi) d\psi + \int_{\epsilon}^{\psi_k} P_{\psi}^{(2)}(\psi) d\psi, \quad (33)$$

где $\epsilon \ll 1$ – малый параметр; $P_{\psi}^{(1)}(\cdot)$ – аналитическое решение (30) при $\psi \ll 1$; $P_{\psi}^{(2)}(\cdot)$ – результат численного интегрирования (30). Если в качестве ϵ взять, например, $10^{-2}\sigma_{\theta}$, то первый интеграл правой части (33) не зависит ни от каких параметров и представляет собой константу, которую обозначим C . Опуская вывод аналитического выражения $P_{\psi}^{(1)}(\cdot)$ и соответствующего интеграла C , запишем их выражения:

$$P_{\psi}^{(1)}(\psi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{\sigma_{\theta}} \left[0,7483 - \left(1 - \frac{\psi^2}{4\sigma_{\theta}^2}\right) \ln \frac{\psi}{\sigma_{\theta}} \right], \quad (34)$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{10^{-2}\cdot\sigma_{\theta}} P_{\psi}^{(1)}(\psi) d\psi \approx 3,227 \cdot 10^{-2}. \quad (35)$$

Таблица 1. Экспериментальные и теоретические данные по распределению угла наклона секущей ψ для алмазного порошка 315/250

i	Интервал	Эксперимент	Теория ($\sigma_{\theta} = 0,271$)	
		($n = 46, \sigma_{\psi} = 0,191$)	p_i	np_i
1	0–0,195	35	0,747	34,36
2	0,195–0,39	9	0,202	9,27
3	0,39–0,78	2	0,058	2,67
		$\Sigma 46$	$\Sigma 1,007$	$\Sigma 46,32$
				$\chi^2 = 0,189$
				$\alpha = 0,05, \nu = 3-1-1=1$
				$\chi_{кр}^2 = 3,84$
				(гипотеза принимается)

Окончательно расчет функции распределения в произвольной точке $\psi_k \geq 10^{-2}\sigma_{\theta}$ производится по формуле

$$F(\psi_k) = C + \int_{10^{-2}\sigma_{\theta}}^{\psi_k} P_{\psi}^{(2)}(\psi) d\psi, \quad (36)$$

где интегрирование от $10^{-2}\sigma_{\theta}$ до ψ_k производится численно, а подынтегральную функцию удобно для практических целей представить в виде сплайна, аппроксимирующего таблицу табулированных значений (30). Инте-

гральная погрешность вычислений (см. табл. 1, 2) не превысила $-0,4...+0,7\%$, а процедура принятия гипотезы решена положительно.

Таблица 2. Экспериментальные и теоретические данные по распределению угла наклона секущей ψ для алмазного порошка 630/500

i	Интервал	Эксперимент ($n = 47, \sigma_\psi = 0,0778$)	Теория ($\sigma_\theta = 0,110$)	
		m_i	p_i	np_i
1	0–0,142	41	0,916	43,06
2	0,142–0,212	4	0,066	3,10
3	0,212–0,283	2	0,014	0,66
		$\Sigma 47$	$\Sigma 0,996$	$\Sigma 46,82$
				$\chi^2 = 3,08$
				$\alpha = 0,05, \nu = 3-1-1 = 1$
				$\chi_{кр}^2 = 3,84$
				(гипотеза принимается)

Как альтернативу гипотезе о нормальном распределении θ выдвигали другие правдоподобные гипотезы. Например, о равномерном распределении, что встречается для малых отклонений линейных и угловых величин [8]. Расчеты (детали опускаем) показывают, что если угол θ распределен равномерно на $[0, b]$, то

$$P_\psi(\psi) = -\frac{2}{\pi b} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\arcsin \psi/b}{2} \right|, \quad \psi \in [0, b]. \quad (37)$$

Из (37) следует, что угол ψ должен быть распределен на $[0, b]$, где верхний предел вычисляется как $b = \sqrt{6} \sigma_\psi$ и для зернистости 315/250 равен 0,468, а для 630/500 – 0,191. Фактически же угол распределен шире – до 0,780 и 0,283 соответственно. Следовательно, гипотеза о равномерном распределении θ отклоняется. Аналогично отклоняется гипотеза о распределении θ с плотностью, выражаемой дельта-функцией

$$P_\theta(\theta) = \delta(\theta - \bar{\theta}). \quad (38)$$

Последнее означает – нормаль к исследуемой грани зерен отклоняется от вертикали к рабочей поверхности на угол $\bar{\theta}$, а прецессия ϕ равновероятна по всему диапазону. Случай также правдоподобный, однако расчеты показывают, что угол ψ должен быть распределен с плотностью

$$P_\psi(\psi) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\bar{\theta}^2 - \psi^2}}, \quad \psi \leq \bar{\theta}, \quad (39)$$

график которой резко контрастирует с видом экспериментальной частоты углов ψ .

В итоге была подтверждена гипотеза о распределении угла наклона секущей ψ с плотностью (30), а следовательно, и гипотеза об одностороннем нормальном распределении угла нутации θ с параметром $\sigma_\theta = \sqrt{2} \sigma_\psi$.

Теперь все готово для вычисления искомого радиуса кривизны (16) дна царапины в поперечном сечении и усредненного по всем формообразующим зернам рабочей поверхности правящего инструмента (гальванопластика):

$$\begin{aligned} \overline{\theta^{-1/3}} &\stackrel{def}{=} \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta^{1/3}} P_{\theta}(\theta) d\theta \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_{\theta}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta^{1/3}} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_{\theta}^2}} d\theta = \left\{ x = \frac{3}{2} \theta^{\frac{2}{3}} \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_{\theta}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{2^{2/3}}{3\sigma_{\theta}^{2/3}} x\right)^3} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3}{2^{2/3}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{\sigma_{\theta}^{1/3}} = \frac{1,3466}{\sigma_{\theta}^{1/3}}. \end{aligned} \quad (40)$$

По формуле (12)

$$R_{cp} = \frac{a}{2} 0,7132^3 \frac{1,3466^3}{\sigma_{\theta}} = \frac{a}{2} \frac{0,8858}{\sigma_{\theta}}. \quad (41)$$

$$D_{np} \stackrel{def}{=} \frac{2R_{cp}}{d} = \frac{2R_{cp}}{a} \frac{a}{d} = \frac{0,8858}{\sigma_{\theta}} 0,617 = \frac{0,547}{\sigma_{\theta}}. \quad (42)$$

Формулой (42) достигается поставленная в данной работе цель – доказать появление в процессе усреднения некруглых профилей царапин профиля с вполне определенным скруглением, характеризуемым соответствующим диаметром. Кроме того, зависимость D_{np} от σ_{θ} имеет интересное практическое следствие. Как отмечалось выше, в [4] показано, что параметр Ra шероховатости шлифованной заправленным кругом поверхности обратно пропорционален степени $1/3$ диаметра формообразующего зерна D_{np} . Кроме того, Ra обратно пропорционален степени $2/3$ удельного числа зерен на рабочей поверхности правящего инструмента:

$$Ra \sim \frac{1}{D_{np}^{1/3} n_c^{2/3}}.$$

Как известно [9], удельное число n_c обратно пропорционально квадрату зернистости d , следовательно,

$$Ra \sim \frac{d^{4/3}}{D_{np}^{1/3}}. \quad (43)$$

Экспериментальные данные [5, 6] указывают, что в диапазоне зернистостей от 315/250 до 500/400 среднее квадратическое отклонение угла нутации σ_{θ} и, в соответствии с (42), D_{np} быстро изменяются с ростом d . Если эту зависимость описывать степенной функцией, то, поскольку при увеличении d от 0,315 до 0,5 мм σ_{θ} уменьшается с 0,271 до 0,068, показатель степени α составляет

$$\alpha = \frac{\ln 0,068/0,271}{\ln 0,500/0,315} = -3,0,$$

т. е. $D_{np} \sim 1/\sigma_{\theta} \sim 1/d^{-3,0} \sim d^{3,0}$. Тогда в соответствии с (43)

$$Ra \sim \frac{d^{4/3}}{(d^3)^{1/3}} \sim d^{1/3}. \quad (44)$$

Такая слабая степень влияния зернистости на шероховатость означает, что с ростом зернистости от 315/250 до 500/400, а соответственно d от 0,315 до

0,5 мм, т. е. в 1,59 раза, шероховатость Ra должна возрасти в $1,59^{1/3}$, т. е. всего в 1,17 раза. А такое соотношение подтверждают экспериментальные данные [5]: при переходе в правящем инструменте с зернистости 315/250 на 500/400 шероховатость не изменилась, что при погрешности измерений до 20 % укладывается в вышеизложенные представления. Практическая производственная деятельность также подтверждает этот феномен; необходимая шероховатость шлифованной поверхности может быть обеспечена доводкой правящего инструмента в большей степени, чем подбором его зернистости.

Если сравнивать две технологии алмазного правящего инструмента – гальваностегию [1, 10] и гальванопластику, то первая, для которой характерно $D_{пр} \approx d$, в соответствии с (43) дает пропорциональную связь шероховатости с зернистостью:

$$Ra \sim \frac{d^{4/3}}{(d)^{1/3}} \sim d, \quad (45)$$

и не обеспечивает – внутри одной зернистости – такие возможности управления рабочими характеристиками, как вторая. Вторая – гальванопластика – изначально обеспечивает меньшую шероховатость. Например, для зернистости 315/250 приведенный эффективный диаметр зерна, в соответствии с (42), составляет $D_{пр} = 2,01$, т. е. радиус скругления формообразующего элемента в 2,01 раза больше соответствующей величины в гальваностегии. С ростом зернистости этот разрыв – см. формулы (44) и (45) – только увеличивается. Кроме того, гальванопластика обеспечивает большую точность, но меньшую режущую способность (анализ этого уже выходит за рамки настоящей работы).

Таким образом, в настоящей работе дается теоретико-вероятностное обоснование феномена круглой формы царапины, усредненной по множеству царапин, производимых плоскими гранями зерен правящего инструмента, изготовленного методом гальванопластики и работающего по абразивному материалу шлифовальных кругов. Решена задача, имеющая также и самостоятельное значение, по установлению законов распределения углов ориентации режущих граней алмазных зерен на рабочей поверхности инструмента. Посредством введения в модель алмазного зерна нового параметра – так называемого приведенного эффективного диаметра, в котором аккумулируется информация о формообразовании – удалось с единых теоретических позиций дать сравнительный анализ характеристик правящего инструмента, изготовленного методом гальванопластики и инструмента, изготовленного методом гальваностегии. Посредством анализа полученных зависимостей показаны преимущества технологии гальванопластики в аспекте возможностей обеспечения низкой шероховатости поверхности изделий, шлифованных абразивными кругами с применением правки алмазным инструментом. Кроме того, установлена связь приведенного эффективного диаметра с зернистостью алмазного порошка в инструменте, необходимая для расчета единичных и суммарных сечений срезов, сил правки. Как подчеркивалось выше, в данной работе не рассматривали вопрос пластической или хрупкой деформации обрабатываемого материала в процессе резания-царапания, а как следствие – отклонения фактической формы поперечного сечения царапины от соответствующей проекции режущей вершины зерна. Поэтому экспериментальные данные о форме царапин, их связи с характеристиками инструмента и режимами резания остаются актуальными. Но приведенные теоретические выкладки задают нужную направленность дальнейшим исследованиям.

Теоретично розкрито статистичний механізм утворення округлої форми усередненого поперечного перерізу подряпин, зроблених плоскими гранями алмазних зерен в абразивному матеріалі шліфувальних кругів при правці їх алмазними роликками, виготовленими методом гальванопластики. Встановлено розподіл параметрів орієнтації ріжучих граней алмазних зерен і дано короткий порівняльний аналіз характеристик правлячих інструментів, що виготовлено методами гальванопластики і гальваностегії. У модельне уявлення про алмазне ріжуче зерно введено поняття про наведений ефективний діаметр, встановлено його зв'язок з зернистістю алмазного порошку в інструменті, необхідний для розрахунку одиничних і сумарних перетинів зрізів, сил правки і шорсткості поверхні виробів, шліфованих попередньо заправленими абразивними кругами.

Ключові слова: *правлячий інструмент, технологія гальваностегії, метод гальванопластики, алмазне зерно, поперечний переріз подряпини, статистичний механізм, розподіл параметрів орієнтації ріжучих граней.*

The report reveals the statistical theory, the mechanism of the spherical form of the averaged cross section of scratches produced by flat faces of diamond grains in the abrasive material of the grinding wheel when dressing their diamond rollers, manufactured by electroforming. Established distribution parameters of the orientation of the cutting edges of diamond grains and a brief comparative analysis of the characteristics of such a dress tool and a tool made by electroplating. The model representation of the diamond cutting grain introduced the concept of a reduced effective diameter, set its connection with the grain of the diamond powder in the tool needed to calculate individual and summary sections cut, dress force and surface roughness products, grinded through pre-dressed abrasive wheels.

Keywords: *dress tool, electroplating technology, electroforming, diamond grains, cross-sectional scratches, statistical mechanism, distribution of parameters of the orientation of the cutting edges.*

1. Шейко М. Н. К вопросу теоретического обоснования выбора эффективной формы профиля зерна при моделировании алмазного слоя правящего инструмента. Сообщение 1. Гальваностегия // Сверхтв. материалы. – 2016. – № 5. – С. 102–108.
2. Коломиец В. В., Полупан Б. И. Алмазные правящие ролики при врезном шлифовании деталей машин. – К.: Наук. думка, 1983. – 144 с.
3. Шейко М. Н., Скок В. Н., Пасичный О. О. Форма зерен как фактор, определяющий параметры алмазно-гальванического покрытия правящего инструмента. Сообщение 2. Фактическая площадь контакта зерен с графитовой формой и смежные характеристики как исходные для расчета режимов нанесения алмазно-гальванического покрытия методом гальванопластики // Сверхтв. материалы. – 2016. – № 1. – С. 62–67.
4. Шейко М. Н., Химач О. В. Врезная правка алмазными брусками в свете механико-статистических представлений об абразивно-алмазной обработке. Сообщение 1. Редукция к схеме обработки с непрерывной подачей на глубину // Там же. – 2004. – № 1. – С. 36–45.
5. Шейко М. Н. Кинематическая модель переноса микропрофиля в системе алмазный правящий ролик–абразивный круг–деталь: Дис. ... канд. техн. наук. – К., 1991. – 233 с.
6. Шейко М. Н. Микроскопические характеристики поверхностного слоя правящего ролика и способы их измерений // Редкол. журн. “Сверхтвердые материалы”. – Киев, 1991. – 12 с. – Деп. в ВИНТИ 18.07.91, № 3074-В91.
7. Боровков А. А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 432 с.
8. Маталин А. А. Технология машиностроения. – Л.: Машиностроение, 1985. – 496 с.
9. Шейко М. Н., Скок В. Н., Лубнин А. Г. Основные характеристики абразивно-алмазного слоя правящих инструментов // Сверхтв. материалы. – 2007. – № 4. – С. 75–78.
10. Шейко М. Н., Скок В. Н. Форма зерен как фактор, определяющий параметры алмазно-гальванического покрытия правящего инструмента. Сообщение 1. Величина занижения корпуса инструмента под нанесение алмазно-гальванического покрытия методом гальваностегии // Сверхтв. материалы. – 2015. – № 6. – С. 86–88.

Поступила 25.11.15