УДК 624.15

ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ

Д.т.н., проф. Чемодуров В.Т., Попов А.Г.
Национальная академия природоохранного и курортного строительства, г. Симферополь

Постановка проблемы. Рассматриваемый в статье класс задач отличается тем, что оптимальное сочетание параметров элементов конструкций оказывается на границе функциональных ограничений. Этот, довольно обширный класс задач, включает в себя подавляющее число задач проектирования систем, поскольку функционирование последних происходит в рамках большого числа ограничений (ограничений по нагрузкам, габаритам, по прочности и жесткости отдельных элементов конструкции, допустимым отклонениям варьируемых параметров, по стоимости и другие).

Если оптимальное решение искать без учета помех методами нелинейного программирования, и оно оказывается принадлежащим детерминированной границе, то это означает, что в реальных условиях (при наличии помех), практически в 50% случаев будет иметь место отказ системы. Найденное таким образом оптимальное решение может служить основой для определения вероятностных характеристик ограничений задачи в этой области. Остается только определиться с вероятностными характеристиками функциональных границ и найти новое решение для заданной вероятности их ненарушения.

Связь с научными и практическими заданиями. В настоящее время все проектные работы производятся в строгом соответствии с нормативными и рекомендательными документами по основным элементам строительных сооружений. Причем все проектные работы выполняются для «наихудших» условий функционирования конструкции, то есть на сочетание предельно максимальных нагрузок, что, в принципе, является излишней «перестраховкой».

Рекомендации предназначены для всех организаций, независимо от формы их собственности и принадлежности, осуществляющих проектно-изыскательские и строительные работы по основаниям, фундаментам и подземным сооружениям. Такой подход удобен как для строительных организаций, так и для контролирующих органов.

В то же время во многих отраслях производства широко используются методы проектирования объектов, базирующиеся на методах системного анализа, позволяющих получить существенные выгоды, как в эффективности функционирования, так и в себестоимости продукции.

В связи с этим несомненно актуальным является анализ строительных конструкций с использованием стохастических моделей их нагружения, особенно при внешнем сейсмическим воздействии. Такой подход позволит оптимизировать параметры элементов свайных конструкций и их конфигурацию для любой заданной вероятности их безопасного функционирования.

Цель исследования. Целью исследования является создание методики проектирования элементов строительных конструкций, их конфигурации путем разработки стохастического метода оптимизации параметров с учетом случайного характера внешних нагрузок, характеристик используемых материалов, ошибок производства и других случайных факторов, влияющих на надежность создаваемой конструкции.

Основные этапы разработки методики комплексного проектирования:

– разработка математической модели прочности и жесткости элементов свайной конструкции при действии на нее детерминированной внешней нагрузки;

– разработка стохастической модели прочности и жесткости элементов свайной конструкции с учетом реальных разбросов (в пределах нормативных допусков) геометрических характеристик и физических свойств материалов элементов сооружения;

– разработка пакета программ нелинейного и стохастического программирования.

Изложение основного материала исследования. Необходимо отметить, что случайные переменные, которые в сложных системах представляют наложение многих различных более или менее независимых причин, могут рассматриваться как суммы случайных переменных. Известно, что сумма произвольно распределенных случайных переменных приближенно распределены по нормальному закону, причем тем ближе, чем больше членов этой суммы. Это служит основой того, что многие статистические распределения при достаточном объеме выборки хорошо аппроксимируются нормальным распределением.

Введем ряд математических обозначений: x – вектор варьируемых параметров; $\overline{x}$ – оптимальный вектор детерминированной задачи; $\tilde{x}$ – оптимальный вектор стохастической задачи; θ – вектор случайных параметров; $f^i(x,\theta)$ – i-я функция ограничения задачи; D_x – область допустимых решений задачи.

В общем случае задача оптимизации формулируется следующим образом: минимизировать функцию

$$f^0(x,\theta) \tag{1}$$

при условиях

$$Q^i(x) = P\left\{f^i(x,\theta) \le 0\right\} - p_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$x \in X, \quad \theta \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь: $f^0(x,\theta)$ – целевая функция; m – число функциональных ограничений; $x = (x_1,...,x_n) \in X$ – вектор варьируемых параметров; $\theta = (\theta_1,...,\theta_k) \in \Omega$ – вектор параметров, которые имеют вероятностную природу с известными законами распределения; p_i – заданные константы.

В нелинейном программировании случайности не учитываются, все параметры приравниваются к их номинальным значениям. С учетом сказанного, задача (1) – (3) запишется следующим образом: минимизировать функцию

$$f^0(x) \tag{4}$$

при условиях

$$f^i(x) \le 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

$$x \in X. \tag{6}$$

Пусть найдено оптимальное решение $\overline{x}$, при котором выполняются условия (5) и (6). Если теперь в модель ввести помехи, то при ее реализации в точке $\overline{x}$ ограничения (5) для одних решений будут выполняться, для других нет. Таким образом, можно говорить о случайном разбросе функциональных границ вокруг своих номинальных значений.

Если, используя выборочные методы, имеется возможность установить законы распределения функциональных ограничений и оценки их параметров в данной точке $\overline{x}$, то, задаваясь вероятностью не нарушения границ, можно определить новые функциональные ограничения $F^i(x) \le 0$, удовлетворяющие выбранному уровню вероятности безотказного функционирования рассматриваемой системы в реальных условиях.

В общем случае параметры распределения функций $f^i(x,\theta)$ зависят от векторов x и θ, поэтому их можно представить в точке оптимального решения следующим образом $f^i(\overline{x},\theta) = u^i(x) + v^i(\theta)$.

Пусть $v^i(\theta)$ имеет нормальное распределение с плотностью

$$\varphi_v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(f^i)} e^{-\frac{(f^i - M(f^i))^2}{2\sigma(f^i)^2}}. \tag{7}$$

Интегрируем (7) в пределах от $-\infty$ до 0.

$$P\left[f^i(\overline{x},\theta) \le 0\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(f^i)} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(f^i - M(f^i))^2}{2\sigma(f^i)^2}} df^i. \tag{8}$$

После введения новой переменной $v^i = (f^i - M(f^i))/\sigma(f^i)$, получим

$$P\left[f^i(\overline{x},\theta) \le 0\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k_i} e^{-(v^i)^2/2} dv^i,$$

где $k_i = -M(f^i)/\sigma(f^i)$. Тогда условие (2) можно записать

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k_i} e^{-\left(v^i\right)^2/2}dv^i \geq p_i\ , \qquad (9)$$

или

$$-M\left(f^i\right)/\sigma\left(f^i\right) \geq k\left(p_i\right). \qquad (10)$$

Откуда окончательно получим

$$M\left[f^i\left(\overline{x},\theta\right)\right] + k\left(p_i\right)\sigma\left[f^i\left(\overline{x},\theta\right)\right] \leq 0,\ \ i = \overline{1,m}. \qquad (11)$$

Оценки параметров распределения функциональных ограничений можно получить, используя зависимости математической статистики

$$M\left[f^i\left(\overline{x},\theta\right)\right] = \sum_{j=1}^{n} f^i\left(\overline{x},\theta\right)/n\ , \qquad (12)$$

$$\sigma^2\left[f^i\left(\overline{x},\theta\right)\right] = \frac{n\sum_{j=1}^{n}\left[f^i\left(\overline{x},\theta\right)\right]^2 - \left[\sum_{j=1}^{n} f^i\left(\overline{x},\theta\right)\right]^2}{n\left(n-1\right)}\ , \qquad (13)$$

Необходимо иметь в виду, что по формулам (12) и (13) мы определяем оценки параметров. В задачах, где требуется высокая точность вероятности не нарушения функциональных ограничений, необходим расчет соответствующего объема выборки. Согласно теоремы Ляпунова отношение $\sqrt{2n}\left(\tilde{\sigma}-\sigma\right)/\sigma$ стремится к нормальному при возрастании n. Имея это в виду, можно записать

$$P\left[\left|\tilde{\sigma}-\sigma\right|\frac{\sqrt{2n}}{\sigma} < z_\alpha\right] = 2\Phi\left(z_\alpha\right) - \alpha\ , \qquad (14)$$

где $\Phi(*)$ – функция Лапласа, α – доверительная вероятность того, что истинное значение будет накрыто интервалом $\tilde{\sigma} = z_\alpha\sigma/\sqrt{2n}$. Обозначим $\left|\tilde{\sigma}-\sigma\right| = \Delta_\sigma$, где Δ_σ – заданная величина. Решим относительно n неравенство $z_\alpha\sigma/\sqrt{2n} \leq \Delta_\sigma$:

$$n \geq \frac{z_\alpha^2\sigma^2}{2\Delta_\sigma^2} = \frac{z_\alpha^2}{2q_\sigma^2},\ \text{где}\ q_\sigma = \frac{\Delta_\sigma}{\sigma}\ . \qquad (15)$$

При заданном p вероятность не нарушения определяется величиной $k\sigma$. Зададимся допустимым отклонением Δ_σ, тогда вероятность не нарушения функционального ограничения будет определяться величиной $k'\sigma$, то есть

$$\Delta_\sigma = \sigma\frac{k-k'}{k} = \sigma\left(1-\frac{k'}{k}\right) = q_\sigma\ . \qquad (16)$$

Сравнивая (15) и (16), будем иметь

$$n \geq \frac{z_\alpha^2}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{k'}{k}\right)}. \qquad (17)$$

Коэффициенты k и k' связаны с вероятностью через соотношения

$$\alpha = \Phi(k\sigma), \ \alpha' = \Phi(k'\sigma). \qquad (18)$$

Из всего выше сказанного вытекает следующая последовательность оптимизации выделенного класса задач проектирования с использованием их стохастических моделей, включающая три этапа.

На первом этапе осуществляется поиск оптимального решения на детерминированной модели.

Второй этап – статистический анализ функциональных ограничений в окрестности оптимального решения, полученного на первом этапе, и построение области допустимых решений задачи по вероятности.

На третьем этапе осуществляется поиск оптимального решения задачи для новой системы функциональных ограничений.

Выводы. Представленный вероятностный подход к оптимизации проектных задач выделенного класса (оптимальное решение принадлежит границе области допустимых значений параметров), кроме сокращения вычислительных затрат (связанных с использованием методов стохастического программирования), позволяет выявить значительный эффект в улучшении выбранного критерия эффективности проектируемых конструкций, по сравнению с детерминированными методами расчета по совокупности неблагоприятных комбинаций отклонений параметров и характеристик систем от их номинальных значений.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Волгин Н.С. и др. – Исследование операций. Л., ВМА, 1981г.
2. Дудорин В.И. и др. – Моделирование структур АСУ на ЭВМ. М., «Финансы и статистика», 1982г.
3. Ермольев Ю.М. и др. – Математические методы исследования операций. К., «Вища школа», 1979г.
4. Моисеев Н.Н. – Математические задачи системного анализа. М., «Наука», 1981г.
5. Уайлд Д.Дж. – Методы поиска экстремума. М., «Наука», 1967г.
6. Чемодуров В.Т. – Поиск оптимума в задачах с ограничениями по вероятности. Л., ВМА, 1981г.
7. Чемодуров В.Т. – Прикладные методы статистического оценивания. Л., ВМА,1981г.
8. Чемодуров В.Т. – Моделирование систем. Л., ВМА, 1983г.
9. Шеннон Р. – Имитационное моделирование систем – искусство и наука. М., «Мир», 1978г.