

## МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛЯ НАПРУЖЕННЯ ТА ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ.

*д-р фіз.-мат.наук, проф. Стебляно П.О.\* , аспірант Дьомічев К.Е.\*\**

*\*Дніпродзержинський державний технічний університет,*

*\*\*Черкаський національний університет ім. Б. хмельницького*

**Вступ.** Конструкції циліндричної форми широко застосовується в авіаційній, гірничодобувної, нафтової, газової промисловості, теплоенергетиці, будівництві та в інших галузях техніки. В процесі виробництва та експлуатації конструкції можуть знаходитися під впливом складного нестационарного силового і температурного навантаження, тому знаходження полів напруження і деформації при різних навантаженнях є однією із важливих задач для моделювання поведінки пружно –циліндричних тіл.

Нерівномірний нагрів тіл в поєднанні з силовими навантаженнями приводить до складних процесів деформації. Для моделювання поведінки таких елементів конструкцій потрібно визначати нестационарний термомеханічний стан не тільки на пружній стадії деформації, але і за межею пружності. Існуючі чисельні методи розв'язання таких нестационарних задач приводять, як правило, до великих обчислювальних труднощів, пов'язаних з розв'язком алгебраїчних систем рівнянь, і не завжди ефективні. На даний момент такі задачі розв'язуються чисельними методами : метод кінцевих елементів, метод скінченних різниць та інші. Актуальним є застосування методів, які спрощують розрахунок і мають вищу точність результатів. Метою роботи є застосування методу дробових кроків для знаходження полів напруження та деформації циліндричних тіл при температурному навантаженні циліндричного тіла розташованого під кутом та при процесі охолодження.

**Постановка задачі.** Температурне поле для ізотропного тіла у випадку врахування тепла, що виділяється в процесі його циклічного деформування, визначається шляхом розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності при певних початкових і граничних умовах

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha^1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha^1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \left( \frac{H_1 H_3}{H_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha^3} \left( \frac{H_2 H_1}{H_3} \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha^3} \right) + \frac{W_{\bullet}}{\lambda} \right\}, \quad (1)$$

де  $W_{\bullet}$  - функція розсіювання,  $H_i$  - параметри Ляме ( $i= 1, 2, 3$ ), точкою позначені похідні за часом

$$\begin{aligned} W_{\bullet} &= S_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2G} S_{ij} \dot{S}_{ij} + \frac{\sigma_{ii}}{3} \left( \dot{\epsilon}_{jj} - 3\alpha_T \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \frac{\sigma_{ii}}{3K} \dot{\sigma}_{jj}, \\ S_{ij} &= \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon, \\ \sigma &= \frac{\sigma_{ii}}{3}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_{ii}}{3}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{3E}{1-2\nu}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $s_{ij}, \varepsilon_{ij}$  - відповідно девіатори тензорів напруг і деформацій,  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  - тензори напруг і деформацій.

Початковий розподіл температури в тілі, що відповідає природному ненапруженому стану тіла, задається так

$$T = T_0(\alpha^i) \quad \text{при} \quad t=0. \quad (3)$$

Граничні умови, які відображають вплив навколишнього середовища на температуру тіла, задаються в такий спосіб

$$\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha(T - \Theta) - q, \quad (4)$$

де  $n$  - зовнішня нормаль до поверхні тіла,  $\alpha_T$  - коефіцієнт лінійного теплового розширення,  $\alpha$  - коефіцієнт теплообміну,  $\Theta$  - температура навколишнього середовища,  $q$  - тепловий потік.

У загальному випадку величини  $\alpha, \Theta, q$  можуть залежати від часу й положення точки  $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$  на поверхні тривимірного тіла  $V$ . Умова (4) при різних значеннях коефіцієнта  $\alpha$  містить три види граничних умов. Граничні умови першого роду полягають у тому, що на поверхні тіла в кожний момент часу заданий розподіл температури ( $\alpha \rightarrow \infty, q = 0$ ). Граничні умови другого роду задають тепловий потік  $q$  через поверхню тіла ( $\alpha = 0, q \neq 0$ ). Граничні умови третього роду формулюють закон теплообміну між поверхнею тіла й навколишнім середовищем при заданій величині  $\Theta (q = 0, \alpha \neq 0)$ .

Розглянемо випадок, коли при розв'язанні задачі використовується циліндрична система координат  $(\alpha^1 = r; \alpha^2 = \varphi, \alpha^3 = x)$ . У цьому випадку параметри Ляме визначаються так  $H_1 = H_3 = 1, H_2 = r$ . У результаті рівнянню (1) матиме вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] + \frac{aW_*}{\lambda r}. \quad (5)$$

Таким чином, рівняння теплопровідності (5) разом з початковими умовами (3) і граничними умовами (4) дозволяють визначити осесиметричне температурне поле в циліндричному тілі, якщо в кожний момент часу відома величина  $W_*$ . Для її визначення, у випадку циклічного навантаження, потрібно в кожний момент часу знати розв'язок відповідної нестационарної задачі термомеханіки.

Основною задачею нестационарної теорії термо-пружно-пластичності є визначення температурного поля, переміщень (швидкостей переміщень) і компонент тензорів напруг і деформацій, що виникають у просторовому тілі в процесі його навантаження й нагрівання, коли деякі елементи тіла працюють за межею пружності матеріалу. Процес навантаження будемо розглядати таким, що розвивається в часі, що може викликати рух окремих частин тіла.

Нехай спочатку ізотропне й однорідне тривимірне тіло  $V$ , обмежене поверхнею  $S$ , у початковий момент часу  $t=0$  перебуває в природному ненапруже-

ному стані при температурі  $T_0(\alpha^i)$ , де  $\alpha^i$  - осі довільної ортогональної системи координат,  $i = 1, 2, 3$ . Потім тіло піддається нагріванню й навантаженню зовнішніми силами. Це можуть бути об'ємні сили  $\vec{K}(\alpha^i, t)$ , що впливають на кожний елемент тіла, і поверхневі сили  $\vec{\Sigma}_n(\alpha^i, t)$ , що діють на частині поверхні тіла  $S_\Sigma$ . На іншій частині поверхні тіла  $S_v$ , що може бути певним чином закріплена, задаються швидкості переміщень  $\vec{V}(\alpha^i, t)$ . Припустимо, що нагрівання й навантаження тіла протікають так, що виникаючі деформації можуть істотно впливати на зміну температури цього елемента. Будемо розглядати такі процеси навантаження й рівні температур, при яких реологічні властивості матеріалу не проявляються. Конфігурація тіла задається рівнянням поверхні  $\Phi(\alpha^i) = 0$ , що обмежує його. Крім цього, потрібно задати теплофізичні й механічні характеристики матеріалу тіла й умови його теплообміну з навколишнім середовищем. Теплофізичні властивості матеріалу характеризуються коефіцієнтами теплопровідності  $\lambda$  і температуропровідності  $\alpha$ , що не залежать від температури. Умови теплообміну задаються у вигляді відповідних граничних умов, а механічні характеристики матеріалу при дослідженні процесів деформування по прямолінійних траєкторіях і траєкторіям малої кривизни задаються у вигляді миттєвих діаграм розтягання зразків, отриманих при різних фіксованих температурах. Крім цього, задаються значення коефіцієнтів Пуассона  $\nu$  і лінійного теплового розширення  $\alpha_T$ .

Виходячи з перерахованих даних, необхідно визначити температуру  $T(\alpha_i, t)$ , три складові вектора швидкості переміщень  $v_k(\alpha^i, t)$ , шість компонентів тензора напруг  $\sigma_{ij}(\alpha^k, t)$  і шість компонентів тензора деформацій  $\varepsilon_{ij}(\alpha^k, t)$ . Тут  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Отже, підлягають визначенню 16 невідомих функцій часу й координат. Для цього необхідно скористатися рівняннями руху, геометричними й фізичними рівняннями, а також рівнянням теплопровідності (2.1).

Після визначення поля температур для різних моментів часу розшуковуються складові вектора швидкості переміщень і компоненти тензорів напруг і деформацій, що задовольняють трьом диференціальним рівнянням руху, шести геометричним рівнянням і шести фізичним рівнянням. Зазначені 15 рівнянь розв'язуються при певних початкових і граничних умовах. Початкові умови задаються для всіх 15 невідомих

$$v_i(\alpha^k) = V^o(\alpha^k), \quad \sigma_{ij}(\alpha^k) = \Sigma_{ij}^o(\alpha^k), \quad \varepsilon_{ij}(\alpha^k) = E_{ij}^o(\alpha^k), \quad (6)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3 \quad \text{при } t = 0.$$

На частині поверхні тіла  $S_\Sigma$ , де задані поверхневі сили

$\Sigma_{in}(\alpha^k, t)$ , компоненти тензора напруг повинні задовольняти трьом граничним умовам

$$\Sigma_{in}(\alpha^k, t) = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad (7)$$

де  $n_j$  - напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні тіла у відповідній точці. На іншій частині поверхні  $S_V$ , де задані складові вектора швидкості переміщень  $V_i(\alpha^i, t)$ , швидкості переміщень  $U_i$  повинні приймати значення

$$U_i = V_i(\alpha^k, t). \quad (8)$$

Можлива й інше формулювання граничних умов, коли на поверхні тіла задаються три умови, узяті певним чином з умов (7) і (8).

Визначення 15 невідомих можна вести по-різному залежно від вибору основних невідомих. Skorистаємося варіантом змішаного методу розв'язання, коли в якості основних невідомих приймаються три складові вектора швидкості переміщень і шість компонентів тензора напруг, для яких безпосередньо формулюються граничні умови. При цьому із шести фізичних рівнянь за допомогою геометричних співвідношень Коші виключаються всі компоненти тензора деформацій, які потім визначаються на підставі вже відомих складових вектора швидкості переміщень.

Рівняння руху нескінченно малого об'ємного елемента суцільного середовища, яке підлягає деформації, в ортогональній системі координат  $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$  у геометрично лінійному випадку представимо у вигляді

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho H_j} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \alpha^j} + B_i(\sigma_{mn}) \quad (9)$$

де  $i, j, n, m = 1, 2, 3$ , а  $\rho$  - густина.

В геометрично лінійному випадку для швидкостей деформацій можна записати

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \alpha^j} + \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial \alpha^i} \right) + C_{ij}. \quad (10)$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial \alpha^2} \cdot v_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial \alpha^3} \cdot v_3, & C_{22} &= \frac{1}{H_2 H_3} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial \alpha^3} \cdot v_3 + \frac{1}{H_2 H_1} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial \alpha^1} \cdot v_1, \\ C_{33} &= \frac{1}{H_1 H_3} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial \alpha^1} \cdot v_1 + \frac{1}{H_2 H_3} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial \alpha^2} \cdot v_2, & C_{12} &= -\frac{1}{2 H_2 H_1} \cdot \left( \frac{\partial H_2}{\partial \alpha^1} \cdot v_2 + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha^2} \cdot v_1 \right), \\ C_{13} &= -\frac{1}{2 H_1 H_3} \cdot \left( \frac{\partial H_3}{\partial \alpha^1} \cdot v_3 + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha^3} \cdot v_1 \right), & C_{23} &= -\frac{1}{2 H_2 H_3} \cdot \left( \frac{\partial H_2}{\partial \alpha^3} \cdot v_2 + \frac{\partial H_3}{\partial \alpha^2} \cdot v_3 \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Система рівнянь (9), (10) замикається фізичними співвідношеннями, що зв'язують напруги й деформації. При розв'язанні нестационарної задачі термопластичності будемо використовувати визначальні рівняння, що описують неізотермічні процеси навантаження, як по прямолінійним траєкторіям, так і по траєкторіям деформування малої кривизни. Після розв'язання задачі по геометрії траєкторії деформування можна судити про вірогідність визначальних співвідношень, що використовуються.

Одним з аспектів загальної проблеми розв'язання нестационарних задач для непружних тіл є вибір визначальних співвідношень зв'язку між напруженнями й деформаціями. Цей вибір обґрунтовується узгодженістю з експериментом і тісно пов'язаний з досліджуваними процесами деформування. У загальному випадку значення деформацій являють собою функції процесу зміни напруг і температури, які визначаються характеристиками всього поперечного процесу зміни фізичних факторів, а не тільки поточними значеннями.

Запишемо фізичні співвідношення, що застосовуються для дослідження обох процесів. Для цього розіб'ємо процес навантаження тіла за часом на окремі, досить малі, етапи; на кожному з них за допомогою постулату ізоτροпії А.А.Іллюшина й закону пружної зміни об'єму записується зв'язок між напруженнями й деформаціями вигляду [4]

$$\sigma_{ij} = 2G^* (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^{(n)}) + (3\lambda^* \varepsilon - K\varepsilon_T) \delta_{ij}, \quad (12)$$

де  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера, а також

$$\lambda^* = \frac{2G(1+\nu) - 2G^*(1-2\nu)}{3(1-2\nu)}, \quad K = \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu}, \quad \varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0)$$

Тут  $G$  - модуль зсуву,  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона,  $\alpha_T$  - коефіцієнт лінійного теплового розширення. Величини  $G$ ,  $\nu$ ,  $\alpha_T$  у загальному випадку передбачаються залежними від температури. Вирази для  $G^*$  і  $\varepsilon_{ij}^{(n)}$  мають різний вигляд залежно від співвідношень пластичності, що використовуються: співвідношення теорії простих процесів навантаження або співвідношення процесів малої кривизни. Конкретизація визначальних рівнянь зводиться до задання миттєвої термомеханічної поверхні. Для проведення розрахунків необхідно апроксимувати яким-небудь чином цю функцію. Припустимо, що рівняння миттєвої термомеханічної поверхні задається у вигляді таблиці експериментальних даних  $(\sigma)_i$ ,  $(\varepsilon)_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  при фіксованих  $T$ . Зробимо апроксимацію цих даних за допомогою сплайн-функцій.

**Розрахункова система рівнянь.** Вище записана повна система з 16 рівнянь (1), (9) (10), (12), за допомогою якої можна будувати розв'язок нестационарної зв'язаної термо-пружно-пластичної задачі для тривимірних тіл. Приведемо систему до вигляду

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_i} + \vec{B}, \quad (13)$$

де  $\vec{W}$  - вектор, компонентами якого будуть шукані величини

$$\begin{array}{lllll} w_1 = \nu_1; & w_4 = \sigma_{11}; & w_7 = \sigma_{12}; & w_{10} = \varepsilon_{11}; & w_{13} = \varepsilon_{12}; \\ w_2 = \nu_2; & w_5 = \sigma_{22}; & w_8 = \sigma_{13}; & w_{11} = \varepsilon_{22}; & w_{14} = \varepsilon_{13}; \\ w_3 = \nu_3; & w_6 = \sigma_{33}; & w_9 = \sigma_{23}; & w_{12} = \varepsilon_{33}; & w_{15} = \varepsilon_{23}. \end{array}$$

Для визначення вектора  $\vec{B}$  й матриць  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  диференціюємо визначальні співвідношення (12) за часом. При цьому припускаємо, що  $G^*$ ,  $\lambda^*$ ,  $K$  і  $\alpha_T$  можуть бути змінними величинами. У результаті можна записати

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = 2G^* \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(n)}}{\partial t} \right) + 3\lambda^* \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \frac{\partial G^*}{\partial t} \cdot \dot{\gamma}_{ij} + b_{ij}, \quad (14)$$

де

$$b_{ij} = - \left[ K \cdot \alpha_t + (T - T_0) \frac{\partial}{\partial t} (K \cdot \alpha_t) \right] \delta_{ij} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (15)$$

В результаті визначальні співвідношення приводяться до виду

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = a_{ijkl} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} + b_{ij}, \quad (16)$$

де 
$$a_{ijkl} = 2G^* \delta_{kl} \cdot \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{kl} - \left(1 - \frac{\delta_{kl}}{3}\right) (G^* - G_t) \frac{\partial_{ij} \cdot \partial_{kl}}{\Gamma^2}$$

При чисельному розв'язанні зазначену систему зручно привести до дещо іншого вигляду. Для цього потрібно виключити швидкості деформацій у визначальних співвідношеннях за допомогою геометричних співвідношень (10). У результаті можна записати

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} a_{ijkl} \left( \frac{1}{H_l} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial \alpha^l} + \frac{1}{H_k} \cdot \frac{\partial v_l}{\partial \alpha^k} \right) + d_{ij}, \quad (17)$$

де 
$$d_{ij} = \frac{1}{2} a_{ijkl} \cdot c_{kl} + b_i, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Тепер, співставляючи систему (17) з векторним рівнянням (13), визначимо вектор  $\vec{B}$  і матриці  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . У результаті можна записати

$$\vec{B} = \{B_1, B_2, B_3, d_{11}, d_{22}, d_{33}, d_{12}, d_{13}, d_{23}, c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}\}, \quad (18)$$

а ненульові елементи матриці  $(A_i)_{m,s}$  ( $m$  – номер рядка,  $s$  – номер стовпця,  $A_i$  – матриця  $15 \times 15$ ) [3]

Тут  $\hat{a}_{ijkl} \equiv \frac{1 + \delta_{kl}}{2} \cdot a_{ijkl}$ ,  $l, k = 1, 2, 3$ , (підсумовування по  $l, k$  не ведеться).

Таким чином, отримана розрахункова система рівнянь (1), (13), необхідна для розв'язування нестационарних зв'язаних задач теорії термомеханіки.

**Чисельні результати.** Розглянемо поле циліндричне тіло розташоване під кутом  $60^\circ$  (рис.1). Циліндр заповнюється рідиною з температурою  $T = 1536^\circ$ , і зі швидкістю проступання в тіло  $\tau$ .

Позначимо через  $T(t, x, r)$  – температурне поле,  $r$  – радіус циліндра,  $t$  – час.

Запишемо початкові та граничні умови:  $T = T_0 = 150^\circ$ , для  $r = 425$  ( $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ ) та

для  $r = 247$  ( $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ ), для  $x = 0, x = 3110$  ( $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ ), де  $x \in [0; 3110]$

$$r \in [247; 425], \quad t \in [0; \infty).$$

Потрібно знайти температурне поле, тензори напруги та деформації.

Для знаходження температурного поля пружно – пластичного тіла скористаємося методом дробових кроків [2, 5, 6]. Частинні похідні по координатам були апроксимовані за допомогою сплайн функцій [1, 3].

Замінивши відповідні диференціальні оператори в рівнянні (1) різницями (2), обрахуємо кожен вузол сітки в два кроки – спершу на пів кроці потім на повному. Зафіксуємо стан циліндричного тіла в момент коли температурне навантаження зайняло вузли по  $i = 1$  і розрахуємо температурне поле [4].

Результат розрахунку температурного поля при розрахунковому кроці  $\tau = 1$ , зображений на рис. 1

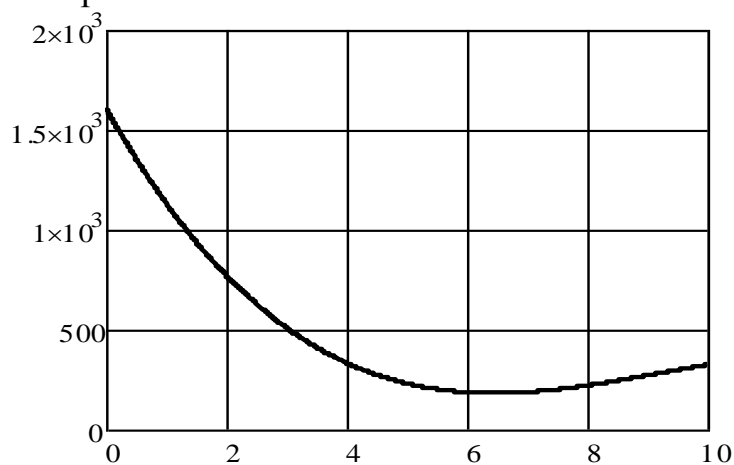
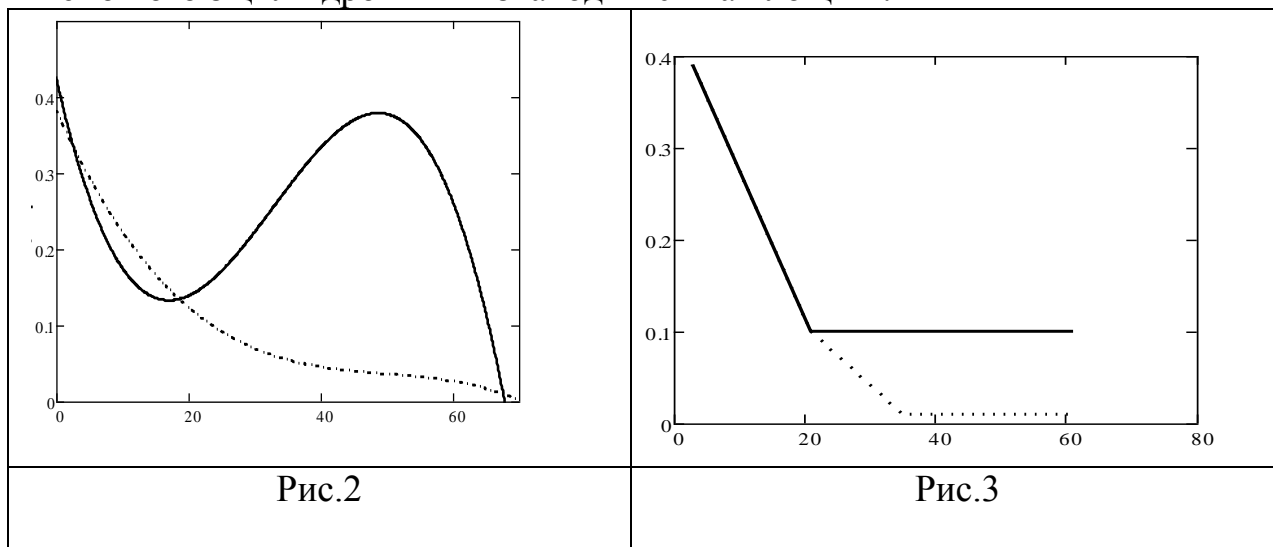


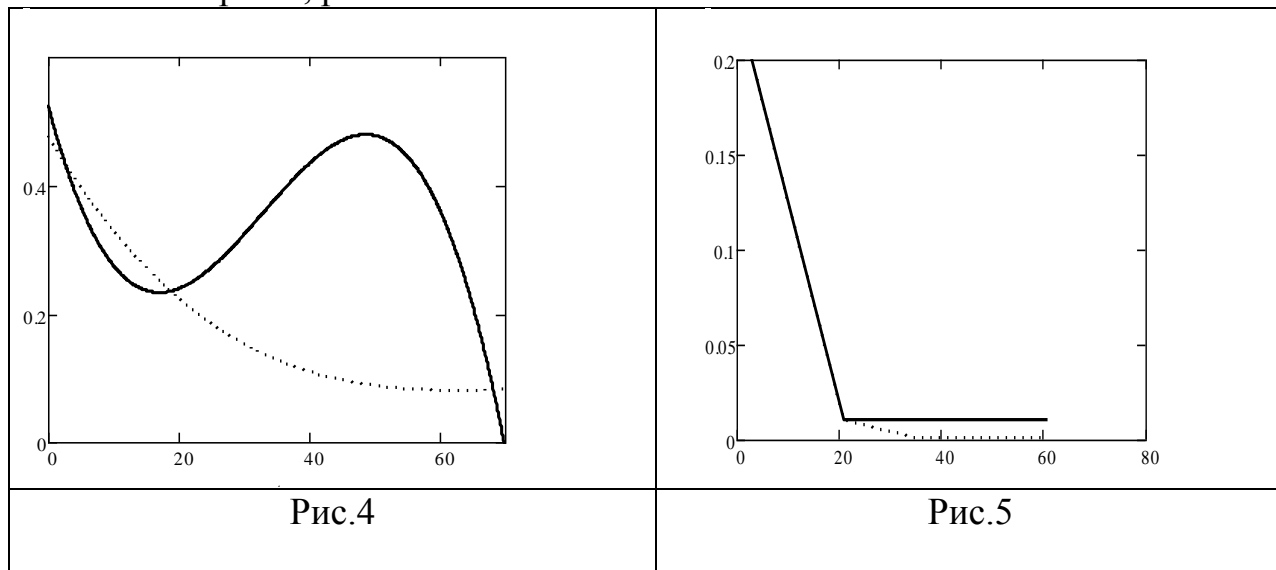
рис. 1

Отримано поле швидкостей напруження і деформації рис.2, рис.3. Порівняємо його з циліндром який знаходиться на площині.



Процес затвердіння тіла після заповнення відбувається зі швидкістю  $v = \frac{a}{r}U$ ,  $U$  - критерій, безрозмірна лінійна швидкість затвердіння. Аналогічно

розрахуємо поля швидкості зміни напруження та деформації, результат представлено на рис.4, рис.5



**Висновки.** Застосований метод дробових кроків до нестационарної задачі термопружності для циліндричного тіла, яке знаходиться під кутом, як результат отримано температурне поле тіла, поле зміщень, поле швидкості напруження та деформацій. Проведено порівняння з навантаженням циліндричного тіла. Наведені результати мають більш високий порядок точності в порівнянні з аналогічними результатами, отриманими за допомогою різницевого методу. Отримані результати дають змогу прогнозувати довговічність та надійність об'єктів, які працюють в умовах шоків нестационарних температурних навантажень.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Математические методы теплопроводности. К.: Вища школа.1993.-415с.
2. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решение многомерных задач математической физики. АН СССР, Сибирское отделение. 1967. – 197с.
3. Стеблянко П.А. Пространственные нестационарные задачи теории термоупругопластичности. НАН Украины, Институт механики, Министерство образования Украины, ДГТУ. 1997. – 273с.
4. Стеблянко П.О., Дьомічев К.Е. Моделювання температурного навантаження на пружно – пластичне тіло за допомогою методу дробових кроків. // Тези доповідей Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки - 2010». – Дніпродзержинськ.: 2010.-Ч.2. – 48с.