

УДК 624.04

СТІЙКІСТЬ СТРИЖНІВ НА ПОЛИЧЦІ ПЛИННОСТІ

БАЛАШОВА В. Г.^{1*}, асп.,
ЧЕРНЯКОВ Ю. А.^{1*}, д. ф.-м. н., проф.

^{1*} Кафедра теоретичної та прикладної механіки, Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, пр. Гагаріна, 72, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (056) 374-98-00, drviktorija@yandex.ru, ORCID ID: 0000-0002-1263-2975, yu.chernyakov@gmail.com ORCID ID: 0000-0003-3114-9820

Анотація. Метою статті є вивчення особливості втрати стійкості при осьовому стиску пружно-пластичних стрижнів, матеріал яких має полицку плинності на діаграмі стиску. Чисельні експерименти показують, що модель ідеально пластичної поведінки повинна бути переглянута. Встановлено, що полицка плинності формується не за рахунок однорідної течії всього зразка, за рахунок розповсюдження пластичної області вздовж стрижня. Таким чином, тільки частина стрижня знаходиться в пластичному стані, а інша частина залишається пружною. У зв'язку з цим виникають питання, пов'язані із взаємодією нестійкості матеріалу з геометричною (або конструкційною) нестійкістю стрижня. При проведенні інженерних розрахунків в будівельній механіці приймається, що стрижні з маловуглецевої сталі, діаграма одноосного розтягу якої має полицку плинності, втрачають стійкість відразу ж при досягненні межі текучості. Уточнення критичного навантаження для таких стрижнів дозволяє збільшити ресурси працездатності стрижнів, за рахунок розширення області стійкості і дозволить знизити матеріаломісткість конструкції. **Методи дослідження:** рішення задачі на власні значення для звичайного диференціального рівняння з кусково постійними коефіцієнтами; побудова залежності критичного навантаження від довжини стержня. **Результати.** Розв'язано задачу втрати стійкості стрижня з матеріалу з полицкою плинності та побудована залежність критичного по Шенлі напруження від довжини стрижня. **Практична значимість** роботи полягає в тому, що отримані в ній результати можуть бути використані в практиці інженерних розрахунків будівельних конструкцій на стійкість і міцність для підвищення ресурсів працездатності конструкції і економії металу.

Ключові слова: полицка плинності; критичне навантаження; втрата стійкості; стрижень; маловуглецева сталь; задача на власні значення; інженерні розрахунки

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ НА ПЛОЩАДКЕ ТЕКУЧЕСТИ

БАЛАШОВА В. Г.^{1*}, асп.,
ЧЕРНЯКОВ Ю. А.², д. ф.-м.н., проф.

^{1*} Кафедра теоретичної та прикладної механіки, Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара", вул. Гагаріна, 72, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (056) 374-98-00, e-mail : drviktorija@yandex.ru, ORCID ID: 0000-0002-1263-2975, yu.chernyakov@gmail.com ORCID ID: 0000-0003-3114-9820

Анотація. Целью статьи является изучение особенности потери устойчивости при осевом сжатии упруго-пластических стержней, материал которых имеет полочку текучести на диаграмме сжатия. Численные эксперименты показывают, что модель идеально пластической поведения должна быть пересмотрена. Установлено, что полочка текучести формируется не за счет однородной течения всего образца, за счет распространения пластической области вдоль стержня. Таким образом, только часть стержня находится в пластическом состоянии, а другая часть остается упругой. В связи с этим возникают вопросы, связанные с взаимодействием неустойчивости материала с геометрической (или конструкционной) неустойчивостью стержня. При проведении инженерных расчетов в строительной механике принимается, что стержни из малоуглеродистой стали, диаграмма одноосного растяжения которой имеет полочку текучести, теряют устойчивость сразу же при достижении предела текучести. Уточнение критической нагрузки для таких стержней позволяет увеличить ресурсы работоспособности стержней, за счет расширения области устойчивости и позволит снизить материалоемкость конструкции. **Методы исследования:** решение задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения с кусочно постоянными коэффициентами; построение зависимости критической нагрузки от длины стержня. **Результаты.** Решена задача потери устойчивости стержня из материала с полочкой текучести и построена зависимость критического по Шенли напряжения от длины стержня. **Практическая значимость** работы заключается в том, что полученные в ней результаты могут быть использованы в практике инженерных расчетов строительных конструкций на устойчивость и прочность для повышения ресурсов работоспособности конструкции и экономии металла.

Ключевые слова: полочка текучести; максимальная нагрузка; потеря устойчивости; стержень; малоуглеродистой стали; задача на собственные значения; инженерные расчеты

STABILITY OF RODS AT YIELD PLATEAU

BALASHOVA V. G.^{1*}, *PhD stud.*,
CHERNYAKOV Y. A.², *Dr. Sc. (Phys.-Math.), Prof.*

^{1*} Department of Theoretical and Applied Mechanics, Oles Honchar Dnipropetrovsk National University ,49010, Dnepr, Gagarin ave., 72., Dnepr 49600, Ukraine, tel. +38(056)374-98-00, e-mail : drviktorija@yandex.ru, ORCID ID:0000-0002-1263-2975, yu.chernyakov@gmail.com ORCID ID: 0000-0003-3114-9820

Annotation. *The aim of the article* is to examine the features of buckling under axial compression elastic-plastic rods, which has a yield plateau material yield compression in the diagram. Numerical experiments show that the model perfectly plastic behavior should be reconsidered. Found that shelf fluidity is not formed by a homogeneous flow of the entire sample, through the distribution of plastic zone along rod. Thus, only a portion of the rod is in a plastic state, and the rest remains resilient. In this regard, there are issues related to the interaction of unstable material with geometric (or structural) buckling of the rod. In carrying out engineering calculations in building mechanics is assumed that the core of mild steel, chart uniaxial tension which has a yield plateau, lose stability immediately upon reaching the yield point. Clarification of the critical load for these cores can increase resource efficiency rods, by improving its stability and will reduce the consumption of materials design. **Methods:** solving the problem on eigenvalues for ordinary differential equation with piecewise constant coefficients; construction of critical load, depending on the length of the rod. **Results.** The problem of buckling of the core material with a yield plateau and built a critical dependence on Shengli strain on the length of the rod. **The practical significance** of the work lies in the fact that it received results can be used in the practice of engineering calculations of building structures on the stability and strength to improve resource efficiency and economy of metal structures.

Keywords: shelf turnover; critical load; buckling; rod; mild steel; eigenvalue problem; engineering calculations

Вступ

Модель ідеально пружно-пластичної поведінки виникла на базі численних експериментальних досліджень маловуглецевих сталей на осьове розтягнення. В моделі прийнято, що пластичне деформування вздовж стрижня на полиці плинності є однорідним, а смуги Людерса-Чернова, які виникають при цьому, трактують, як підтвердження зсувного характеру розвитку пластичної деформації. Як наслідок, в постановці Шенлі критичне навантаження стиснутого пружного стрижня дорівнює нулю, тобто відразу після досягнення межі текучості відбувається втрата стійкості стрижня.

В цілому ряді експериментів [1,2], виявлено, що виникнення і поширення смуг Людерса-Чернова при одноосьовому розтягуванні або стисненні, має нестійкий характер. Крім того в експериментах, які проведені в роботах [4,7,11], встановлено, що пластична деформація на полиці плинності розвивається за рахунок поширення смуг ковзання Людерса-Чернова по довжині зразка. При цьому в кожен момент часу деформація має місце уздовж однієї або декількох смуг, поки не буде досягнута пластична деформація, що відповідає переходу до ділянки зміцнення. Далі утворюється нова смуга на деякій відстані від попередньої, і пластичне деформування триває. На рис. 1 наведена діаграма осьового розтягнення сталі 1018 при жорсткому навантаженні та розвиток пластичної області уздовж стрижня. Наведені дані наводять на думку про перегляд класичного трактування ідеальної пластичності. У підсумку, ми приходимо до тієї ж моделі ідеальної пластичності для зразка в цілому, але до істотно неоднорідній структурі.

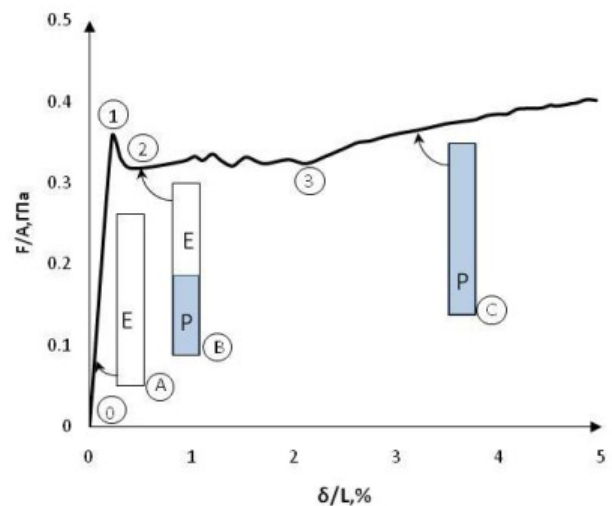


Рис. 1. Діаграма осьового розтягнення /
Stress-strain diagram

Смуги поширюються уздовж стисненого стрижня, який може одночасно втратити стійкість, і він стає неоднорідним. Частина стрижня знаходиться в пластичному стані, а інша частина залишається пружною. У зв'язку з цим виникають питання, пов'язані із взаємодією нестійкості матеріалу з геометричною (або конструкційною) нестійкістю стрижня. Така взаємодія між двома типами втрати стійкості була відмічена у роботі [3]. Пізніше в роботі [10] було досліджено поперечний вигин центрально стиснених стрижнів зі смугами Людерса-Чернова. Представлені експерименти, в яких контролювався розвиток смуг Людерса-Чернова, поперечні відхилення стрижня та стискаюче навантаження для різних довжин.

Ціль

Ціль статті полягає у вивченні взаємодії явищ нестійкості матеріалу і втрати стійкості конструкції в найпростішому і цікавому випадку – стрижня з м'якої сталі при осьовому стисненні.

Об'єктом дослідження є стійкість пружно-пластичного стрижня з матеріалу з полицкою плинності.

Предметом дослідження є теоретичне дослідження стійкості пружно-пластичного стержня з матеріалу який має полицку плинності.

Актуальність дослідження полягає в тому, що при проведенні інженерних розрахунків будівельних конструкцій приймається, що стрижні з матеріалу, діаграма одновісного розтягу якого має полицку плинності, втрачають стійкість відразу після досягнення межі плинності. Уточнення критичного навантаження для таких стрижнів дозволить збільшити ресурс працездатності стрижнів, за рахунок розширення області стійкості і дозволить знизити матеріаломісткість конструкції.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо центрально стиснутий стрижень довжини L , виготовлений з матеріалу з полицкою плинності із затиснутими обома кінцями (Рис. 2). З огляду на описані вище специфічні властивості матеріалу, прийmemo, що в певний момент часу на частині $0 \leq x \leq l$, на якій досягнута пластична деформація Людерса, маємо пластичний дотичний модуль E_k , який визначається в точці (3) переходу діаграми від полицки плинності до ділянки зміцнення. На ділянці $l \leq x \leq L$ маємо пружну поведінку, яка характеризується пружним модулем E . Очевидно, що $E_k < E$.

Матеріал стрижня – маловуглицева сталь, схематична діаграма осьового стиснення якої при м'якому навантаженні має полицку плинності, як показано на рис. 3. Ця діаграма буде подібна діаграмі побудованої для зразка. При розрахунках для цієї сталі було прийнято $E_k = 6000$ МПа, $\sigma_T = 225$ МПа.

Механічні властивості стрижня змінюються по довжині, так на ділянці $0 \leq x \leq l$, на якому досягнута пластична деформація Людерса, матимемо пластичний дотичний модуль E_k , який визначається в точці (3) переходу діаграми від полицки плинності до ділянки зміцнення.

На ділянці $l \leq x \leq L$ маємо пружну поведінку, яка характеризується пружним модулем E . Очевидно, що $E_k < E$. $E_k=6000$ МПа, $\sigma_T=225$ МПа.

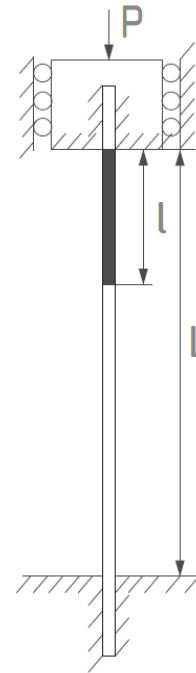


Рис. 2. Стрижень з затиснутими кінцями / Rod with fixed ends

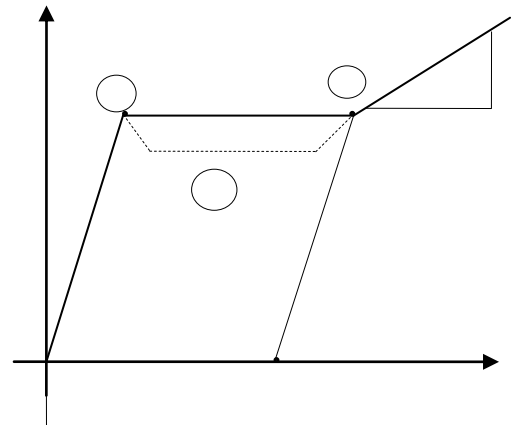


Рис. 3. Схематична діаграма осьового стиску / Schematic stress-strain diagram

У роботах [9,10] на спрощеній моделі стрижня показано, що вигин центрово-стиснутого стрижня може початися, коли навантаження досягне значення щодо модульної. Пізніше цей підхід був узагальнений на пружно-пластичні тіла, механічні властивості яких описуються теорією пластичності з кусково-гладкими поверхнями плинності в роботі [6, 8], а в роботі [1] з сингулярної поверхнею плинності. Було показано, що перша біфуркація процесу деформування пружно тіла визначається, як рішення задачі стійкості по Ейлера лінеаризованого тіла порівняння, що визначають співвідношення якого впливають з співвідношень

для нелінійного тіла за умови повного довантаження. Стосовно до задачі стійкості центрово-стиснутих стрижнів все зводиться до заміни в рівнянні стійкості по Ейлера пружного модуля (E) на дотичний модуль. У розглянутому нами випадку тільки частина стрижня буде знаходитися в пластичному стані. В силу цього, приходимо до задачі на власні значення для диференціального рівняння четвертого порядку з кусково-постійними коефіцієнтами:

$$E'I \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

де

$$E' = \begin{cases} E_k, & 0 \leq x \leq l, \\ E, & l \leq x \leq L. \end{cases}$$

Введемо наступні позначення

$$\mu = \frac{m_1}{m} = \sqrt{\frac{E}{E_k}}, \lambda = \frac{l}{L}, P_3 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad (2)$$

$$P_k = \frac{\pi^2 E_k I}{L^2}, m_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{P_k}, m = \frac{\pi}{L} \sqrt{P_3}$$

тої з (1) знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 v_1}{dx^4} + \mu^2 m^2 \frac{d^2 v_1}{dx^2} &= 0, & 0 \leq x \leq l \\ \frac{d^4 v_2}{dx^4} + m^2 \frac{d^2 v_2}{dx^2} &= 0, & l \leq x \leq L \end{aligned} \quad (3)$$

Відповідні характеристичні рівняння (3) мають вигляд:

$$\begin{aligned} p_1^4 + \mu^2 m^2 p_1^2 &= 0, & 0 \leq x \leq l \\ p_2^4 + m^2 p_2^2 &= 0, & l \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (4)$$

і розв'язок рівняння можна записати у формі

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \sin \mu m x + B_1 \cos \mu m x + C_1 x + D_1, & 0 \leq x \leq l, \\ v_2 &= A_2 \sin m x + B_2 \cos m x + C_2 x + D_2, & l \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (5)$$

де $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ – довільні постійні.

Рішення (5) має задовольняти граничним умовам, які в нашому випадку (стрижень з затисненими краями) мають

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, \frac{dv_1}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ v_2 &= 0, \frac{dv_2}{dx} = 0 \quad \text{при } x = L \end{aligned} \quad (6)$$

і умовам спряження на границі розділу механічних властивостей матеріалу (при $x = l$)

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2, \frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx}, E_k I \frac{d^2 v_1}{dx^2} = EI \frac{d^2 v_2}{dx^2}, \\ E_k I \frac{d^3 v_1}{dx^3} &= EI \frac{d^3 v_2}{dx^3} \end{aligned}$$

або з урахуванням прийнятих позначень

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2, \frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx}, \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \mu^2 \frac{d^2 v_2}{dx^2}, \\ \frac{d^3 v_1}{dx^3} &= \mu^2 \frac{d^3 v_2}{dx^3} \quad \text{при } x = l, \end{aligned} \quad (7)$$

Підставляючи рішення (5) в граничні умови (6) і умови спряження (7) отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо довільних постійних. Для визначення критичного значення навантаження прирівнюємо визначник цієї системи нулю. З огляду на прийняті позначення, знаходимо

$$|a_{ij}| = 0, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{14} = a_{23} = a_{34} = a_{38} = a_{43} = a_{47} = \\ a_{77} &= a_{78} = a_{87} = 1, a_{33} = a_{37} = \lambda, a_{21} = \mu t, \\ a_{31} &= \sin \mu m \lambda, a_{32} = \cos \mu m \lambda, a_{35} = \sin m \lambda, \\ a_{36} &= \cos m \lambda, a_{41} = \mu t \cos \mu m \lambda, a_{42} = -\mu t \sin \mu m \lambda, \\ a_{45} &= t \cos \mu m \lambda, a_{46} = -t \cos \mu m \lambda, a_{51} = -\sin \mu m \lambda, \\ a_{52} &= -\cos \mu m \lambda, a_{55} = -\sin m \lambda, a_{56} = -\cos m \lambda, \\ a_{61} &= -\mu \cos \mu m \lambda, a_{62} = -\mu \sin \mu m \lambda, a_{65} = -\cos m \lambda, \\ a_{66} &= \sin m \lambda, a_{75} = \sin m, a_{76} = \cos m, a_{85} = t \cos m, \\ a_{86} &= -t \sin m, \end{aligned}$$

і інші елементи визначника дорівнюють нулю ($a_{ij} = 0$).

Трансцендентне рівняння (8) залежить від параметрів λ, μ, t . Треба зазначити, що значення параметра λ обмежені значеннями 0, коли стрижень пружний, і 1, коли стрижень повністю пластичний. При таких граничних значеннях λ рівняння суттєво спрощується і ми знаходимо

$$\begin{aligned} \sin \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} \cos \frac{m}{2} - \sin \frac{m}{2} \right) &= 0 \quad \text{при } \lambda = 1, \\ \sin \frac{\mu m}{2} \left(\frac{\mu m}{2} \cos \frac{\mu m}{2} - \sin \frac{\mu m}{2} \right) &= 0 \quad \text{при } \lambda = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В такому випадку знаходимо при $\lambda = 0$ $m = 2\pi$, і при $\lambda = 1$ $\mu t = 2\pi$, тоді $P = 4P_3$, при $\lambda = 0$, а при $\lambda = 1$, маємо $P = 4\mu^2 P_3 \equiv 4P_k$.

При проміжних значеннях рішення рівняння $0 < \lambda < 1$ При проміжних значеннях рішення рівняння t от λ , Графік залежності від, отриманий в результаті обчислень, наведено на рис. 4. Як і слід було очікувати $1 \geq t \geq 1/\mu$.

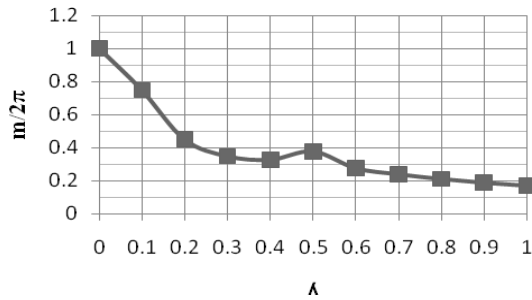


Рис. 4. Зависимость m от λ /
Dependence m from λ

На рис. 5 наведена залежність критичного напруження $\sigma_{кр} = P/F$ від довжини стрижня L . Як випливає з отриманих результатів, при значенні напруження, що відповідає верхній межі плинності, критична довжина може набувати значення від L_{min} до L_{max} в залежності від величини параметру λ . При довжині стрижня менше L_{min} значення критичного навантаження відповідає докритичному напруженню вище межі плинності. Отримані результати якісно підтверджуються експериментами, які наведені в роботі [3].

Результати

Як випливає з отриманих результатів, при значенні напружень, які відповідають верхній межі плинності, критична довжина має розрив. Виявляється, що стрижень в діапазоні довжини від L_{min} до L_{max} не втрачає стійкість, що істотно відрізняється від класичного трактування, по якій при досягненні межі текучості стрижень з матеріалу з майданчиком плинності втрачає стійкість. При довжині стрижня менше L_{min} значення критичного навантаження буде відповідати перевищення до критичним напруженням межі текучості. Отримані результати якісно підтверджуються експериментами, представленими в роботі [3].

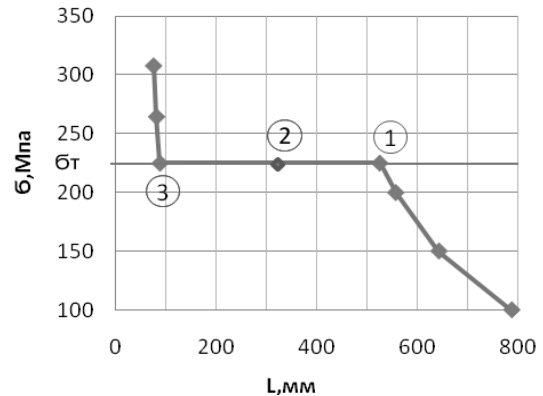


Рис. 5. Залежність критичного напруження від довжини стрижня /
Plot critical stress vs rod length

Практична значимість

Теоретичне значення полягає в тому, що отримані формули, що дозволяють будувати залежність критичної завантаження від довжини стрижня з урахуванням неоднорідності розвитку пластичної деформації на полицьку плинності.

Практичне значення полягає в можливості розширення ресурсу працездатності стислих стрижнів, виготовлених з маловуглецевої сталі діаграма осевого стиснення якої має полицьку плинності.

Висновки

1. Здійснено постановка задачі стійкості центрово стиснутого, неоднорідного (частково пластичного) по довжині стрижня.
2. Задача визначення критичного завантаження зведена до чисельного розв'язку трансцендентного рівняння.
3. Показано, що облік неоднорідності поширення пластичної деформації по довжині стрижня створює запас стійкості стрижня.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Черняков Ю. А. Достаточные условия единственности процесса деформирования упругопластического тела / Ю. А. Черняков // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск. – 1988. – С. 65–72.
2. Butler, J. F. Lüders front propagation in low carbon steels / J. F. Butler // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1–62. – Vol. 10. – P. 313–334.
3. Corona E. 2002. Buckling of steel bars with Lüders bands/ E. Corona, J. A. Shaw, M. A. Iadicola // International Journal of Solids and Structures. 2002. – Vol. 39. – P. 3313–3336.
4. Haaijer G. 1958. On inelastic buckling of steel / G. Haaijer, B. Thürlimann // ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1958. – Vol. 84. – P. 1581–1581–48.
5. Hall E. O. Yield Point Phenomena in Metals and Alloys / E. O. Hall // Macmillan, NY. HKS, 1999. ABAQUS Manual. –1970. – vers. 5.8.
6. Hill R. A general theory of uniqueness and stability of elastic plastic solids / R. Hill // J. of Mech. Phys. Solids. – 1958. – Vol. 6. – P. 236–249.
7. Kyriakides S. On the propagation of Luders bands in steel strips / S. Kyriakides, J.E. Miller // Journal of Applied Mechanics. – 2000. – Vol. 67 (4). – P. 645–654.

8. Rudnicki J. W. Conditions for the Localization of Deformation in Pressure–Sensitive Dilatant Materials / J.W. Rudnicki, J. Rice // J. Mech. Phys. Solids. – 1975. –N 23. – P. 371–394.
9. Shanley F. R. Inelastic Column Theory / F. R. Shanley // J. Aeronaut. Sci. – 1947. – Vol. 14, N 5. – P. 281–287.
10. Shanley F. R. The Column Paradox / F.R. Shanley // J. Aeronaut. Sci. –1946. –Vol. 13, N 12. – P. 618–679.
11. Shaw J. A. Initiation and propagation of localized deformation in elasto–plastic strips under uniaxial tension / J.A. Shaw, S. Kyriakides //International Journal of Plasticity. – 1998. –Vol. 13. – P 837–871.

REFERENCES

1. Chernyakov Yu.A. *Dostatocnyie usloviya edinstvennosti protsessa deformirovaniya uprugoplasticheskogo tela* [Sufficient conditions for the uniqueness of deformation process for the elastoplastic body]. Ustoychivost i prochnost elementov konstruksiy. Dnepropetrovsk, 1988. P.65-72. (in Russia)
2. Butler J.F. *Lüders front propagation in low carbon steels. Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1962, 10, P. 313–334.
3. Corona E., Shaw J.A., Iadicola M.A. *Buckling of steel bars with Lüders bands. International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39, P.3313–3336.
4. Haaijer, G., Thürlimann, B. On inelastic buckling of steel. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, 1958, 84, P.1581-1– 1581-48.
5. Hall E.O. *Yield Point Phenomena in Metals and Alloys*. Macmillan, NY. HKS, 1999. ABAQUS Manual, 1970., version 5.8
6. Hill R. A general theory of uniqueness and stability of elastic plastic solids. J.of Mech.Phys.Solids, 1958, Vol.6, P.236-249.
7. Kyriakides S., Miller, J.E. On the propagation of Luders bands in steel strips. Journal of Applied Mechanics, 2000, 67 (4), P. 645–654.
8. Rudnicki J.W., Rice J. Conditions for the Localization of Deformation in Pressure-Sensitive Dilatant Materials. J. Mech. Phys. Solids, 1975, N 23, P. 371-394.
9. Shanley F.R. Inelastic Column Theory. J. Aeronaut. Sci., 1947, V.14, N 5, P. 281-287
10. Shanley F.R. The Column Paradox. J. Aeronaut. Sci., 1946, V.13, N 12, P. 618-679.
11. Shaw J.A., Kyriakides, S. Initiation and propagation of localized deformation in elasto-plastic strips under uniaxial tension. International Journal of Plasticity, 1998, 13, P. 837–871.

Стаття надійшла в редколегію 06.09.2016